３章　関数

3.1 関数とは

関数とは、ある変数の値を決めるとその値が決まるものを言います。

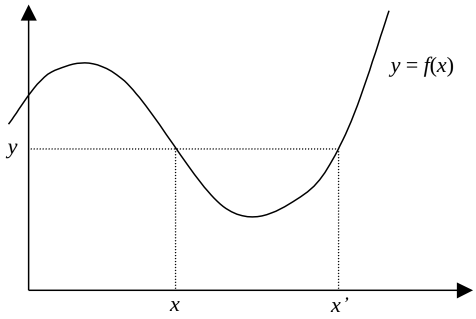


図 3-1　1 変数関数

図 3-1 の関数 $y=f(x)$ は 1 変数の関数で、x の値から y の値が決まります。逆に y の値から x の値は一意的には決まりませんので、関数とはなりません。

2 変数の関数 $y=f(x_1,x_2)$ は、図 3-2 のように曲面によって表わされます。

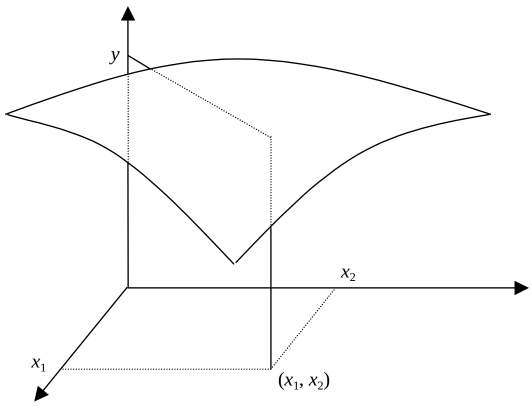


図 3-2　２変数関数

3.2 １次関数と２次関数

ここでは、１次関数と２次関数について簡単に見ておきましょう。

１次関数

一般の１次関数は以下の形で表されます。

$$y=ax+b$$

図 3-3 に見るように係数 a は直線の傾き、係数 b は y 軸との交点を表します。y 軸との交点は $x=0$ として $y=b$ 、x 軸との交点は $y=ax+b=0$ として $x=-b/a$ のように求められます。

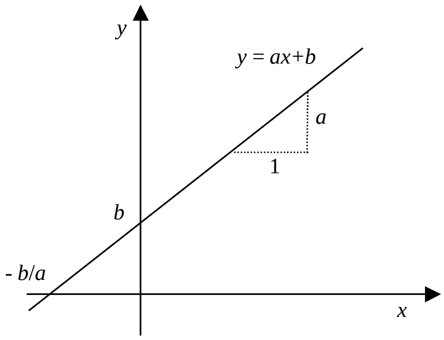


図 3-3　１次関数

２次関数

一般の２次関数は以下の形で表されます。

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

細かいことは微分のところでも学びますので、ここでは知識の整理をしておきます。

y 軸との交点は $x = 0$ として $y = c$ 、x 軸との交点は $y = ax^2 + bx + c = 0$ として、2 次方程式の解の公式として知られる式が求められます。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.1}$$

少し厄介ですが、これを簡単に証明しておきましょう。以下の変形を考えます。

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x^2 + b/a\,x + c/a) \\ &= a(x^2 + b/a\,x + b^2/4a^2 - b^2/4a^2 + c/a) \\ &= a\left[(x + b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2\right] = 0 \end{aligned}$$

$a \neq 0$ の場合、[ ]の中が $(x + b/2a)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ とならなければなりません。さらに、この両辺の平方根をとって $x + b/2a = \pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ となり、解の公式が求まります。

