１章　数列　【第１回】

1.1 数列とは

1) 数列の例

増加数列，減少数列，それ以外

有限数列，無限数列

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ････　［増加・減少・それ以外の］数列，［有限・無限］数列

1024, 512, 256, 128, 64　［増加・減少・それ以外の］数列，［有限・無限］数列

3, 5, 2, 3, 4, 7, 1, 8, ････　［増加・減少・それ以外の］数列，［有限・無限］数列

一般に

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$

$s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n, \cdots$

2) 等差数列

1, 3, 5, 7, 9, ･･････････　初項 1　公差 2

100, 90, 80, 70, ･･･････　初項［　　　］公差［　　　］

初項 1.2，公差 0.2 の等差数列　［　　　　　　　　　　］

初項 a，公差 d の等差数列　［　　　　　　　　　　　　］

一般項 a_n = ［　　　　　　　　］

3) 等比数列

1, 2, 4, 8, 16, ･････････　初項 1　公比 2

1024, 512, 256, 128, ･･･　初項［　　　］公比［　　　］

初項 2，公比 3 の等比数列　［　　　　　　　　　　　　］

初項 1，公比 1/2 の等比数列　［　　　　　　　　　　　　］

初項 a，公比 r の等比数列　［　　　　　　　　　　　　］

一般項 a_n = ［　　　　　　　　］

演習

１）以下の等差数列の初項と公差を求めよ。

5, 8, 11, 14, 17, ・・・・・　　　　　初項［　　　　］　公差［　　　　］

２）初項 90、公差 -10 の等差数列の初項から 4 項目までを書け。

［　　　　］,　［　　　　］,　［　　　　］、［　　　　］

３）以下の等比数列の初項と公比を求めよ。

1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, ・・・・・　初項［　　　　］公比［　　　　］

４）初項 8、公比 3 の等比数列の初項から 4 項目までを書け。

［　　　　］,　［　　　　］,　［　　　　］、［　　　　］

1.2 Σ記号の使用法　【第２回】

使用例

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\sum_{i=1}^{10}a_i=\sum_{k=1}^{10}a_k$$

$$b_5+b_6+b_7+\cdots+b_{20}=$$

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=$$

$$\sum_{i=2}^{5}a_i=$$

$$\sum_{i=1}^{3}a_i^2=$$

$$\sum_{i=1}^{4}a_ib_i=$$

$$\sum_{i=1}^{5}a=$$

$$\sum_{i=1}^{5}i=$$

$$\sum_{i=1}^{4}a_ib_{i+1}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2i+1}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}ar^{i-1}=$$

公式

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i \times b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \times \sum_{j=1}^{n} b_j$$

演習

以下のΣ記号の式を書き下せ。

１） $\sum_{i=3}^{5} a_i =$

２） $\sum_{i=1}^{3} \frac{i}{i+1} =$

以下の数列をΣ記号で表せ。

３） $a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{20} =$

４） $1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + 81 =$

1.3 数列の和の計算　【第３回】

１）等差数列の和

例　以下の和を求めよ。

１）　$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$　　間隔の数

項の数

答

２）　$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 49$　　間隔の数

項の数

答

２）等比数列の和

例　以下の和を求めよ。

１）　$S = 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$

答

２）　$S = 1 + 1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3 + \cdots$

答

３） $S = 1 - 1/3 + (1/3)^2 - (1/3)^3 + \cdots$

答

演習　以下の和を求めよ。

１） $S = 5 + 6 + 7 + \cdots + 30$

間隔の数

項の数

答

２） $S = 1 + 1/5 + (1/5)^2 + (1/5)^3 + \cdots$

答

２章　行列　【第４回】

2.1 行列とは

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3.2 & 4.1 & 2.3 \\ 5.1 & -2.4 & 1.5 \end{pmatrix}$$

2行2列　［　　　　］　［　　　　］　［　　　　］

行列の成分

$$\mathbf{A}(\quad\times\quad) = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

について

$$(\mathbf{A})_{12} = a_{12} =$$
$$(\mathbf{A})_{23} = a_{23} =$$
$$(\mathbf{A})_{32} = a_{32} =$$

等

正方行列　$\mathbf{A}(n \times n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

のように、行と列の数が等しいもの

対角行列　$\mathbf{W}(n \times n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

のように、対角成分以外が 0 になっている正方行列

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は対角行列か？

単位行列　$\mathbf{I}(n \times n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のように、対角成分がすべて 1 の対角行列

$$\mathbf{I}(n \times n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

成分表示：$(\mathbf{I})_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \quad \text{のとき} \\ 0 & i \neq j \quad \text{のとき} \end{cases}$

