３章　関数　【第１回】

3.1　関数とは

$$y=f(x),\ y=f(x_1,x_2),\ z=g(x,y)$$

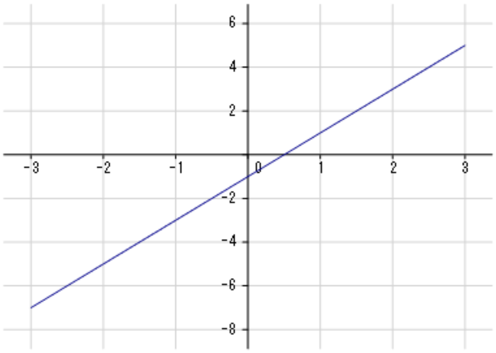
のように、いくつかの変数の値を与えたら１つの値が決まる対応関係のことである。

3.2　１次関数

$y=ax+b$

傾き：　a　　　y 軸との交点：$y=b$　　　x 軸との交点：$x=-b/a$

例１　$y=2x-1$　のグラフ

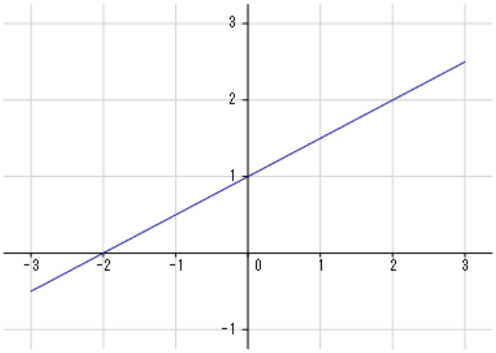


傾き

y 軸との交点

x 軸との交点

例２　$y=0.5x+1$　のグラフ



傾き

y 軸との交点

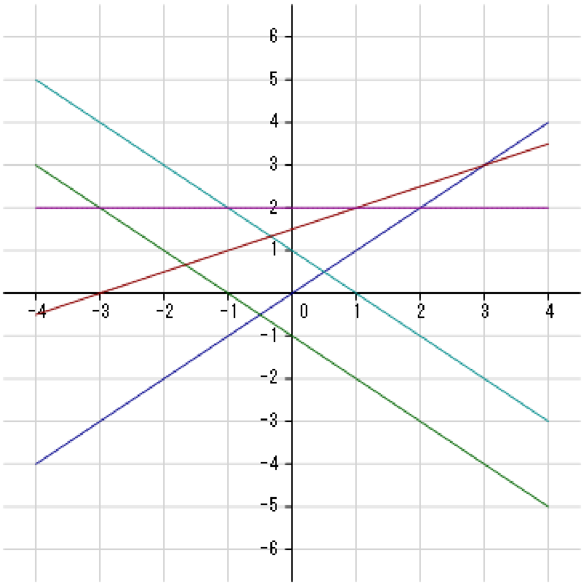
x 軸との交点

問題　以下のグラフを表示せよ。

1）$y = x$　　2）$y = -x - 1$

3）$y = -x + 1$　　4）$y = 0.5x + 1.5$

5）$y = 2$

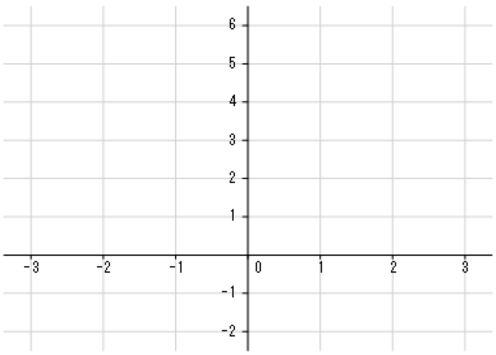


演習　$y = -x + 2$　のグラフについて以下を求め、グラフを描け。

傾き

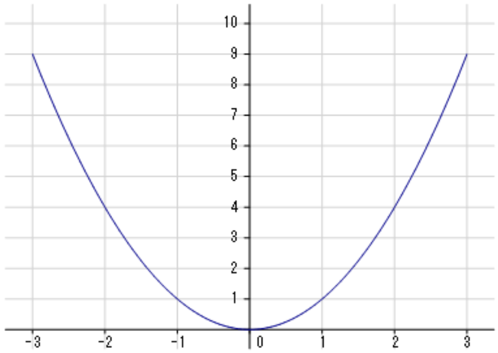
y 軸との交点

x 軸との交点



3.3　2次関数　【第２回】

例１　$y = x^2$　のグラフ

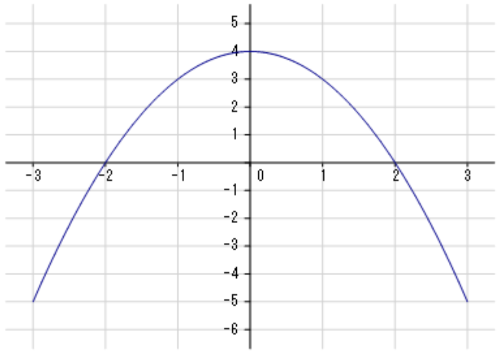


y 軸との交点

x 軸との交点

頂点（下に凸）

例２　$y = -x^2 + 4$　のグラフ

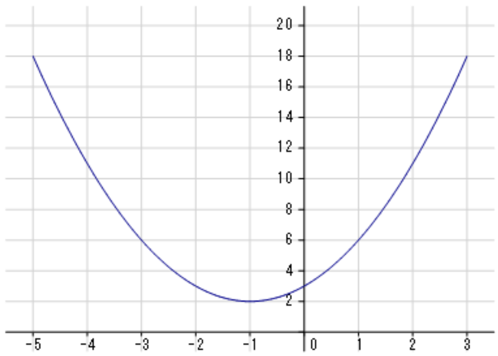


y 軸との交点

x 軸との交点

頂点（上に凸）

例３　$y = (x+1)^2 + 2$　のグラフ



y 軸との交点

x 軸との交点

頂点（下に凸）

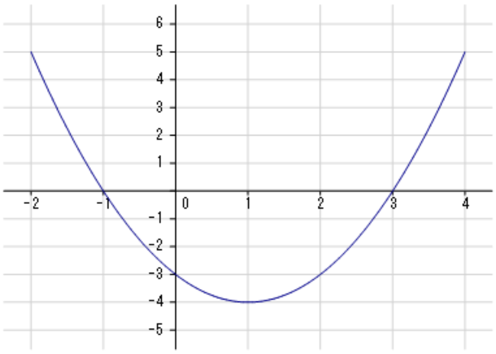
この形で書くと頂点が分かり易い。

例４　$y=x^2-2x-3$　のグラフ

y 軸との交点

x 軸との交点

頂点（下に凸）

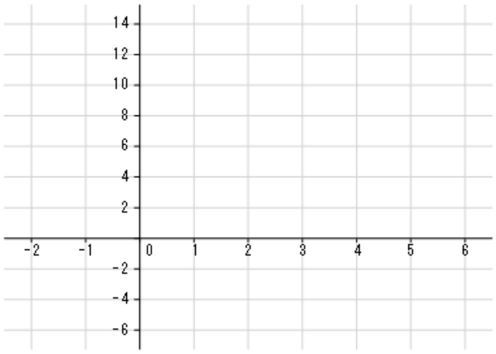


演習　$y=x^2-4x$　のグラフについて以下を求めよ。

y 軸との交点

x 軸との交点

頂点（下に凸）



公式　$y=ax^2+bx+c$　のグラフ

y 軸との交点

c

x 軸との交点　$ax^2+bx+c=0$　より（2 次方程式）、

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

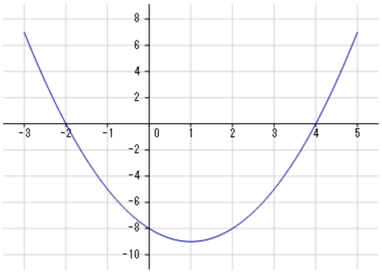
頂点（a$>$0　のとき下に凸，a$<$0　のとき上に凸）

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$　と変形して、$\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