次に２次関数の係数とグラフの関係を見ておきましょう。

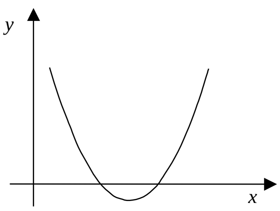


図 3-4a

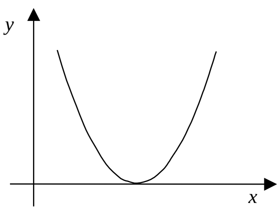


図 3-4b

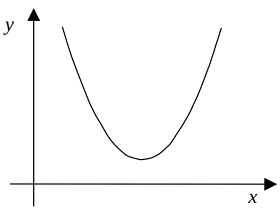


図 3-4c

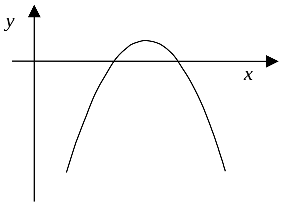


図 3-4d

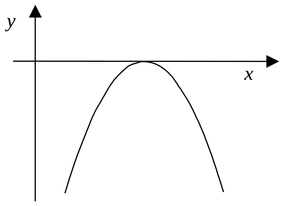


図 3-4e

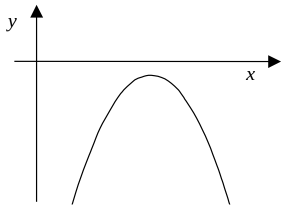


図 3-4f

図 3-4 の a, b, c のようにグラフが上向きに開いている場合は$a > 0$で、d, e, f のように下向きに開いている場合は$a < 0$です。また、a, d のようにグラフがx軸と交叉している場合は、解の公式で $b^2 - 4ac > 0$ で、２つの実数解となり、b, e のようにグラフがx軸に接している場合は $b^2 - 4ac = 0$ で１つの実数解（重根）となります。c, f のように $b^2 - 4ac < 0$ の場合は解の公式の平方根の中が負になり、実数解はなく複素数の解になります。２次曲線のグラフに関する認識はこの程度でよいと思います。

２次関数の頂点の座標は、解の公式の変形を少し進めて、

$$y = a(x + b/2a)^2 + c - b^2/4a$$

とし、$x = -b/2a$ のとき，$y = c - b^2/4a$ を得ます。これは、上式の $(x + b/2a)^2$ の部分が $x = -b/2a$ のとき、最小値 0 を取ることから分かります。

これまでの知識の復習になったでしょうか。

3.3 指数関数

3.3.1 指数の性質

ここでは一般にa^xで表される指数関数の規則や性質について、見て行きたいと思います。まず一般的な指数計算の規則を考えましょう。

1） $a^m \times a^n = a^{m+n}$

以下の計算を考えてください。

$$2^1 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8 = 2^3$$

$$2^2 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32 = 2^5$$

これらから、ひとつの規則が推測されます。それは、以下のような関係です。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

これは、m, n が自然数（1, 2, 3, …）の場合に成り立ったものですが、これがすべての数に拡張できると考えることにしましょう。

2） $a^0 = 1$

次の例を見て下さい。計算は 1）のルールに従いました。

$$2^0 \times 2^3 = 2^{0+3} = 2^3 \qquad \text{ゆえに、} 2^0 = 1$$

同様に考えるとすべての正の数aに対して上の計算は成り立ちます。即ち、1)のルールに従うと以下のように考えるのが自然です。

$$a^0 = 1$$

3）$a^{-n}=1/a^n$

次の例は指数が負の数の場合です。計算は 1) と 2) のルールに従っています。

$$2^3\times 2^{-3}=2^{3-3}=2^0=1 \qquad \text{ゆえに、} 2^{-3}=\frac{1}{2^3}$$

これから、負の指数の場合は正にして分母に移ることが分かりました。一般に以下のような規則が導かれます。

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

4）$(a^m)^n=a^{m\times n}$

最後に 1) のルールから離れて、以下の計算を見てみましょう。

$$(2^2)^3=2^2\times 2^2\times 2^2=2^{2+2+2}=2^6$$

これから一般に以下のルールになることが分かります。

$$(a^m)^n=a^{m\times n}$$

このルールも一般の数に拡張します。これを使うと $(2^{1/2})^2=2^1=2$ となり、2 乗して 2 になることから、$2^{1/2}=\sqrt{2}$ であることになります。

以下に公式をまとめておきましょう。

公式

1）$a^m\times a^n=a^{m+n}$

2）$a^0=1$

3）$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

4）$(a^m)^n=a^{m\times n}$ (3.2)

問題

以下の値を求めよ。

1) 2^{-3} 2) $27^{1/3}$ 3) $9^{3/2}$ 4) $16^{-3/4}$

解答

1) $\dfrac{1}{8}$ 2) 3 3) 27 4) $\dfrac{1}{8}$

3.3.2 指数関数のグラフ

指数の計算法が分かったので、次はグラフを考えてみたいと思います。
図 3.5a は $y=2^x$ のグラフで、図 3.5b は $y=(1/2)^x$ のグラフです。各整数の x の値に対する y の値を求めて滑らかにつないで見て下さい。