δ_{ij} ：クロネッカーのデルタ

補）対角行列のクロネッカーのデルタによる成分表示：$(\mathbf{W})_{ij} = (\mathbf{W})_{ii}\delta_{ij}$

行列の転置　$\mathbf{A}(m\times n)\to {}^t\mathbf{A}(n\times m)$

$$\mathbf{A}(\quad\times\quad)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}\ \to\ {}^t\mathbf{A}(\quad\times\quad)=\begin{pmatrix}1 & \\ 0 & \\ & \end{pmatrix}$$

のように行と列を入れ換える操作を転置という。　${}^t\mathbf{A}$ を $\mathbf{A}$ の転置行列という。

他の表現として、${}^t\mathbf{A}$ の代わりに $\mathbf{A}'$ もよく使われる。

成分表示：$({}^t\mathbf{A})_{ij}=(\mathbf{A})_{ji}$,

対称行列　${}^t\mathbf{A}(n\times n)=\mathbf{A}(n\times n)$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 0 & 2\\ 5 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

のように、行と列を入れ換えても変わらない行列

成分表示：$(\mathbf{A})_{12}=(\mathbf{A})_{21}$, $(\mathbf{A})_{23}=(\mathbf{A})_{32}$　　一般には、$(\mathbf{A})_{ij}=(\mathbf{A})_{ji}$

演習

1） $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$ は何行何列の行列か。　　[　　行　　列]

2）上の行列の以下の成分は何か。　$(\mathbf{A})_{12}=$　$(\mathbf{A})_{22}=$　$(\mathbf{A})_{32}=$

3）以下の行列の転置行列を求めよ。（）も自分で付けること。

$$\mathbf{A}(3\times 2)=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}\qquad {}^t\mathbf{A}(\quad\times\quad)=$$

4）以下の行列 $\mathbf{A}$ は対称行列である。不足しているところを補え。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & [\quad] & 2\\ 4 & 3 & 5\\ [\quad] & [\quad] & 0\end{pmatrix}$$

2.2 行列の演算　【第５回】

2.2.1 行列の定数倍　$k\mathbf{A}(m\times n)$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad 2\mathbf{A}=\begin{pmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

成分表示：　$(k\mathbf{A})_{ij}=k(\mathbf{A})_{ij}$

2.2.2 行列の和と差　$\mathbf{A}(m\times n)+\mathbf{B}(m\times n)$

例１

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$ のとき、

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

成分表示：　$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij}=(\mathbf{A})_{ij}+(\mathbf{B})_{ij}$,　　$(\mathbf{A}-\mathbf{B})_{ij}=(\mathbf{A})_{ij}-(\mathbf{B})_{ij}$

例２

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

例３

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=$$

例４

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

演習

１） $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$

２） $2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

３） $3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$

４） $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

2.2.3 行列の積　$\mathbf{C}(m\times n)=\mathbf{A}(m\times p)\mathbf{B}(p\times n)$　【第６回】

例１

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\qquad \mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

単位行列　のとき

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AI}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\mathbf{IA}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=$$

行列 $\mathbf{I}$ は数字の 1 に相当することが分かる。（$a\times 1=1\times a=a$ ）

成分表示：$(\mathbf{AB})_{ij}=(\mathbf{A})_{i1}(\mathbf{B})_{1j}+(\mathbf{A})_{i2}(\mathbf{B})_{2j}+\cdots+(\mathbf{A})_{in}(\mathbf{B})_{nj}=\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{A})_{ik}(\mathbf{B})_{kj}$

例２

$$\mathbf{A}(2\times 3)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}(3\times 2)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

のとき

$$\mathbf{AB}(\quad\times\quad)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times 2+(-1)\times(-1)+0\times 1 & 1\times 0+(-1)\times 3+0\times 0\\ 0\times 2+3\times(-1)+2\times 1 & 0\times 0+3\times 3+2\times 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -1 & 9\end{pmatrix}$$

これよりパソコンを利用する。

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

一般に $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$

例３

$$\mathbf{C}(\quad\times\quad)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{D}(\quad\times\quad)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ のとき

$\mathbf{CD}=$

$\mathbf{DC}=$

演習

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$ のとき以下を求めよ。

計算できないときは「計算できない」と書くこと。

１） $\mathbf{AB}=$

２） $\mathbf{C}^2=\mathbf{CC}=$

３） $\mathbf{BC}=$

４） $\mathbf{ACB}=$

2.3 行列の性質と演算　【第７回】

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$,　$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,　$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,　$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$　として計算する。