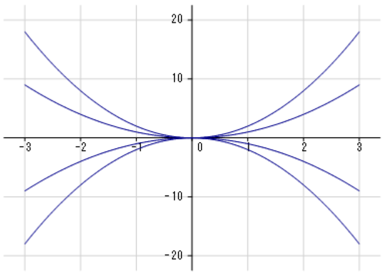
2.　2次関数のグラフの性質【第３回】

例１　$y=x^2-2x-8$ のグラフ

$y=(x-1)^2-9$ の形で書くと頂点がはっきりする。
$y=(x+2)(x-4)$ の形で書くと x 軸との交点がはっきりする。



例２　$y=ax^2$　（$y=2x^2$，$y=x^2$，$y=-x^2$，$y=-2x^2$）のグラフを比較する



グラフの移動

$y=f(x)\to y=f(x-a)$　　横に a 移動する
$y=f(x)\to y-a=f(x)$ ［$y=f(x)+a$］　　縦に a 移動する

例

１） $y=x^2+3x-2\to y=(x-4)^2+3(x-4)-2$　　［横・縦］に［　　　］移動
２） $y=2^x\sin x\to y=2^{x+1}\sin(x+1)$　　［横・縦］に［　　］移動
３） $y=2x\cos x\to y=$　　横に 1 移動
４） $y=x^2+x+1\to y=$　　縦に 5 移動

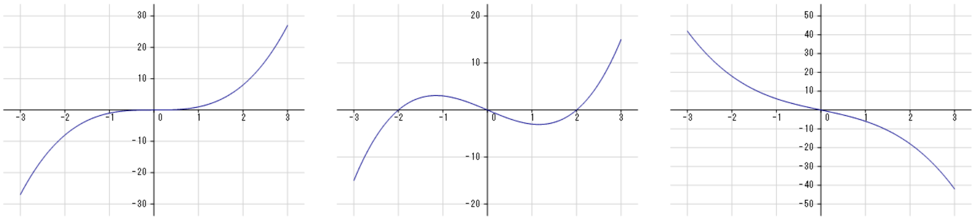
3.3　３次関数と４次関数

一般に、n　次関数

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

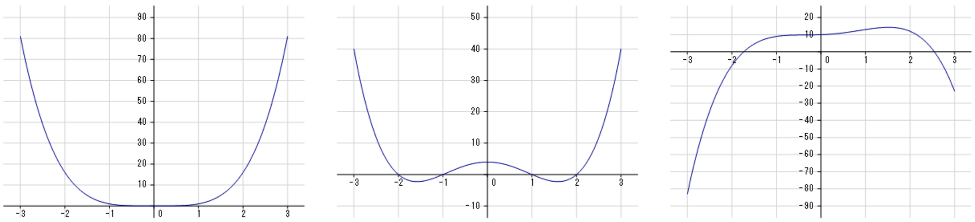
いろいろな３次関数

例　$y = x^3$,　$y = x(x-2)(x+2)$,　$y = -x(x^2+5)$



いろいろな４次関数

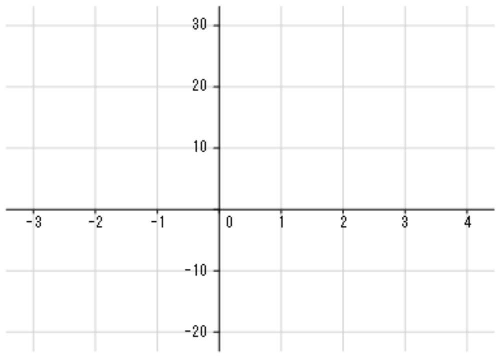
例　$y = x^4$,　$y = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$,　$y = -x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 10$



演習

１）$y = x^2 + x \to y = (x-2)^2 + (x-2)$　　　［横・縦］に［　　　］移動

２）$y = -(x+2)(x-1)(x-3)$　の概形を描け。



y 軸との交点を求めよ。

$x = 0$ とおいて、

$y =$

x 軸との交点を３つ求めよ。

$y = 0$ とおいて、（または図から）

$x =$　　　,　　　,

3.4　指数関数　【第４回】

1.　指数の性質

	公式
１）$2^1\times2^2=2\times4=8=2^3$	
$2^2\times2^3=4\times8=32=2^5$	$a^m\times a^n=a^{m+n}$
２）$2^0\times2^3=2^{0+3}=2^3$　より、$2^0=1$	$a^0=1$
３）$2^3\times2^{-3}=2^{3-3}=2^0=1$　より、$2^{-3}=1/2^3$	$a^{-n}=1/a^n$
４）$(2\times3)^3=2^3\times3^3$	$(ab)^m=a^mb^m$
５）$(2/3)^3=2^3/3^3$	$(a/b)^m=a^m/b^m$
６）$(2^2)^3=2^2\times2^2\times2^2=2^{2+2+2}=2^{2\times3}$	$(a^m)^n=a^{m\times n}$
７）$2^{0.5}\times2^{0.5}=2^1=2$　より、$2^{0.5}=\sqrt{2}$	$a^{0.5}=\sqrt{a}$

問題１

以下の値を求めよ。

１）$3^2=$　　　　２）$2^{-1}=$

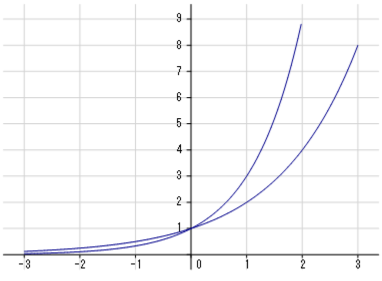
３）$9^{0.5}=$　　　　４）$0.678^0=$

５）$2^2\times2^{-3}=$　　　　６）$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=$

2.　指数関数のグラフ

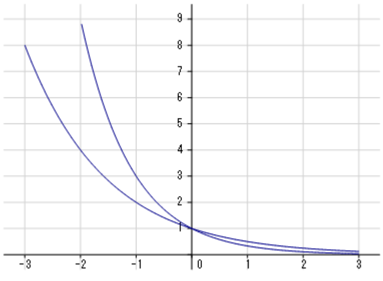
例　$y=a^x$

$y=2^x$，　$y=3^x$　のグラフ



$a>1$のときは右上がり

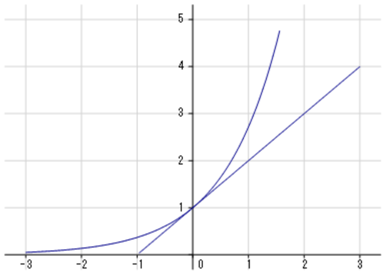
$y=(1/2)^x$，　$y=(1/3)^x$　のグラフ



$(0<)a<1$のときは右下がり

重要な式と値

$y = e^x$ （ネーピアの数 $e = 2.71828\cdots$）



特徴　$x = 0$ での接線の傾きが１　（接線の式は $y = x + 1$）

問題２　グラフと接線

以下のグラフを描いて、$x = 0$ での接線の式を求めよ。

$y = 2^x$　　　　　　　　接線の式　$y =$

演習１　以下の値を求めよ。

１）$4^2 =$　　　　　　　　２）$5^{-1} =$

３）$16^{0.5} =$　　　　　　　　４）$5.239^0 =$

演習２　以下のグラフは右上がりか、右下がりか。

１）$y = 4^x$　　　　右［上がり・下がり］

２）$y = 0.2^x$　　　　右［上がり・下がり］

３）$y = 4^{-x} = (1/4)^x$　　　　右［上がり・下がり］

４）$y = 1.5^{x-1} - 2$　　　　右［上がり・下がり］

3.5　対数関数　【第５回】

1.　対数の性質

１）$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$　　注）$\log_a x$ の a を対数の底と呼ぶ