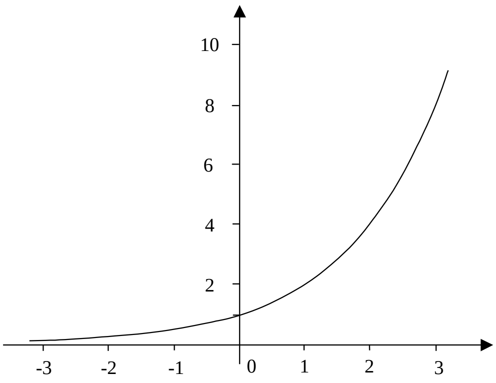


図 3-5a

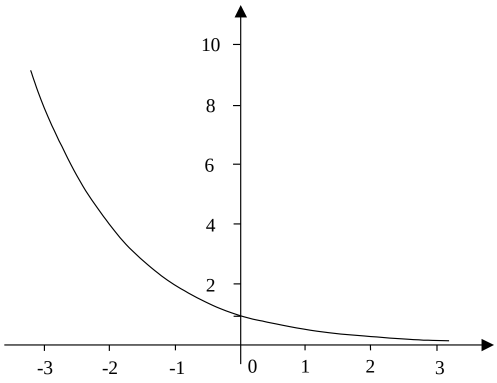


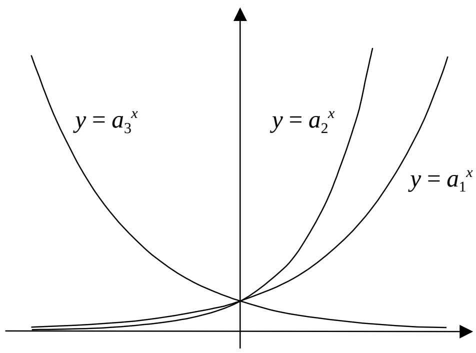
図 3-5b

左右のグラフは y 軸に対して対称的になっています。これは、$y=(1/2)^x=2^{-x}$ の関係から、x を $-x$ とすることに相当しているからです。

さて、$y=a^x$ について、x がすべての実数の範囲を取ることから、a については $a>0$ でなければなりません（例えば $(-2)^{1/2}$ では実数になりません）。また、y については $y>0$ となることになります。指数関数は、変数域（x の範囲）がすべての実数で、値域（y の範囲）が正の実数となる関数です。

問題

以下のグラフについて、$0, 1, a_1, a_2, a_3$ の大きさを比較せよ。



解答

グラフの傾きより、$0<a_3<1<a_1<a_2$ となる。

3.4 対数関数

3.4.1 対数の性質

1） $y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$

以下の例を見て下さい。左側は普通の指数の関係ですが、これを逆の立場で見たものが対数です。

$$2^3=8 \Leftrightarrow \log_2 8=3$$

$$3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$$

即ち、2^3 が 8 であることを、8 は 2 の何乗であるかと言っているのが $\log_2 8$ の表式です。このように対数は指数の見方を変えたもので、log という記号で「難しいもの」などと惑わされてはいけません。ここで $\log_2 8$ の下に付いた 2 を対数の底(てい)といいます。上の関係を文字で一般的に表したものが以下の関係です。

$$a^y = x \Leftrightarrow \log_a x = y$$

これを書き換えて、最初の定義としましょう。

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

ここで対数関数は指数関数の逆関数になっていることに注意して下さい。つまり、指数と対数は x と y を入れ替えたような関係にあります。指数のところでも述べましたが、対数の底 a については $a > 0$ 、変数 x についても $x > 0$ であることを忘れないで下さい。

