基礎から学ぶシリーズ１

基礎からの数学

福井正康

まえがき

読み始めるのにしきいが低く、最後は経営系学生として大学院入試に耐え得るという構想のもとに、経営学科学生の基礎学力を養成するシリーズ本を電子教科書として執筆することにいたしました（http://www.heisei-u.ac.jp/~fukui/）。厳密性はある程度犠牲にしても、例を重視し直感的な理解を求める。これを基本方針として、数学、統計学、プログラミング技術等について、刊行してゆくつもりです。

また、本シリーズでは理解を助けるため、コンピュータの利用を積極的に進めます。特に、Microsoft Excel はほとんどのパソコンで標準的に利用されていますので、これを基本として計算を進めることにします。同時に、厄介な計算を含む処理には独自のプログラムを開発中です。最終的に、経営系学生の経営科学についての教育を教科書とソフトウェアで統合化する１つのモデルシステムになればと考えております。どこまで理想に近づけるでしょうか。

社会科学を志す人は、統計学やＯＲ等を学ぶ上で、数学的に一から十まで理解する必要はありません。それより数学的な記述に慣れ、それに実際のデータを当てはめて利用できることが重要であると考えます。そのような考えのもとに本書は数学的な厳密さより直感的理解を優先しており、説明の中には個人的な主観すら交えています。また内容としては、数学の本ですから一通りのことは書きましたが、極端な話、積分（６章）、微分方程式（７章）、重積分（８章）等は文系学生共通の基礎知識として必要ないんじゃないかとも考えています。積分等はある程度微分から理解できますので、各分野の講義の中で説明すればよいようにも思います。本書でも記述が多少難しくなりますので、５章まで読んだら一安心です。

本の読み方はできるだけ行間を読むことですから、数式は必ずノートでチェックして下さい。例えば数式を等号でつなぐ場合、難易度もある程度考慮して、中間の式を飛ばしています。それを埋める作業の繰り返しが実力を養います。とはいえ、ある程度知識を持った人なら、寝転がって読んで充分式が追える程度の記述です。

本書の中で講義に利用する必要最小限の部分は別途抜き出し、70 頁ほどの小冊子にして私のホームページに載せています。手っ取り早く復習しておこうと思われる方は、そちらを参考にして下さい。また、飛ばして読んでも差し支えないところには、節等のタイトルの横に **[Skip OK]** の印を付けています。参考にして下さい。

文系学生の学力向上に本書が少しでも役立てば、これほどの歓びはありません。

福山平成大学経営学科

福井正康

１章　数列

1.1 数列とは

1.1.1 数列の例

　数列とは数字の並びです。以下の例を見て下さい。

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \cdots$$
$$1024, 512, 256, 128, 64, \cdots, 1$$
$$3.2, 5.7, 2.9, 3.4, 4.7, 7.0, 1.5, 8.4, \cdots$$

最初の例は次第に数が増えてますから、増加数列、次の例は数が減っていますから減少数列、最後の例は増加数列でも減少数列でもありません。数列で有限個のものを有限数列、無限個のものを無限数列といいます。特に２番目の例は１で終わっていますので有限数列です。

　これらの数列は記号を用いて $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots$ のように書くこともあります。a_1 のことを特に数列の初項、a_n のことを第 n 項といいます。

1.1.2 等差数列

　等差数列は隣り合った２つの項の差がいつも一定であるような数列です。この一定の差を公差といいます。例えば最初に例に出た数列 $1, 3, 5, 7, 9, \cdots$ は初項が 1、公差が 2 の等差数列です。

問題

　以下の等差数列の初項と公差を求めよ。

1) $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \cdots$　　2) $100, 90, 80, 70, 60, 50 \cdots$
3) $1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2, \cdots$　　4) $0, 1/3, 2/3, 1, 4/3, 5/3, \cdots$