$3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$　　**公式**

$a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$　　$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

２）$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$　　$\log_a a = 1$

３）$a^y = x^n \Leftrightarrow \log_a x^n = y \quad a^{y/n} = x \Leftrightarrow \log_a x = y/n$

$\therefore y = \log_a x^n = n\log_a x$　　$\log_a x^n = n\log_a x$

４）$x = a^p \Leftrightarrow p = \log_a x,\quad y = a^q \Leftrightarrow q = \log_a y$

$\log_a xy = \log_a a^p a^q = \log_a a^{p+q}$

$= (p+q)\log_a a = p + q = \log_a x + \log_a y$　　$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

５）$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x,\quad \therefore a^{\log_a x} = x$　　$a^{\log_a x} = x$

６）$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \times \log_b a$

$\therefore \log_a x = \log_b x / \log_b a$　　$\log_a x = \log_b x / \log_b a$　重要

問題

１）$\log_3 9 =$　　２）$\log_{10} 1000 =$

３）$\log_2 1/16 = \log_2 2^{-4} =$

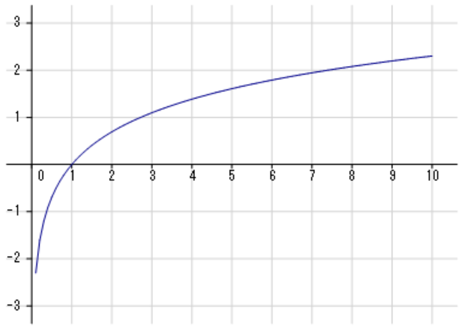
４）$\log_e 5 =$　　（自然対数　log( ) 関数）

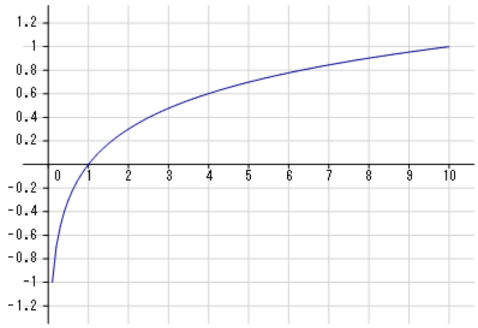
５）$\log_{10} 5 =$　　（常用対数　log10( ) 関数）

６）$\log_2 5 = \log_e 5 / \log_e 2 =$　　公式６）利用

2.　対数関数のグラフ

自然対数　$y = \log_e x$ のグラフ　　　　　　常用対数　$y = \log_{10} x$　のグラフ





演習１

１）$\log_5 25 =$

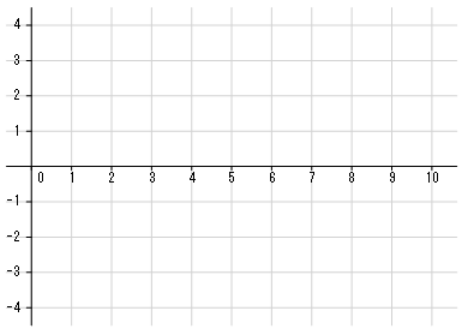
２）$\log_3 1/3 = \log_3 3^{-1} =$

３）$\log_e 10 =$　　　　　　　　　　　（log( ) 関数）

４）$\log_{10} 1234 =$　　　　　　　　　（log10( ) 関数）

演習２

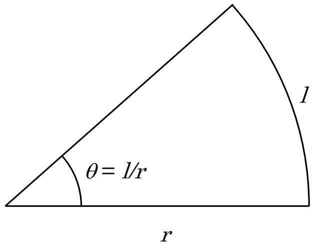
$y = \log_2 x$　$(= \log_e x / \log_e 2)$　のグラフを描け。

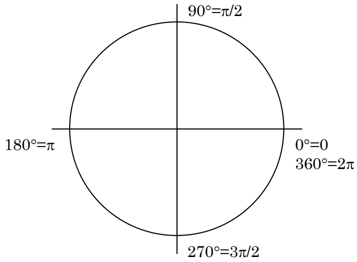


注）$x = 1, 2, 4, 8$　のグラフの位置に気を付けること（例：$\log_2 8 = 3$ など整数）

3.6　三角関数　【第６回】

角度の単位





<u>ラジアン</u>による角度表現

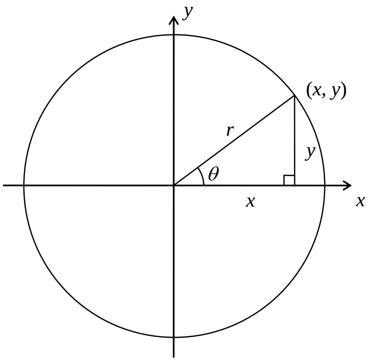
$$360^\circ = 2\pi, \quad 180^\circ = \qquad\quad , 90^\circ =$$
$$30^\circ = \pi/6, \quad 45^\circ = \qquad\quad , 60^\circ =$$

重要

三角関数とは

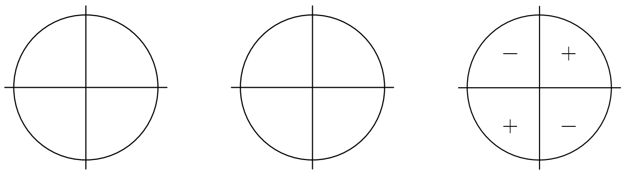
$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \ \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{y/r}{x/r} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

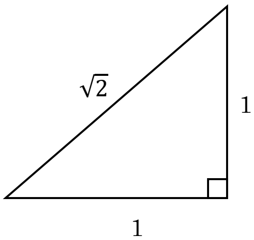


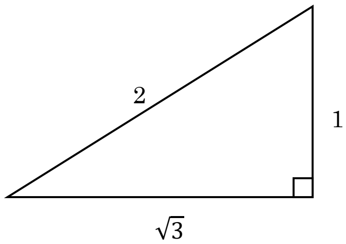
三角関数と符号

$\sin\theta$　　　$\cos\theta$　　　$\tan\theta$



必ず覚えておく値





問題

１） $\sin 30^\circ =$　　２） $\sin 45^\circ =$　　３） $\sin 60^\circ =$

４） $\cos 30^\circ =$　　５） $\cos 45^\circ =$　　６） $\cos 60^\circ =$

以後はパソコンを使って

７） $\sin \pi/3 =$　　８） $\cos 3\pi/4 =$

特に重要な三角関数の角度の関係

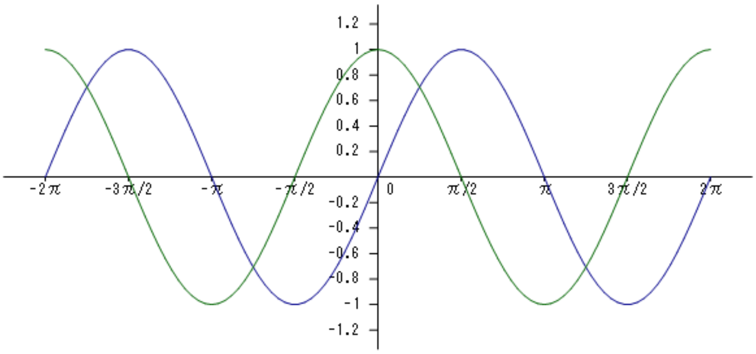
$$\sin(\pi/2-\theta)=\cos\theta \qquad \cos(\pi/2-\theta)=\sin\theta$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