2) $\log_a a = 1$

これは 1) の定義を応用した簡単な例ですが、覚えておくと結構役に立つ公式です。

$$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$$

3) $\log_a x^n = n \log_a x$

この公式は非常に重要なものです。以下の式は 1) の定義を利用しています。

$$a^y = x^n \Leftrightarrow \log_a x^n = y$$

上の式の左側を書き換えると、$a^{y/n} = x$ ですが、これに 1) の定義を利用すると以下の関係も成り立ちます。

$$a^{y/n} = x \Leftrightarrow \log_a x = \frac{y}{n}$$

それゆえ上下の式を比較して以下の関係を得ます。

$$y = \log_a x^n = n \log_a x$$

4) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

この公式もよく使われます。1) の定義を利用して以下のような関係を示しておきます。

$$x = a^p \Leftrightarrow p = \log_a x$$

$$y = a^q \Leftrightarrow q = \log_a y$$

左側の式で xy を作り、対数をとります。

$$\log_a xy = \log_a a^p a^q = \log_a a^{p+q}$$

これに 3) と 2) の関係を使って、以下を得ます。

$$= (p+q) \log_a a = p + q$$

さらに、p と q に最初の右側の式を代入すると以下のようになります。

$$= \log_a x + \log_a y$$

これを整理すると、次の公式が得られます。

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

5) $a^{\log_a x} = x$

この関係はそれほど重要ではありませんが､微分などで利用すると便利なので示しておきます。まず 1) の定義を利用して、以下の式を与えます。

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$$

この関係を用いると、以下のように計算されます。

$$a^{\log_a x} = a^y = x$$

6) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

この公式は対数の底の変換として重要な関係です。5) と 3) の関係を用いると以下のような変形が可能です。

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \times \log_b a$$

これから、以下の関係を得ます。

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

これは、対数の底 a を任意の底 b に変換する公式になっています。

ここに、対数に関する公式をまとめておきましょう。対数の関係は直感的に理解しづらく覚えにくいようです。

公式

1) $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$
2) $\log_a a = 1$
3) $\log_a x^n = n \log_a x$
4) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
5) $a^{\log_a x} = x$
6) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (3.3)

問題

以下の値を求めよ。

1) $\log_2 8$ 2) $\log_3 \dfrac{1}{9}$ 3) $\log_{1/2} 8$

4) $\log_2 \sqrt{2}$ 5) $5^{\log_5 4}$ 6) $3^{-\log_3 2}$

7) $\log_6 4 + \log_6 9$ 8) $\log_4 8$

解答

1) 3　2) -2　3) -3　4) 1/2　5) 4　6) 1/2　7) 2　8) 3/2

3.4.2 対数関数のグラフ

対数関数について２つのグラフを描いてみましょう。左は $y=\log_2 x$ のグラフで、右は $y=\log_{1/2} x$ のグラフです。

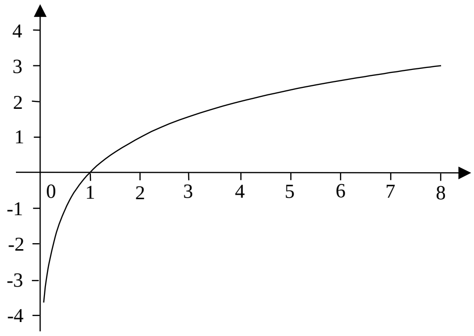


図 3-6a $y=\log_2 x$

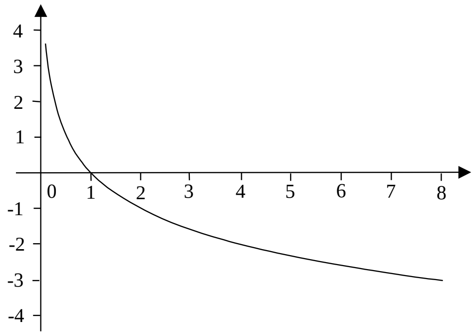


図 3-6b　$y=\log_{1/2} x$

ここでは､底 a の値によってグラフの傾きが変わっています｡一般に $a>1$ の場合は図 3-6a のように右上がり、$0<a<1$ の場合は図 3-6b のように右下がりとなります。また、

$$y=\log_{1/2} x=\log_2 x/\log_2 1/2=-\log_2 x$$

より、２つのグラフは x 軸を対称軸として対称になっています。

さて、$y=\log_a x$ について、定義のところで見たように a については $a>0$ でなければなりません。また、x については $x>0$ であり、y はすべての実数の範囲を取ることになります。これは、変数域（x の範囲）が正の実数で、値域（y の範囲）がすべての実数となる関数です。

3.4.3 指数関数と対数関数のグラフの関係

指数関数 $y=a^x$ と対数関数 $y=\log_a x$ はお互いに逆関数の関係にあります｡即ち､x と y を入れ替えた関係にあります。

$$y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y \xleftrightarrow[x\leftrightarrow y]{} x=a^y \Leftrightarrow y=\log_a x$$

それゆえ、グラフとしても図 3-7 のように、$y=x$ の直線を軸にして対称な関係になります。

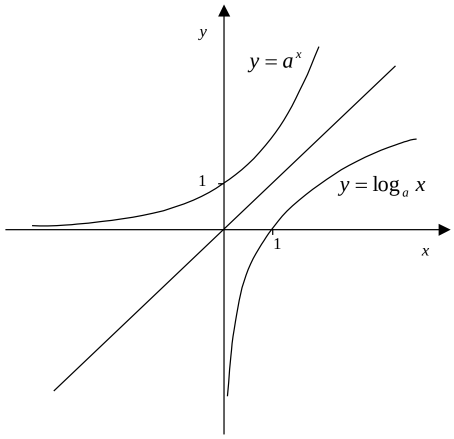


図 3-7 指数関数と対数関数の関係

3.5 三角関数

3.5.1 角度の単位

三角関数の話を始める前に、ラジアンと呼ばれる角度の測り方について話します。

図 3-8 の左は角度ラジアンの定義です。この角度の測り方は弧の長さと半径との関係を利用するものです。即ち、角度＝弧の長さ÷半径、で与えられます。円周率を π として、半径 r の円の円周は $2\pi r$ で与えられますから、一周 360° は 2π で表わされます。これが基本になり、図 3-8 の右のような、度とラジアンの関係が得られます。主な角度としては、$30° = \pi/6$，$45° = \pi/4$，$60° = \pi/3$ 等で与えられます。特に後に述べる微分に関する三角関数の表記はこのラジアンが単位になっています。