解答

1) 初項 2　公差 3　　2) 初項 100　公差 –10
3) 初項 1.2　公差 0.2　　4) 初項 0　公差 $1/3$

　さて、以下の数列を考えてみます。

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \cdots$$

これは初項 a 公差 d の等差数列ですが、この場合の第 n 項はどんな式になるでしょう。分かり易いように各項に番号を付けてみます。

$$\underset{1}{a}, \underset{2}{a+d}, \underset{3}{a+2d}, \underset{4}{a+3d}, \cdots, \underset{n}{a+(n-1)d}$$

この番号の付け方を見ると容易に $a_n = a + (n-1)d$ であることが分かります。このこと

から以下の公式を得ます。

公式

初項 a 公差 d の等差数列の第 n 項 a_n は以下の式で与えられる。

$$a_n = a + (n-1)d \tag{1.1}$$

1.1.3 等比数列

等比数列は隣り合った２つの項の比がいつも一定であるような数列です。この一定の比を公比といいます。例えば 1.1.1 の例に出た数列 $1024, 512, 256, 128, 64, \cdots, 1$ は初項が 1024 、公比が $1/2$ の等比数列です。

問題

以下の等比数列の初項と公比を求めよ。

1) $3, 6, 12, 24, 48, 96, \cdots$　　2) $1, -1/2, 1/4, -1/8, 1/16, \cdots$

3) $0.01, 0.05, 0.25, 1.25, \cdots$　　4) $3, -1, 0.3, -0.09, 0.027, \cdots$

解答

1) 初項 3 公比 2　　2) 初項 1 公比 −1/2

3) 初項 0.01 公比 5　　4) 初項 3 公比 −0.3

さて、以下の数列を考えてみます。

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \cdots$$

これは初項 a 公比 r の等比数列ですが、この場合の第 n 項は前問と同様にして、$a_n = ar^{n-1}$ であることが分かります。このことから以下の公式を得ます。

公式

初項 a 公比 r の等比数列の第 n 項 a_n は以下の式で与えられる。

$$a_n = ar^{n-1} \tag{1.2}$$

1.2 Σ記号の使用法

このΣという文字はギリシア文字でシグマと読みます。Σ記号は数式表現の基本です。しっかり身に付けるようにしましょう。それでは例を使って意味を説明します。

$$a_{\underline{\underline{1}}} + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{\underline{\underline{10}}} = \sum_{i=\underline{\underline{1}}}^{\underline{\underline{10}}} a_i$$

この例では a_1 から a_{10} までの合計を求めていますが、このような数字（添え字）がある規則で順番に並んだような数列の和を求めるときにΣ記号を利用します。変数（添え字）の i は 1 ずつ増えてゆく数字を表し、Σ記号の右横は合計される数式の形が i を使って表

されています。また、i のはじめの値（初期値）をΣ記号の下に $i=1$ と書き、最後の値（最終値）10 をΣ記号の上に書きます。Σ記号の下の変数と右側の数式内の変数は一致していなければなりません。また、どんな文字を使っても構いませんが、あまり突飛なものは分かり易さの点から避けたほうが良さそうです。以下によく使用する変数の例を挙げておきますので参考にして下さい。

$$\sum_i,\ \sum_j,\ \sum_k,\ \sum_r,\ \sum_s,\ \sum_t,\ \sum_\alpha,\ \sum_\beta,\ \cdots$$

それでは具体的に以下の例を見ながら意味を考えてください。

$$a_5+a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{20}=\sum_{i=5}^{20}a_i=\sum_{k=5}^{20}a_k$$