三角関数のグラフ

$y=\sin x$ と $y=\cos x$ を正弦波と呼ぶ。

２つは、形は同じでずれているだけ（位相が違うという）



演習　以下の値を求めよ。

１） $\sin \pi/6 =$　　２） $\cos \pi/4 =$

３） $\sin 2\pi/3 =$　　４） $\cos 5\pi/3 =$

５） $\tan \pi/4 =$　　６） $\tan(-4\pi/3) =$

三角関数の応用（幾何アニメーション）　【第７回】

例１　三角関数とバネ

```
define y=sin(0)
connect (0, 3)-(0, y), red, 1
ball (0, y), 0.3, blue
```

問題

１）２行目の最後の１を５に変えて、ひもをバネにせよ。

２）１行目の sin(0) を sin(time) に変えて、バネを動かせ。

３）バネの速さを２倍にせよ。

例２　三角関数と円運動

```
define x=cos(time)
define y=sin(time)
ball (x, y), 0.3, blue
```

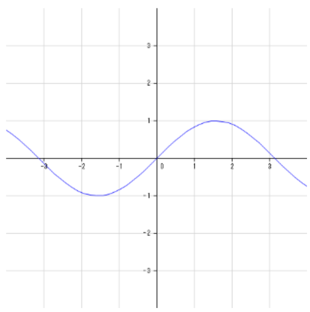
問題

１）円運動の半径を２倍にせよ。

２）円運動の速さを２倍にせよ。

例３　三角関数の移動

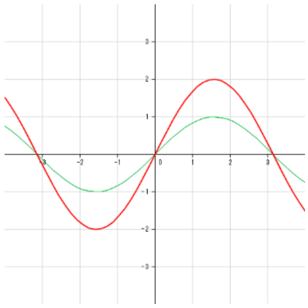
```
axis
func y=sin(x-time), blue
```



問題

１）波を左向きに動かせ。

例４　三角関数の重ね合わせ



```
axis
define y1=sin(x-time)
define y2=sin(x)
func y1, blue
func y2, green
func y1+y2, red, 2
```

問題

１）３行目の y2=sin(x) を y2=2*sin(x) にして、足した波の波形を調べよ。

２）３行目の y2=sin(x) を y2=sin(x+time) にして、足した波の波形を調べよ。

位相（角度）のずれた正弦波（sin 関数）を足しても正弦波

同じ波が左右からぶつかると定常波（ギターの弦など）

演習　波長の違う波の重ね合わせ

例４で、３行目の y2=sin(x) を y2=sin(2*x) にしても（波長をかえても）、足した波の形は正弦波（sin 関数）になるか。どちらか○を付けよ。

<u>注）例４の形に戻してから変更すること。</u>

［正弦波になる・正弦波にならない］

４章　極限　【第８回】

4.1　無限大に関する極限

例

１）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=$

２）$\displaystyle\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n}=$

３）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=$

４）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=$

５）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n}=$

６）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n+a}=$

７）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=$

８）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=$

９）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=$

10）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n-1}=$

11）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1}=$

12）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{3n^2-2n-1}=$

13）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=$

14）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{-n^3+1}=$

15）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}=$

16）$\displaystyle\lim_{n\to-\infty}\frac{n^2}{n+1}=$

直感的方法

分母の次数＝分子の次数　のとき、分母分子の最大次数の項の係数に注目

分母の次数＞分子の次数　のとき、極限は 0

分母の次数＜分子の次数　のとき、極限は ±∞

4.2　定数の極限

例

1）$\lim_{x \to 0} x =$　　　　2）$\lim_{x \to 1} x^2 =$

3）$\lim_{x \to 0} \left(x^2 + 2x + 3 \right) =$　　　　4）$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x+2} =$

5）$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2 + x} =$　　　　6）$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x}{2x^2 - 3x} =$

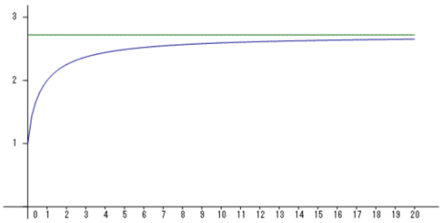
7）$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$

5）～7）通分できる場合は、先にやっておく。

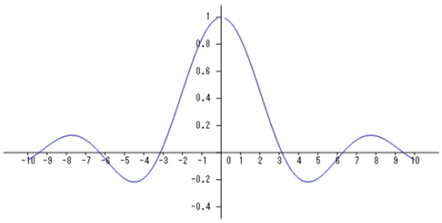
覚えておく例

1）$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$

（e=2.71828…ネーピア(Napier)の数）



2）$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$　　　　$\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{x} = a \right)$



演習

1）$\lim_{n \to \infty} \frac{100}{n} =$　　　　2）$\lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{3n+1} =$

3）$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - n + 1}{n + 2} =$　　　　4）$\lim_{x \to 0} \left(x^2 + 3x + 4 \right) =$

５章　微分　【第９回】

5.1 微分とは

$y=f(x)$ のとき

$\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 　を関数 $y=f(x)$ の x における微分という。

微分は点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きを表す。

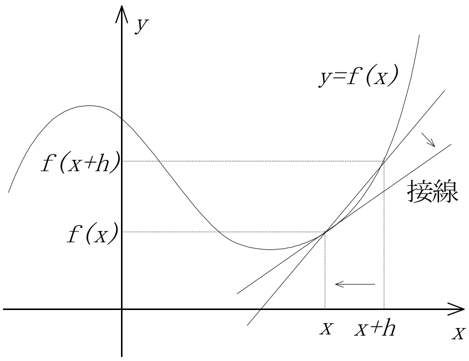


図　接線の傾きと微分

微分の他の表現法

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=y'=f'(x)$$

微分の例

$y=f(x)=1$ 　　$\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=0$

$y=f(x)=x$ 　　$\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1$

$y=f(x)=x^2$ 　　$\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2xh+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$

$y=f(x)=x^3$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)=3x^2$$

公式

$$y = f(x) = x^n \quad \text{のとき、} \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

問題　以下の関数の x における微分を求めよ。

１）$y = 2 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} =$

２）$y = x^5 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} =$

３）$y = x^{20} \quad \to \quad \frac{dy}{dx} =$

４）$y = x^{-3} \quad \to \quad \frac{dy}{dx} =$

５）$y = \frac{1}{x} = \qquad\qquad \to \quad \frac{dy}{dx} =$

６）$y = \sqrt{x} = \qquad\qquad \to \quad \frac{dy}{dx} =$

７）$y = \sqrt{x^3} = \qquad\qquad \to \quad \frac{dy}{dx} =$

演習　以下の関数の x における微分を求めよ。

１）$y = -1 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} =$

２）$y = x^7 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} =$

３）$y = x^{15} \quad \to \quad \frac{dy}{dx} =$

４）$y = x^{-4} \quad \to \quad \frac{dy}{dx} =$

５）$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \quad \to \quad \frac{dy}{dx} =$