１）$\mathbf{IA}=\mathbf{AI}=\mathbf{A}$　（計算できるとき）

２）$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$　結合則

$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$　　　$\mathbf{A}(\mathbf{BC})=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

通常の数の $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ と同じ

行列の転置

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$,　${}^t\mathbf{A}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

３）${}^t(\mathbf{A}+\mathbf{B})={}^t\mathbf{A}+{}^t\mathbf{B}$

${}^t(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$　　　${}^t\mathbf{A}+{}^t\mathbf{B}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

４）${}^t(\mathbf{AB})={}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$

${}^t(\mathbf{AB})=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$　　　${}^t\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{B}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$　　　${}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

${}^t(\mathbf{ABC})=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$　　　${}^t\mathbf{C}\,{}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

行列のトレース　$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}\left(n\times n\right)$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 5 & 2 & -4\\ 8 & 1 & -2\end{pmatrix}$$ のとき　$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}=$

成分表示：$tr\mathbf{A}=(\mathbf{A})_{11}+(\mathbf{A})_{22}+\cdots+(\mathbf{A})_{nn}=\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{A})_{ii}$

５）$\mathrm{tr}(\mathbf{AB})=\mathrm{tr}(\mathbf{BA})$　計算できる場合

$\mathrm{tr}\left(\mathbf{AB}\right)=$　　　　$\mathrm{tr}\left(\mathbf{BA}\right)=$

$\mathrm{tr}\left(\mathbf{ABC}\right)=$　　　　$\mathrm{tr}\left(\mathbf{CBA}\right)=$　　　　$\mathrm{tr}\left(\mathbf{BCA}\right)=$

演習

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

のとき以下を求めよ。

１）$\mathbf{AB}-2\mathbf{B}=$

２）$\mathbf{CAB}=$

３）${}^{t}(\mathbf{CA})=$

４）$\mathrm{tr}(\mathbf{ABC})=$

2.4 行列の応用１【第８回】

連立方程式

例

$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \qquad \text{より、}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

上の連立方程式は　　　　　　　　　　　と書ける。

問題

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x - y &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

解　［解１組　$x =$　，$y =$　　・解なし・無数にある］

ただ１つの解を［持つ・持たない］

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 4y &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

解　［解１組　$x =$　，$y =$　　・解なし・無数にある］

ただ１つの解を［持つ・持たない］

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 4y &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

解　［解１組　$x =$　，$y =$　　・解なし・無数にある］

ただ１つの解を［持つ・持たない］

何が、ただ１つの解を持つか持たないかを決めているのか。
係数の行列について、$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ を計算してみる。

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ の場合　$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$

ただ１つの解を持つ

$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ の場合　$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$

ただ１つの解を持たない

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ が 0 であるかどうかが、ただ１つの解を持つかどうかを決める。
このような量 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ を行列式と言い、$|\mathbf{A}|$, $\det \mathbf{A}$ 等と書く。

$\mathbf{A}(100 \times 100) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 0 & -2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ の係数行列を持つ連立方程式がただ１つの解を持つかどうか判定してみよう。（行列計算 4(100×100).txt）

演習

１）以下の連立方程式を行列表示せよ。

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ 4x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

２）この係数行列から、行列式の値を求めよ。

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$

３）この値から上の連立方程式がただ１つの解を持つかどうか考えよ。

ただ１つの解を［持つ・持たない］

2.5 行列式【第９回】

例（2 行 2 列の場合）復習

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad |\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=$$

例（3 行 3 列の場合）

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad |\mathbf{A}|=aei+bfg+chd-ceg-bdi-ahf$$

行列式の成分表示もあるが、複雑なので省略

問題

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

として、以下の行列式の値を求めよ。（他は後の計算に使う）

１）$|\mathbf{A}|=$

２）$|\mathbf{B}|=$

2.6 行列式の性質

１）２つの行（列）を入れ換えると符号が変る。

$|\mathbf{C}|=$

２）１つの行（列）に共通因子があればくくり出せる。

$|\mathbf{D}|=$

３）２つの行（列）の各成分が比例するなら、行列式は 0。$|\mathbf{B}| =$

４）１つの行（列）の各成分の定数倍を他の行（列）に加え（引い）ても、行列式の値は変わらない。例えば、**E** は **A** の 2 列目から 1 列目を引いたもの