これは変数の初期値が 5 になっている例です。変数を i と k の２通りで表してみました。

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

この例は最終値が一般的に n という形で表わされています。以下にΣ記号に関する問題が用意されています。

問題

以下のΣ記号で表わされた式を具体的に数列の和で表せ。

1) $\sum_{i=1}^{5}{a_i}^2=$　　2) $\sum_{k=1}^{5}a_kb_k=$　　3) $\sum_{i=1}^{10}i=$

4) $\sum_{i=1}^{5}i^2=$　　5) $\sum_{k=1}^{5}1=$　　6) $\sum_{i=1}^{4}(a_i-c)^2=$

解答

1) $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2$

2) $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5b_5$

3) $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

4) $1+4+9+16+25$

5) $1+1+1+1+1$

6) $(a_1-c)^2+(a_2-c)^2+(a_3-c)^2+(a_4-c)^2$

問題

以下の数列の和をΣ記号を用いて表せ。

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10}=$

2) $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}=$

3) $a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{100}=$

4) $a_1b_2+a_2b_3+a_3b_4+a_4b_5+\cdots a_{99}b_{100}=$

解答

1) $\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{i}$　　2) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}$　　3) $\sum_{i=1}^{50}a_{2i}$　　4) $\sum_{i=1}^{99}a_i b_{i+1}$

さて、ここではΣ記号に関する公式をいくつか例を用いて作ってみましょう。まず以下のような計算を考えてみます。

$$\sum_{i=1}^{3}ca_i = ca_1 + ca_2 + ca_3 = c(a_1+a_2+a_3) = c\sum_{i=1}^{3}a_i$$

これからΣ記号の中で式に掛かった定数は、Σ記号の外に出してもよいことが分かります。
次に、Σ記号の中での数式の和については、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}(a_i+b_i) &= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)\\ &= (a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)\\ &= \sum_{i=1}^{3}a_i + \sum_{i=1}^{3}b_i\end{aligned}$$

２つのΣに分離してもよいことが分かります。

次に少し複雑な 2 重のΣ記号について考えてみましょう。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}a_{ij} &= \sum_{i=1}^{2}(a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}) = (a_{11}+a_{12}+a_{13})+(a_{21}+a_{22}+a_{23})\\ &= (a_{11}+a_{21})+(a_{12}+a_{22})+(a_{13}+a_{23}) = \sum_{j=1}^{3}(a_{1j}+a_{2j})\\ &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}a_{ij}\end{aligned}$$

以上から、合計の順番を換えるだけですから、Σ記号は交換可能であることが分かります。
またΣ記号の中で式が添え字毎に積に分離できる場合は、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}a_i b_j &= \sum_{i=1}^{2}a_i(b_1+b_2+b_3) = (a_1+a_2)(b_1+b_2+b_3)\\ &= (\sum_{i=1}^{2}a_i)(\sum_{j=1}^{3}b_j)\end{aligned}$$

２つのΣの積に書き直すことができます。

ここで述べた関係については、有限個の数列の場合一般に成り立つ関係です。公式としてまとめておきましょう。

公式

任意の数 c，数列 a_i，b_i に関して以下の関係が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{n}ca_i = c\sum_{i=1}^{n}a_i \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij} \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_i b_j=(\sum_{i=1}^{m}a_i)(\sum_{j=1}^{n}b_j) \tag{1.6}$$

1.3 等差・等比数列の和

今まで数列や数列の和の表示方法を学んできましたが、この節では具体的に数列の和の値を求める方法を学習します。特に等差数列と等比数列の和は頻繁に使用しますので、公式よりも方法を確実に理解して下さい。

1.3.1 等差数列の和

今 1 から 100 までの和を求める方法を考えてみます。和を S として、

$$S=1+2+3+\cdots+100$$

で表されますが、順番を変えて

$$S=100+99+98+\cdots+1$$

と表すことも出来ます。この性質を利用してこの数列の和を求めることが出来ます。即ち、これら２つの S を足して結果を $1/2$ にするという方法を取ります。

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & S= & 1+ & 2+ & 3+ & 4+\cdots+ & 100 \\
+) & S= & 100+ & 99+ & 98+ & 97+\cdots+ & 1 \\
\hline
 & 2S= & 101+ & 101+ & 101+ & 101+\cdots+ & 101=100\times 101
\end{array}$$

これより、$S=\dfrac{100\times 101}{2}=5050$ となります。これが 1 から n までの整数の和では $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$ となります。