5.2　算術関数の微分　【第 10 回】

公式　重要

$$y=\mathrm{c}\rightarrow\frac{dy}{dx}=0 \qquad y=x^{n}\rightarrow\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

$$y=e^{x}\rightarrow\frac{dy}{dx}=e^{x} \qquad y=\log_{e}x\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$y=\sin x\rightarrow\frac{dy}{dx}=\cos x \qquad y=\cos x\rightarrow\frac{dy}{dx}=-\sin x$$

$$y=\tan x\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{cos^{2}x}$$

解説

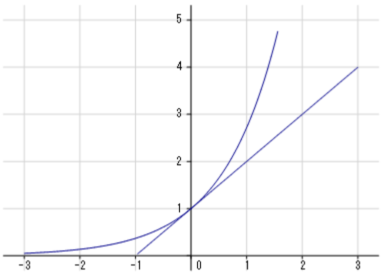
a）$y=e^{x}$ の原点での接線の傾きを表す公式

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}=1$$

（$y=e^{x}$ のグラフでは $x=0$ で接線の傾きが 1）

これを使うと、

$$\frac{d}{dx}e^{x}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^{x}}{h}=e^{x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}=e^{x}\times 1=e^{x}$$



b) $$\frac{d}{dx}\sin x=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}=\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\cos x$$

注）半角の公式

$$\sin^{2}(x/2)=\frac{1-\cos x}{2}$$

5.3　関数の定数倍と和の微分

公式

$$y = af(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = af'(x)$$

$$y = f(x) + g(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)$$

問題

１）　$y = ax + b \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} =$

２）　$y = 2x^2 - 3x + 1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} =$

３）　$y = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} =$

４）　$y = 2x^4 - 2x^3 - 3x + 4 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} =$

５）　$y = \sin x - \cos x \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} =$

６）　$y = e^x + \log_e x \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} =$

７）　$y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x} =$ $\qquad\qquad\qquad \rightarrow \dfrac{dy}{dx} =$

演習

１）　$y = 3x^4 + 5x \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} =$

２）　$y = 2\sin x + \cos x \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} =$

３）　$y = e^x + 2\log_e x \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} =$

４）　$y = 3x^2 - \sin x + e^x \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} =$

5.4　関数の積と商の微分　【第 11 回】

公式

$$y = f(x)g(x) \to \frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

証明（掛け算）

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left\{f(x+h) - f(x)\right\}g(x+h) + f(x)\left\{g(x+h) - g(x)\right\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

問題

１） $y = xe^x \quad \to$

２） $y = x^3\left(x^2 + 1\right) \quad \to$

３） $y = e^x \sin x \quad \to$

４） $y = x^2 \log_e x \quad \to$

５） $y = f(x)g(x)h(x) \quad \to$

６） $y = \dfrac{x}{x+1} \quad \to$

７） $y=\dfrac{e^x}{x} \quad \to$

８） $y=\dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \to$

注） $\mathrm{y}=e^x\cos x \to y'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)$　　括弧を忘れないこと。

公式

$y=\mathrm{c}\to y'=0$

$y=x^n \to y'=nx^{n-1}$

$y=e^x \to y'=e^x$

$y=\log_e x \to y'=1/x$

$y=\sin x \to y'=\cos x$

$y=\cos x \to y'=-\sin x$

$y=\tan x \to y'=1/cos^2 x$

$y=af(x)\to y'=af'(x)$

$y=f(x)\pm g(x)$

$\to y'=f'(x)\pm g'(x)$

$y=f(x)g(x)$

$\to y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$y=f(x)/g(x)$

$\to y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

演習

１） $y=x^2e^x \quad \to$

２） $y=\log_e x\sin x \quad \to$

３） $y=\dfrac{\sin x}{x+1} \quad \to$

5.5　汎関数の微分【第 12 回】

汎関数とは、 $y = f(g(x))$ の形になっているもの

$z = g(x),\quad y = f(z)$ とおいて処理する。

例

$y = (x^2 + x + 1)^5 \qquad z = x^2 + x + 1,\quad y = z^5$

$y = e^{x^2} \qquad z = x^2,\quad y = e^z$

公式

$y = f(g(x))$ の微分

$z = g(x)$，$y = f(z)$ として $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} \times \dfrac{dy}{dz}$ （最後に z は元に戻す。）

例１

$y = (x^2 + x + 1)^5 \qquad z = x^2 + x + 1,\quad y = z^5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dz} = (2x+1) \times 5z^4$$

$$= (2x+1) \times 5(x^2 + x + 1)^4 = 5(2x+1)(x^2 + x + 1)^4$$

例２

$y = e^{x^2} \qquad z = x^2,\quad y = e^z$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dz} = 2x \times e^z$$

$$= 2x \times e^{x^2} = 2xe^{x^2}$$

問題

１） $y = (2x+1)^3 \qquad z = \qquad\qquad ,\quad y =$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dz} =$$

２） $y=\sin(x^2+1)$　　　　$z=$　　　　　　　　，　$y=$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}=$$

３） $y=x^2e^{3x}$　　　（**複合問題**）

$y=x^2u$　とすると掛け算の公式から、$y'=$

$u=e^{3x}$　とすると　　　$z=$　　　　　　　，　$u=$

$$u'=\frac{du}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{du}{dz}=$$

組み合わせると

$y'=$

演習

$y=(x^2+3x+1)^4$　　　　$z=$　　　　　　　　　　，　$y=$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}=$$

微分公式まとめ

$y=\mathrm{c}\to y'=0$

$y=x^n\to y'=nx^{n-1}$

$y=e^x\to y'=e^x$

$y=\log_e x\to y'=1/x$

$y=\sin x\to y'=\cos x$

$y=\cos x\to y'=-\sin x$

$y=\tan x\to y'=1/\cos^2 x$

$y=af(x)\to y'=af'(x)$

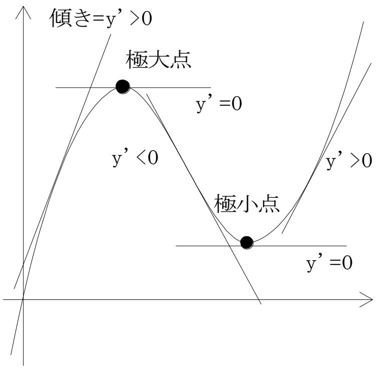
$y=f(x)\pm g(x)$
$\to y'=f'(x)\pm g'(x)$

$y=f(x)g(x)$
$\to y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$y=f(x)/g(x)$
$$\to y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$y=f(g(x))$
$z=g(x)$，　$y=f(z)$　とおいて
$$\to y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}$$