$|\mathbf{E}| =$

５）行列の 1 行（列）成分が (1,1) 成分を除いて全て 0 のとき、行列式は (1,1) 成分と残りの小行列の行列式との積になる。(１つの行または列がすべて 0 なら行列式は 0)

$$|\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

１）４）５）を組み合わせることでどんな大きさの行列式でも計算できる。

６）行列式の積の行列式はそれぞれの行列式の積に等しい。$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

$|\mathbf{A}| =$　　　　　　$|\mathbf{D}| =$　　　　　　$|\mathbf{AD}| =$

他に、$|{}^t\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|$　転置を取っても行列式は変わらない、等もある。

演習

以下の行列式の値を求めよ。

１）$|\mathbf{DA}| =$

２）$|\mathbf{A}+\mathbf{B}| =$　　　　注）一般に $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ ではない

３）$|\mathbf{ABCD}| =$

４）$|2\mathbf{A}| =$　　　　注）$2|\mathbf{A}|$ ではない

2.6 逆行列【第 10 回】

逆行列とは

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ のとき、行列$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$を考える。

$\mathbf{AB}=$ 　　　　　　　　　　　　　　$\mathbf{BA}=$

$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I}$ となる行列$\mathbf{B}$ を$\mathbf{A}^{-1}$ と書いて、$\mathbf{A}$ の逆行列と呼ぶ。
これは、普通の数の逆数と同じである。$a^{-1}=1/a$
逆行列をかけることは、割り算に等しい。

公式

$$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$$

2 行 2 列の場合、

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ のとき、$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

一般に、逆行列が存在するためには$|\mathbf{A}|\neq 0$ が必要

逆行列の計算

問題

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ のとき、　　$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{\quad}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

3 行 3 列以上の場合は複雑なので式は省略。パソコンを利用する。

例

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 　　のとき、

以下の値を求めよ。（分数表示）

１）$\mathbf{A}^{-1} =$

２）$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} =$

逆行列の性質

１）$\left(\mathbf{AB}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

証明

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)\left(\mathbf{AB}\right) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{IB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$$

同様に

$$\left(\mathbf{AB}\right)\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right) = \mathbf{I}$$

よって、$\left(\mathbf{AB}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

２）$\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \dfrac{1}{\left|\mathbf{A}\right|}$

証明

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right| &= \left|\mathbf{A}\right| \times \left|\mathbf{A}^{-1}\right| \\ &= \left|\mathbf{I}\right| = 1\end{aligned}$$

よって、$\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \dfrac{1}{\left|\mathbf{A}\right|}$

注）単位行列の行列式は 1

演習　以下を求めよ。（分数表示）

１）$\left(\mathbf{BC}\right)^{-1} =$

２）$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}^{-1} =$

一般に、$\left(\mathbf{BC}\right)^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \neq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}^{-1}$

３）$\left|\mathbf{B}\right| =$

４）$\left|\mathbf{B}^{-1}\right| =$

2.7 行列の応用２【第 11 回】

2.7.1 連立方程式の解

例

$$\begin{aligned} 2x+2y&=3 \\ x+3y&=4 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}} = \underset{\mathbf{b}}{\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}}$$

$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ の左から $\mathbf{A}^{-1}$ をかける。

左辺 $=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax}=$　　　　右辺 $=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$　　より、$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

これより、解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=$

これは、$ax=b$ の答えが、$x=b/a\ \left(=a^{-1}b\right)$ と類似している。

【検算】

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$　として、$\mathbf{Ax}=\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

公式

$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ の解は、$\left|\mathbf{A}\right|\neq 0$ の（逆行列がある）とき、$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

注）$\left|\mathbf{A}\right|=0$ の（逆行列がない）とき、解は上のように書けない（ただ１つの解を持たない。

問題

以下の連立方程式を行列で表し、ただ１つの解を持てば解を求めよ。

１）

$$\begin{aligned} 3x-y&=1 \\ x+2y&=5 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=$$

ただ１つの解を［持つ・持たない］

２）

$$\begin{matrix} 3x+6y=3 \\ x+2y=2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

ただ１つの解を［持つ・持たない］

３）

$$\begin{matrix} 2x_1+x_2-3x_3=3 \\ x_1-2x_2+2x_3=5 \\ 2x_1-5x_3=-2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