一般の等差数列の場合にもこの方法を用います。初項 a 公差 d の等差数列の第 n 項までの和 S_n を上と同じ方法で計算してみます。

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & S_n= & a\ + & (a+d)+ & (a+2d)+\cdots+ & (a+(n-1)d) \\
+) & S_n= & (a+(n-1)d)+ & (a+(n-2)d)+ & (a+(n-3)d)+\cdots+ & a \\
\hline
 & 2S_n= & (2a+(n-1)d)+ & (2a+(n-1)d)+ & (2a+(n-1)d)+\cdots+ & (2a+(n-1)d) \\
 & = & n\times(2a+(n-1)d) & & &
\end{array}$$

これより、以下となります。

$$S_n = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2} = na + \frac{n(n-1)d}{2} \tag{1.7}$$

この形は覚えずに方法を理解して下さい。

問題

以下の数列の和 S を求めよ。

1) $S = 50+51+52+\cdots+100$　　2) $S = 2+4+6+\cdots+100$

3) $S = n+2n+3n+\cdots+n^2$　　4) $S = \sum_{i=1}^{20}(2i+1)$

5) $S = \sum_{i=n}^{2n}(a+i)$

解答

1) $S = \dfrac{150\times 51}{2} = 3825$　　2) $S = \dfrac{102\times 50}{2} = 2550$

3) $S = \dfrac{n^2(n+1)}{2}$　　4) $S = 3+5+7+\cdots+41 = \dfrac{44\times 20}{2} = 440$

5) $S = (a+n)+(a+n+1)+\cdots+(a+2n) = \dfrac{(2a+3n)(n+1)}{2}$

1.3.2 等比数列の和

今度は等比数列について和を求める方法を説明します。一般的な初項 a 公比 r の等比数列について第 n 項までの和 S_n を求めてみます。これは $r \neq 1$ の場合 $S_n - rS_n$ の計算をして求めます。

$$\begin{array}{lll}
 & S_n & = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \\
-) & rS_n & = \phantom{a+{}} ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\
\hline
 & (1-r)S_n & = a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - ar^n = a(1-r^n)
\end{array}$$

これより以下となります。

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad （r \neq 1） \tag{1.8}$$

また、$r=1$ の場合もちろん $S_n = na$ となりますが、現実に直面する問題ではこのように都合のよいことはまずないでしょう。ここでも、結果ではなく方法を理解して下さい。それではこの方法を練習してみましょう。

問題

以下の数列の和 S を求めよ。

1) $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 512$

2) $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{32}$

3) $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^{99}}$

4) $S = p^5 + p^6 + p^7 + p^8 + \cdots + p^{20} \qquad (p \neq 1)$

5) $S = \sum_{i=m}^{n} ar^i \quad (m < n, r \neq 1)$

解答

1) $S = \frac{1-1024}{1-2} = 1023$ 2) $S = \frac{1-1/64}{1-1/2} = \frac{63}{32}$

3) $S = \frac{1/3 - 1/3^{100}}{1-1/3} = \frac{1-(1/3)^{99}}{2}$ 4) $S = \frac{p^5 - p^{21}}{1-p} = \frac{p^5(1-p^{16})}{1-p}$

5) $S = ar^m + ar^{m+1} + \cdots + ar^n = \frac{ar^m - ar^{n+1}}{1-r} = \frac{ar^m(1-r^{n-m+1})}{1-r}$

1.4 その他の数列の和 [Skip OK]

$\sum_i i^p$ のタイプ

$p = 1$ の場合については既に等差数列のところで話しましたので、それ以上の整数の場合の求め方について説明します。但し、$p \geq 3$ の場合は複雑ですので、$p = 2$ の場合を示してそれより大きい場合を類推出来るようにしておきます。以下の式を考えて下さい。

$$D = \sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 \tag{1.9}$$

この式の右辺の第１項は $2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + (n+1)^3$ であり、第２項は $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ になります。それゆえ重複する項をそれぞれ引くと

$$\begin{aligned} D &= (n+1)^3 - 1 \\ &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 1 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n \end{aligned} \tag{1.10}$$