5.6　微分と極値　【第 13 回】



関数の増加、減少は接線の傾き、即ち微分の符号で分かる。

極大点・極小点の y 座標の値を極大値・極小値（総称：極値）という。

例１　$y=x^2-2x-3$　の極値を求めよ。

微分を求める。

$y'=2x-2=2(x-1)$

極値を求める。

$y'=2x-2=2\left(x-1\right)=0$　を解く。

$x=$　　　これを y の式に代入して、 $y=$

関数増減表

x			
y'			
y			

極値

(　　　,　　　) ［極大・極小・停留点］

パソコンを利用する

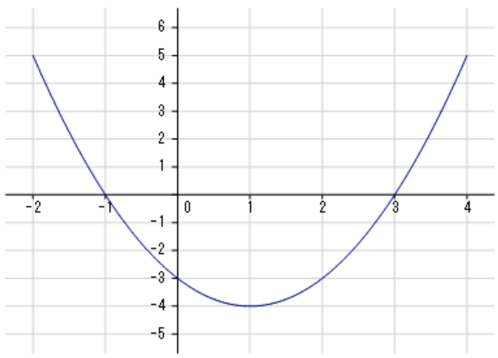
y 軸との交点　　　$y=$

x 軸との交点　　　$x=$

極値

(　　　,　　　) ［極大・極小・停留点］

グラフの概形



例２　$y=x^3-6x^2+9x$ の極値とグラフを求めよ。

パソコンを利用する。

y 軸との交点　　　$y=$

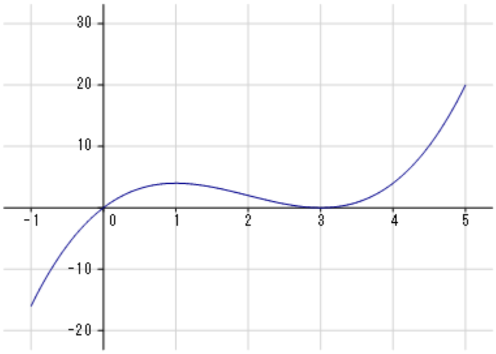
x 軸との交点　　　$x=$

極値

(　　　,　　　)［極大・極小・停留点］

(　　　,　　　)［極大・極小・停留点］

グラフの概形



例３　$y=x^3$ の極値とグラフを求めよ。

パソコンを利用する。

y 軸との交点　　　$y=$

x 軸との交点　　　$x=$

極値

(　　　,　　　)［極大・極小・停留点］

グラフの概形

演習　$y=-x^2-3x+4$ の極値とグラフを求めよ。

パソコンを利用する。

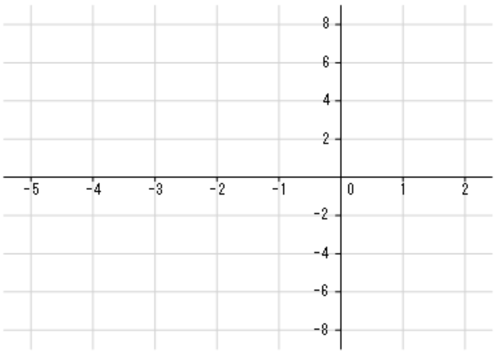
y 軸との交点　　　$y=$

x 軸との交点　　　$x=$

極値

(　　　,　　　)［極大・極小・停留点］

グラフの概形



5.7　2階微分と変曲点【第14回】

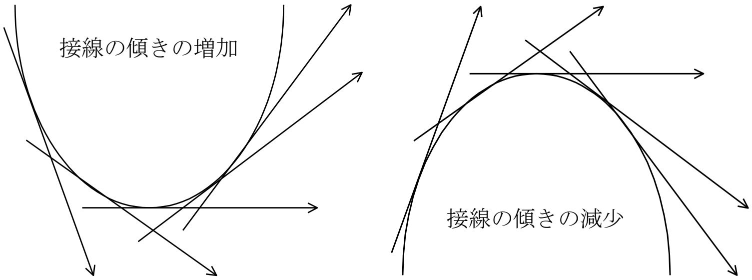
２階微分とは

$$1\text{階微分}：\ y = x^3 + 3x^2 - 9x - 4 \ \to\ \frac{dy}{dx} = y' = 3x^2 + 6x - 9$$

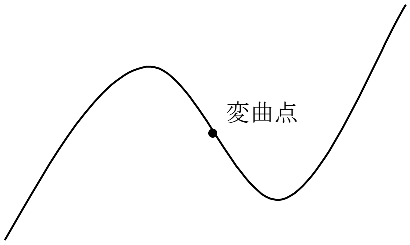
$$2\text{階微分}：\ \frac{dy}{dx} = y' = 3x^2 + 6x - 9 \ \to\ \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = 6x + 6$$

２階微分と変曲点の意味

変曲点とは、関数の曲線の凸の向きが変化する点。



$y'' > 0$　　　　$y'' < 0$



変曲点では　$y'' = 0$

例　$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 4$ 以下の関数の変曲点を求める

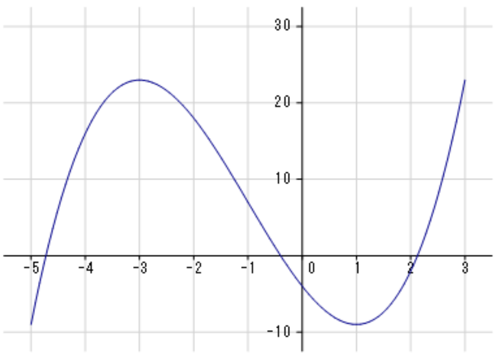
$\to\ y' = 3x^2 + 6x - 9\ \ \to\ y'' = 6x + 6$

$y'' = 6x + 6 = 0\quad \therefore\ x = -1$

$x = -1$　のとき　$y = 7$　　　変曲点　$(-1,7)$

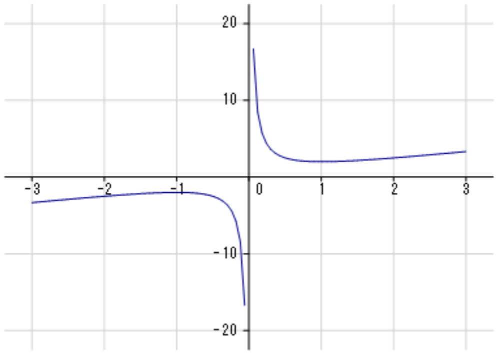
パソコンの利用

変曲点(　　　　,　　　　)



一般的なグラフ

例１　$y = x + \dfrac{1}{x}$　のグラフを描き極値を求めよ。



y 軸との交点　　　$y =$

x 軸との交点　　　$x =$

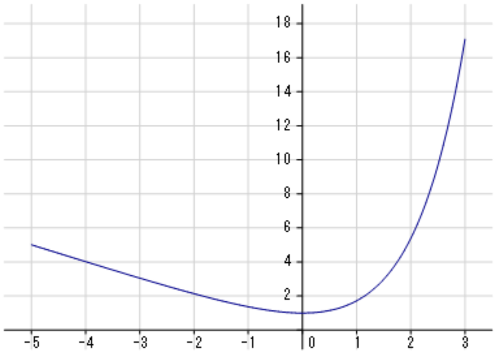
極値

(　　　　,　　　　)［極大・極小］

(　　　　,　　　　)［極大・極小］

グラフの概形

例２　$y = e^{x} - x$　のグラフを描き、極値を求めよ。



y 軸との交点　　　$y =$

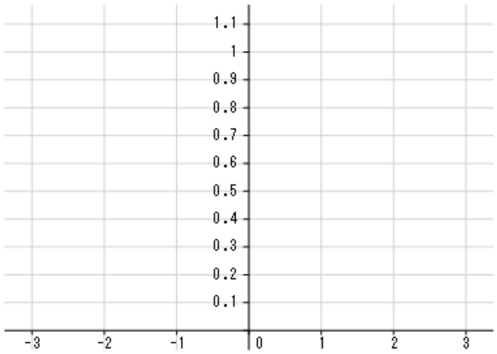
x 軸との交点　　　$x =$

極値

(　　　　,　　　　)［極大・極小］

グラフの概形

演習　$y = e^{-x^2}$　のグラフを描き、極値と変曲点を求めよ。



y 軸との交点　　　$y =$

x 軸との交点　　　$x =$

極値

(　　　　,　　　　)［極大・極小］

変曲点

(　　　　,　　　　)