ただ１つの解を［持つ・持たない］

演習

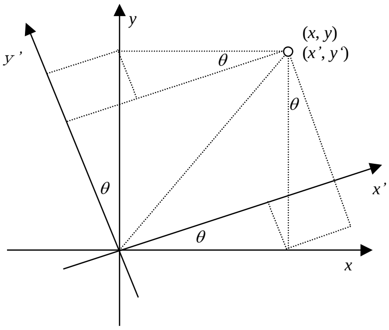
以下の連立方程式を行列で表し、解を求めよ。

$$\begin{matrix} x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=2 \\ x_1-x_2+3x_3-x_4=2 \\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4=4 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$$

ただ１つの解を［持つ・持たない］

2.7.2 座標の回転【第 12 回】



公式

座標を θ だけ回転させると点 (x, y) はどのような位置に動いたように見えるか。

$$x' = \cos\theta x + \sin\theta y \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$y' = -\sin\theta x + \cos\theta y$$

$\mathbf{x}' = \mathbf{U}\mathbf{x}$ （$\mathbf{U}$ を回転行列という）

例

$\mathbf{x}$ 座標を $\pi/3$ （60 度）回転させて $\mathbf{x}'$ にする。（$\mathbf{x}' = \mathbf{U}\mathbf{x}$）

１）回転行列 $\mathbf{U}$ を数式で表せ。

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ & \end{pmatrix}$$

２）回転行列 $\mathbf{U}$ を数値で表せ。

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

３）逆に $-\pi/3$ （-60 度）回転させた回転行列を求めよ。

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/3) & \sin(-\pi/3) \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ & \end{pmatrix} = {}^t\mathbf{U}$$

４）${}^t\mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1}$ であることを示せ。

$\mathbf{U}\,{}^t\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U}\mathbf{U} =$ 　　　　　　　　　　このような行列を直交行列という。

回転行列は直交行列である。

５）回転行列の行列式 $|\mathbf{U}|$ の値を求めよ。

$|\mathbf{U}| =$

６）回転行列の縦・横の成分を 2 乗して足すといくつになるか。

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \qquad u_{11}^2 + u_{12}^2 = u_{11}^2 + u_{21}^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta =$$

7）以下の$\mathbf{x}$ 座標の点は$\mathbf{x}'$ 座標ではどこに移るか。（$\mathbf{x}'=\mathbf{U}\mathbf{x}$）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

8）$\mathbf{x}'=\mathbf{U}\mathbf{x}$を逆に　$\mathbf{x}=$ の形で書くとどうなるか。

両辺に左から$\mathbf{U}^{-1}$ を掛けると

右辺　　　　　　　　　　　　　　　左辺

よって、

9）以下の$\mathbf{x}'$座標で与えられる点は$\mathbf{x}$ 座標のどこから来たか。（　　　　　　　　）

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

演習

$\mathbf{x}$座標を 45 度（$\pi/4$）回転させて$\mathbf{x}'$座標にする。（$\mathbf{x}'=\mathbf{U}\mathbf{x}$）

1）回転行列$\mathbf{U}$ を数式と数値で表せ。

数式　$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$　　　数値　$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

2）以下の$\mathbf{x}$ 座標の点は$\mathbf{x}'$ 座標ではどこに移るか。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

3）以下の$\mathbf{x}'$ 座標の点は$\mathbf{x}$ 座標のどこから来たか。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

2.7.3　楕円と双曲線【第 13 回】

$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ の数式で表される曲線は楕円（円を含む）か双曲線である。

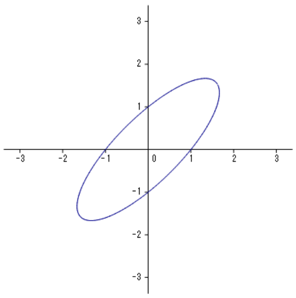
（但し $ax^2 = 1$ などの直線は除く）

例

楕円

$x^2 - 1.6xy + y^2 = 1$

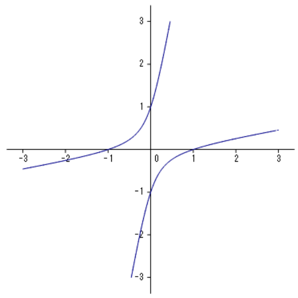
$a = 1,\quad b = -1.6,\quad c = 1$



双曲線

$x^2 - 6xy + y^2 = 1$

$a = 1,\quad b = -6,\quad c = 1$



方程式の行列表示

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax + b/2\,y \\ b/2\,x + cy \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + cy^2$$ より、

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$,　　$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　として、　${}^t\mathbf{xAx} = 1$　と表せる。

上の例は、

$x^2 - 1.6xy + y^2 = 1$　　　$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$