となります。

一方、最初の式は以下の様にも展開されます。

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{n}(i^3 + 3i^2 + 3i + 1) - \sum_{i=1}^{n} i^3 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(3i^2 + 3i + 1) \\ &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + n \end{aligned}$$

さて、既に等差数列のところで勉強したように $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ ですから、上式は

$$\begin{aligned} D &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n \\ &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n \end{aligned} \tag{1.11}$$

となります。式 (1.10) と (1.11) とは同じ D を表しているので、

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n = n^3 + 3n^2 + 3n$$

これより、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{1}{3}\left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) \\ &= \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 1\right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned} \tag{1.12}$$

となります。このように $\sum_{i=1}^{n} i^3$ を求めるなら、

$$D = \sum_{i=1}^{n} (i+1)^4 - \sum_{i=1}^{n} i^4$$

を利用し、$\sum_{i=1}^{n} i^p$ を求めるなら、

$$D = \sum_{i=1}^{n} (i+1)^{p+1} - \sum_{i=1}^{n} i^{p+1}$$

を利用します。これらは全て更に次数の低い項の和から計算されます。結果ではなく、方法を覚えておいて下さい。

$\sum_{i} ir^i$ のタイプ

　この式を具体的に表すと以下のようになります。

$$\sum_{i=1}^{n} ir^i = r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \cdots + nr^n$$

このタイプの合計も時たま利用します。ここでは具体的に展開して書いた方が分かり易いので以下では

$$S_n = r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \cdots + nr^n$$

として和を求めることにします。これは等比数列のときと同じように $S - rS$ を求めることから始めます。

$$\begin{array}{rl} S_n & = r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \cdots + \qquad nr^n \\ -)\ rS_n & = \qquad r^2 + 2r^3 + 3r^4 + \cdots + (n-1)r^n + nr^{n+1} \\ \hline (1-r)S_n & = r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + \qquad r^n - nr^{n+1} \end{array}$$

ここで右辺の左から n 項に注目すると、初項 r 公比 r の等比数列で、その和は

$$r+r^2+r^3+r^4+\cdots+r^n=\frac{r-r^{n+1}}{1-r}$$

これより、

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1-r}\left(\frac{r-r^{n+1}}{1-r}-nr^{n+1}\right)\\&=\frac{r-r^{n+1}-nr^{n+1}+nr^{n+2}}{(1-r)^2}\\&=\frac{r(1-(n+1)r^n+nr^{n+1})}{(1-r)^2}\end{aligned}$$

が、導かれます。

$\sum_i \frac{1}{i(i+1)}$ のタイプ

　これは、解法がきれいなので受験参考書等によく出る形ですが、今後必要となるかも知れないので勉強しておきましょう。具体的には以下の和 S_n を求めます。

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}\\&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\end{aligned}$$

ここで、和を求めるために以下の関係を利用します。すなわち、

$$\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$$

です。これを使うと S_n は以下のように求められます。

$$\begin{aligned}S_n&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}\\&=\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

1.5 漸化式 [Skip OK]

　数列の第 n 項とそれ以下の項との関係を表す式を漸化式といいます。特に第 n 項と第 n-1 項の関係を与える場合がよく利用されます。例えば以下の例を見て下さい。

$$a_n=2a_{n-1}+1 \qquad 但し、a_1=1$$

このような形の式を数列 a_n の漸化式といいます。漸化式の意味は $a_1=1$ として、$a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots, a_n$ と順番に値が求まって行くということです。即ち、まず $a_1=1$ ですので、$n=2$ として $a_2=2a_1+1=3$ となります。a_2 が求まりましたので、同様に $n=3$ と

して $a_3 = 2a_2 + 1 = 7$ となります。これを繰り返して行けばどんな n に対しても a_n を求めることが出来ます。

これに対して、a_n を数式として以下のように表すこともできます。

$$a_n = 2^{n-1}(a_1 + 1) - 1 = 2^n - 1$$

実際、$n = 1, 2, 3, \cdots$ と数字を入れて見て下さい。確かに上の結果と一致します。この形なら、a_n の値を計算するのが簡単です。a_n についてこのような形を求めることを、漸化式を解くといいます。