(　　　　,　　　　)

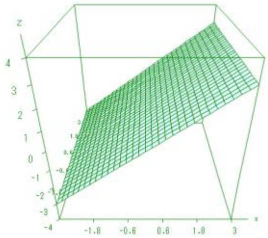
グラフの概形

3.7　２変数関数　【第７回】

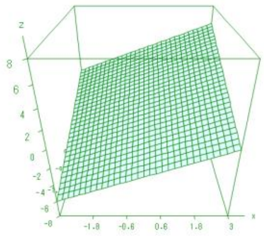
［分析－数学－グラフ－2 変数関数グラフ］を利用する。

例

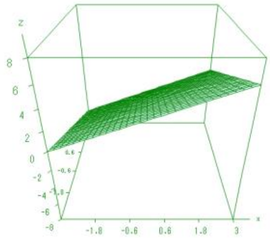
［z=］ x



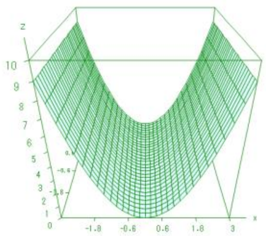
［z=］ x+y



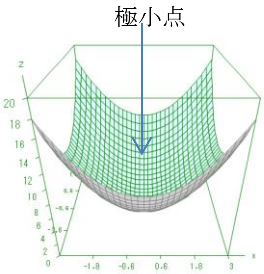
［z=］ ？



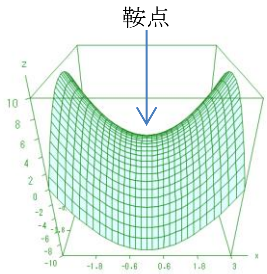
［z=］ x^2



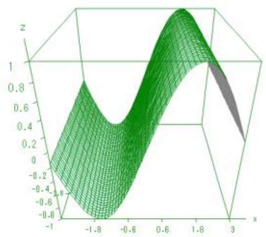
［z=］ x^2+y^2



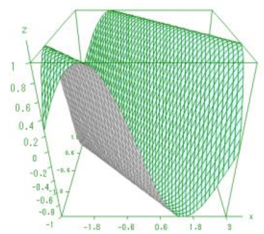
［z=］ ？



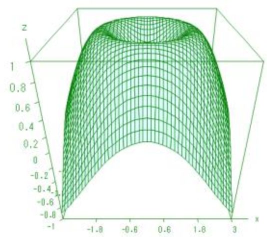
［z=］ sin(x)



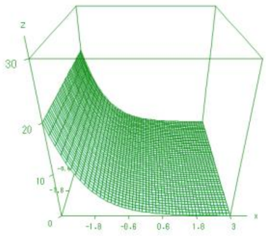
［z=］ sin(？)

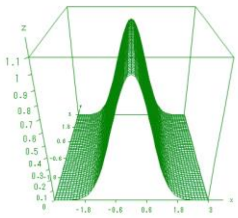


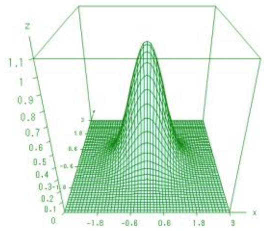
［z=］ sin((x^2+y^2)^0.5)



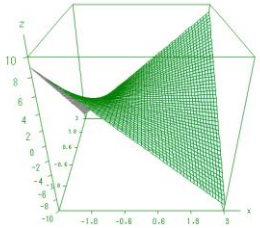
[z=] exp(−x)　　　　　　[z=] exp(−xˆ2)　　　　　　[z=] exp(？)

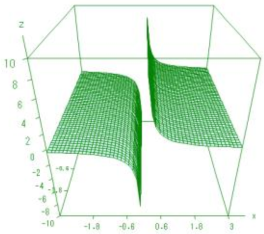


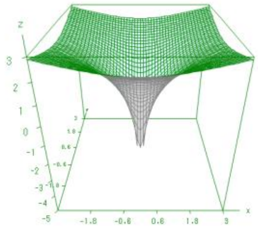




[z=] x ？ y　　　　　　[z=] ？　　　　　　[z=] ？(xˆ2+yˆ2)







演習　３次元幾何アニメーション

```
range −6， 6
define r=(xˆ2+yˆ2)ˆ0.5
func z=sin(r [          ])， cyan， −10， −10， 10， 10
```

これに時間（time）をうまく入れて、波が中心から周りに伝わるようにせよ。
よく分かる人は波のスピードも適当に設定してね。

3.8 パラメータ関数　【第９回】

$y=f(x)$ の形で円は描けるか。

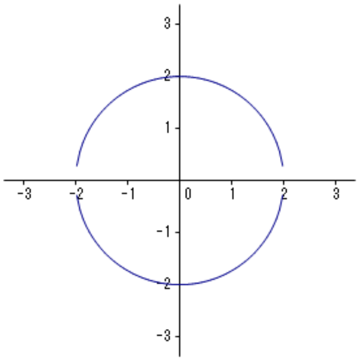
$y^2=4-x^2$ として、　$y=\pm\sqrt{4-x^2}$

$x^2+y^2=4$　　　　　陰関数形式

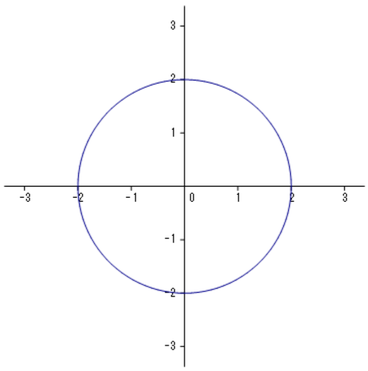
問題点

± の記号が入り、１つの式では表せない。（数学上の問題点）

また実際に図を描こうとすると、立ち上がりの部分が難しい。



さらに、例えば、渦巻きなどはどうやって描くのか？



答　２次元パラメータ関数を使う。

［　］内は書かない。

例１　円（含楕円）

[x=] 2*cos(u)

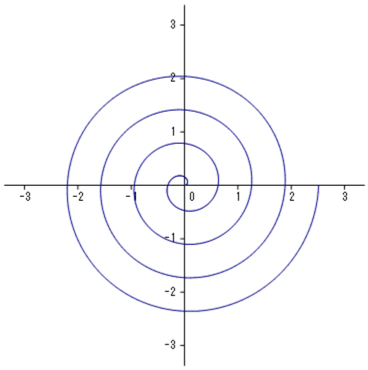
[y=] 2*sin(u)

例２　渦巻き

u 変数 0～8*pi、u 分割数を 500 にする。

[x=] u/10*cos(u)

[y=] u/10*sin(u)