$x^2 - 6xy + y^2 = 1$　　　$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$

これらの式から楕円か双曲線かを見つける方法

→　行列 **A** の固有値というものを求める。

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{pmatrix}$ の対角化　mival(A)　　　　$\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

これより固有値は（　　　　　,　　　　　）

$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ の対角化　mival(B)　　　　$\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

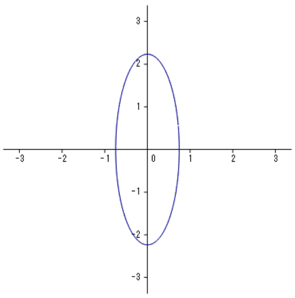
これより固有値は（　　　　　,　　　　　）

固有値が、正と正の場合　［楕円・双曲線］
正と負の場合　［楕円・双曲線］

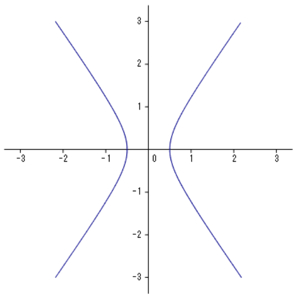
固有値を係数とした曲線は、元の曲線を<u>回転</u>したものとなる。
（回転によって xy 成分が消せる。どれだけ回転させたかも求めることができる。）

固有ベクトル

$1.8x^2+0.2y^2=1$



$4x^2-2y^2=1$



演習

１）以下の方程式を行列表示せよ。

$x^2+5xy+2y^2=1$　　　　$(\qquad\quad)\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}=1$

２）これは楕円であるか、双曲線であるか、固有値を求めて答えよ。

固有値は（　　　　　,　　　　　）　　　　［楕円・双曲線］

2.7.4　楕円と双曲線の拡張【第 14 回】

前回の演習で

１）以下の方程式を行列表示せよ。

$$x^2+5xy+2y^2=1 \qquad \left(\qquad\qquad\right)\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}=1$$

２）これは楕円であるか、双曲線であるか、固有値を求めて答えよ。

固有値は$\left(\lambda_1,\lambda_2\right)=$（　　　　　　　，　　　　　　　）　　　　［楕円・双曲線］

３）方程式をグラフに表せ。

４）回転後はどんな方程式になったか。

$$x'^2 \qquad\qquad y'^2=1$$

５）どれだけ回転させたか、回転行列$\mathbf{U}$（座標系の回転では${}^t\mathbf{U}$）を求めよ。

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \end{pmatrix}=\left(\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2\right)$$

この２つの縦の行列 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ を固有ベクトルという。固有ベクトルは、次の関係を満たす。$\mathbf{A}\mathbf{u}_1=\lambda_1\mathbf{u}_1$，$\mathbf{A}\mathbf{u}_2=\lambda_2\mathbf{u}_2$

３次元に拡張

１）以下の方程式を行列表示せよ。

$$x^2+y^2+2z^2-6xy-4yz=1 \qquad \left(\qquad\qquad\right)\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}=1$$

２）固有値を求めよ。

固有値は$\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right)=$（　　　　　　　，　　　　　　　，　　　　　　　）

３）方程式をグラフに表せ。

４）回転後はどんな方程式になったか。

$$x'^2 \qquad\qquad y'^2 \qquad\qquad z'^2 = 1$$

５）どれだけ回転させたか、回転行列 $\mathbf{U}$ （座標系の回転では ${}^t\mathbf{U}$ ）を求めよ。

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

3 次元の回転行列というものもある。

演習

１）以下の方程式を行列表示せよ。

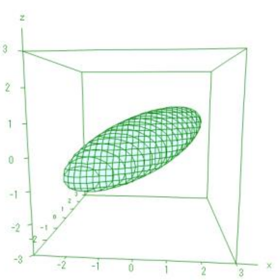
$$x^2 - 2y^2 - z^2 - 4xy - 2zx = 1 \qquad \left(\qquad\qquad \right) \begin{pmatrix} \qquad & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix} = 1$$

２）固有値を求めよ。

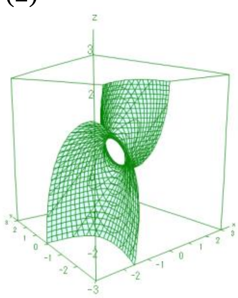
固有値は $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) =$ （　　　　　　,　　　　　　,　　　　　　）

３）方程式をグラフに表すとどれにあたるか。番号に○を付けよ。

(1)



(2)



(3)