ここでは、いろいろな場面で現れる以下の２つの漸化式について、第 n 項の値を漸化式を解いた形で求める方法を説明します。

1）$a_n = pa_{n-1} + q$　　　　2）$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$

最初の漸化式では、a_1 を与えて a_n を求め、２番目の漸化式では、a_1 と a_2 とを与えて a_n を求めます。

1）$a_n = pa_{n-1} + q$ の形の漸化式

まず最も基本的な $q = 0$ の場合の漸化式を考えてみます。

$$a_n = pa_{n-1} \tag{1.13}$$

これは順番に考えて行くと以下のように簡単に結果が求まります。

$$a_2 = pa_1$$
$$a_3 = pa_2 = p^2 a_1$$
$$a_4 = pa_3 = p^3 a_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = pa_{n-1} = p^{n-1} a_1 \qquad a_n = p^{n-1} a_1$$

今後我々はこの方法を基本とし、さまざまな漸化式を(1.13)の形に変形する工夫を考えて行きます。

さて、一般的な場合を考えてみます。

$$a_n = pa_{n-1} + q \tag{1.14}$$

これを解くために、この式を以下の形に変形します。

$$a_n - t = p(a_{n-1} - t)$$

ここに、上式との比較から、t について解くと以下のようになります。

$$t - pt - q = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{q}{1-p}$$

さて、上のような形に変形すると、上で考えた $q = 0$ の場合と同様に簡単に解くことができます。

$$a_n - t = p(a_{n-1} - t) = p^2(a_{n-2} - t) = \cdots = p^{n-1}(a_1 - t)$$
$$a_n = p^{n-1}(a_1 - t) + t$$

ここで、t に求めた値を代入して、a_n は以下のようになります。

$$a_n = p^{n-1}\left(a_1 - \frac{q}{1-p}\right) + \frac{q}{1-p} \tag{1.15}$$

問題

以下の漸化式を解くためにはどのような工夫すればよいか。

$$a_n = pa_{n-1} + qr^n$$

解答

$a_i = b_i r^i$ とおくと上式は、$b_n r^n = pb_{n-1} r^{n-1} + qr^n$ より、以下となる。

$$b_n = \frac{p}{r} b_{n-1} + q$$

これはこの節で学んだ形となり、簡単に解くことができる。

b) $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$ の形の漸化式

この漸化式については以下のように変形します。

$$a_n - ta_{n-1} = (p-t)(a_{n-1} - ta_{n-2})$$

この式と上の式とを比較しますと、$-(p-t)t = q$ であり、書き直して t の方程式として、以下の関係が求まります。

$$t^2 - pt - q = 0$$

これは２次方程式の判定条件で、$p^2 - 4q \geq 0$ の場合、実数解が求まります。

上のように変形した新しい漸化式は容易に解けて、

$$\begin{aligned} a_n - ta_{n-1} &= (p-t)(a_{n-1} - ta_{n-2}) \\ &= (p-t)^2 (a_{n-2} - ta_{n-3}) \\ &\cdots \\ &= (p-t)^{n-2}(a_2 - ta_1) \end{aligned}$$

となり、また新たな漸化式が生じます。

$$a_n = ta_{n-1} + (p-t)^{n-2}(a_2 - ta_1)$$

これは 1) のところで与えた問題に従って、$a_n = b_n (p-t)^{n-2} \quad n \geq 2$ とおき、b_n の漸化式として以下の形に直します。

$$b_n = \frac{t}{p-t} b_{n-1} + (a_2 - ta_1)$$

そうするとこれは 1) で与えた漸化式なので、手順に従って答えを求めることが可能です。計算は少し複雑ですので省略し、最終的な答えを書いておきましょう。

$$a_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) - \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)\right)$$

ここに、α と β は上で与えた 2 次方程式 $t^2 - pt - q = 0$ の２つの解です。これも考え方を理解してもらえれば結構です。