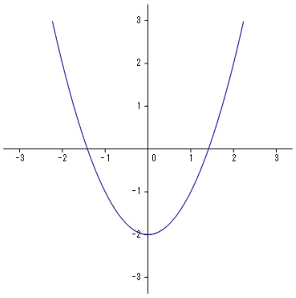


例３　普通の２次関数

u 変数 -3 ～ 3、u 分割数を 100 に戻す。

[x=] u

[y=] u^2-2

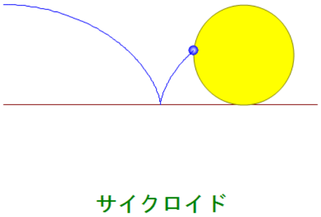


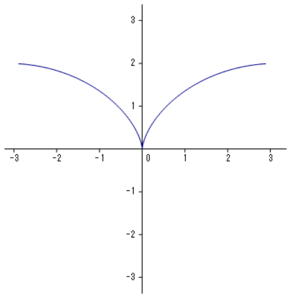
例４　サイクロイド

u 変数 0 ～ 2*pi

[x=] u+sin(u)-pi

[y=] 1+cos(u)



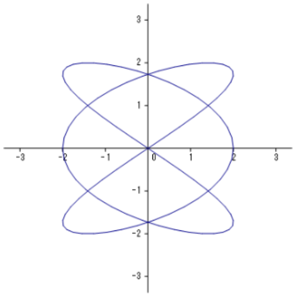


例５　リサージュ図形

u 変数 0 ～ 2*pi

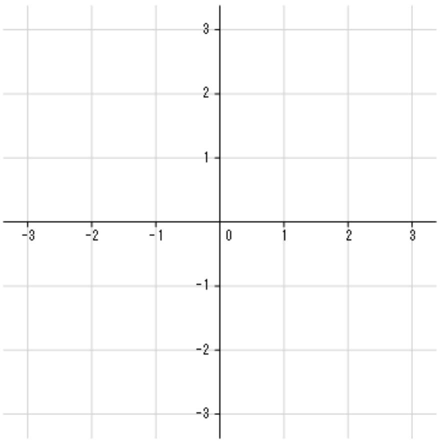
[x=] 2*cos(3*u)

[y=] 2*sin(2*u)



演習

リサージュ図形で１行目を 2*cos(u) にすると図形はどうなるか描け。



付録　汎関数の微分

汎関数とは、$y = f(z),\ z = g(x)$（$y = f(g(x))$）の形になっているもの

例

$$y = (x^2 + x + 1)^5 : g(x) = x^2 + x + 1,\ f(z) = z^5,$$

$$y = e^{x^2} : g(x) = x^2,\ f(z) = e^z$$

公式

$$y = f(g(x))$$

$z = g(x)$　とおくと　$y = f(z)$　　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}\dfrac{dy}{dz} = g'(x)\dfrac{dy}{dz}$

例

$$y = (x^2 + x + 1)^5$$

$$z = x^2 + x + 1,\ y = z^5,\ \frac{dz}{dx} = 2x + 1,\ \frac{dy}{dz} = 5z^4 = 5(x^2 + x + 1)^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} = (2x + 1) \times 5(x^2 + x + 1)^4$$

$$y = e^{x^2}$$

$$z = x^2,\ y = e^z,\ \frac{dz}{dx} = 2x,\ \frac{dy}{dz} = e^z = e^{x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} = 2xe^{x^2}$$

付録　一般的な関数の微分

例

$$y = (2x + 1)^4 (3x + 4)^5$$

$$f(x) = (2x + 4)^4 \qquad f'(x) = 2 \cdot 4(2x + 1)^3 = 8(2x + 1)^3$$

$$g(x) = (3x + 4)^5 \qquad g'(x) = 3 \cdot 5(3x + 4)^4 = 15(3x + 4)^4$$

$$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$= 8(2x+1)^3(3x+4)^5 + 15(2x+1)^4(3x+4)^4$$

$$y = \frac{e^x \sin x}{x^2 + x + 1}$$

$$f(x) = e^x \sin x \qquad f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$$

$$g(x) = x^2 + x + 1 \qquad g'(x) = 2x + 1$$

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$
$$= \frac{e^x(\sin x + \cos x)(x^2 + x + 1) - e^x \sin x \cdot (2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$y = \sin \frac{x}{2x+1}$$

$$z = \frac{x}{2x+1} \qquad y = \sin z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{(2x+1) - x \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dz} = \cos z = \cos \frac{x}{2x+1}$$

$$y' = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} = \frac{1}{(2x+1)^2} \cos \frac{x}{2x+1}$$

微分公式まとめ

$y = c \to y' = 0$

$y = x^n \to y' = nx^{n-1}$

$y = e^x \to y' = e^x$

$y = \log_e x \to y' = 1/x$

$y = \sin x \to y' = \cos x$

$y = \cos x \to y' = -\sin x$

$y = \tan x \to y' = 1/cos^2 x$

$y = af(x) \to y' = af'(x)$

$y = f(x) \pm g(x)$

$\quad \to y' = f'(x) \pm g'(x)$

$y = f(x)g(x)$

$\quad \to y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$y = f(x)/g(x)$

$$\to y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$y = f(g(x))$

$\mathrm{z} = g(x)$ とおいて　$y = f(\mathrm{z})$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} = g'(x)\frac{dy}{dz}$$

三角関数の応用　【第７回】

例１　三角関数とバネ

```
define y=sin(0)
connect (0， 3)-(0， y)， red， 1
ball (0， y)， 0.3， blue
```

問題

１）２行目の最後の１を５に変えて、ひもをバネにせよ。

２）１行目の sin(0) を sin(time) に変えて、バネを動かせ。

例２　三角関数と円運動

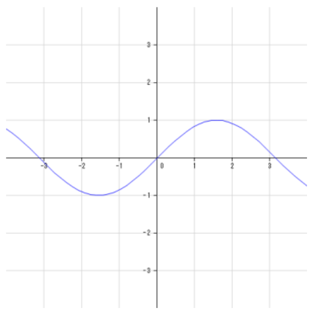
```
define x=cos(time)
define y=sin(time)
ball (x， y)， 0.3， blue
```

問題

１）円運動の半径を２倍にせよ。

２）円運動の速さを２倍にせよ。

例３　三角関数の移動

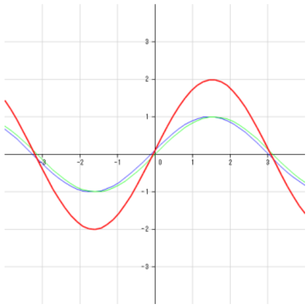


```
axis
func y=sin(x-time)， blue
```

問題

１）波を左向きに動かせ。

例４　三角関数の重ね合わせ



```
axis
define y1=sin(x-time)
define y2=sin(x)
func y1, blue
func y2, green
func y1+y2, red, 2
```

問題

１）３行目の y2=sin(x) を y2=2*sin(x) にして、足した波の波形を調べよ。
２）３行目の y2=sin(x) を y2=sin(x+time) にして、足した波の波形を調べよ。

位相（角度）のずれた正弦波（sin 関数）を足しても正弦波
同じ波が左右からぶつかると定常波（ギターの弦など）

演習　波長の違う波の重ね合わせ

例４で、3 行目の y2=sin(x) を y2=sin(2*x) にしても、波の形は正弦波（sin 関数）になるか。どちらか○を付けよ。
<u>注）例４の形に戻してから変更すること。</u>

［高さのそろった正弦波になる・正弦波にならない］