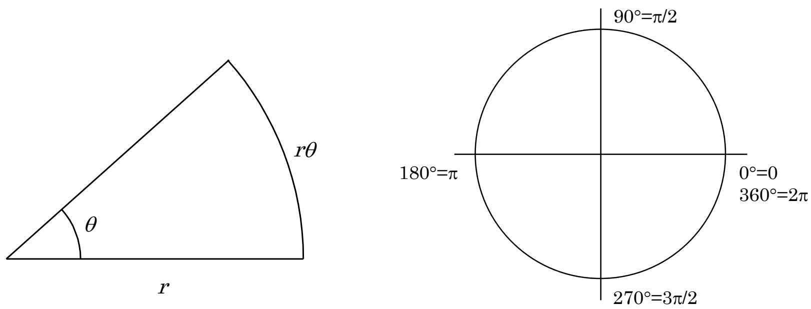


図 3-8 ラジアンによる角度表現

3.5.2 三角関数とは

次に三角関数の定義を見てみましょう。図 3-9 のように原点を中心とした半径 r の円を考えます。

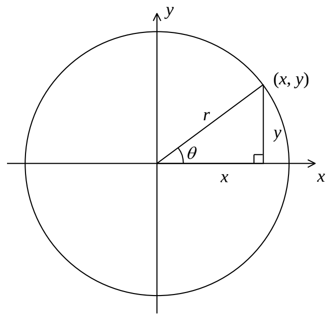


図 3-9　三角関数の定義

円上の点の座標を(x, y)、x軸の正の向きとの角度をθとして、三角関数を以下のように定義します。

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{y/r}{x/r} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{3.4}$$

三角関数と符号

三角関数は角度によって正負の値をとります。これは、座標値x, yの符号によって決まっています。図 3-10 に各関数の各象限における符号を示します。

例えば、$\sin\theta = y/r$より、$\sin\theta$の符号は$y > 0$である第 1 象限と第 2 象限で正、$y < 0$である第 3 象限と第 4 象限で負です。他の関数も確認して下さい。

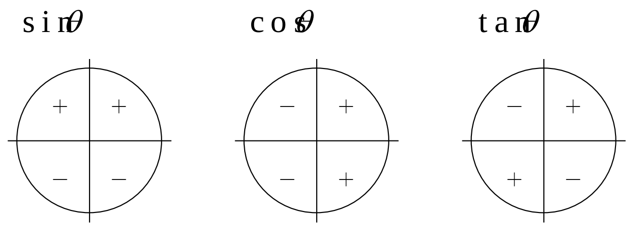


図 3-10　三角関数と符号

三角関数の代表的な値

三角関数の計算に使われる代表的な角度について、表 3-1 に値をまとめておきます。よく使われるのは$\pi/6\,(30°)$，$\pi/4\,(45°)$，$\pi/3\,(60°)$等です。これらは三角定規で表わされている角度で、各辺の長さが以下のように表わされることから計算されます。

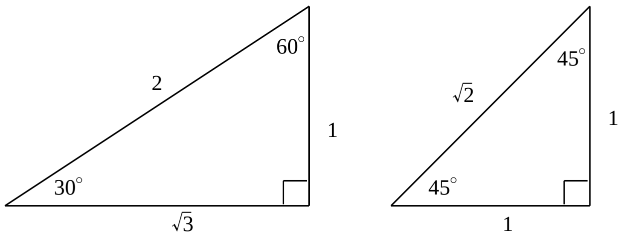


図 3-11　辺の長さと角度

その他の角度については上の関係と三角関数の定義(3.4)から求まります。また、$\theta = \pi / 2$, $\theta = 3\pi / 2$ のときの $\tan\theta$ の値は分母が 0 になることから求まりません。

表 3-1 三角関数の代表的な値

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	3π/4	π	5π/4	3π/2	7π/4	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		-1	0	1		-1	0

問題

表 3-1 の三角関数の値について確認せよ。

解答

省略

三角関数のグラフ

図 3-12a,b,c に三角関数のグラフを表示しておきます。特に $y = \sin x$ と $y = \cos x$ が $\pi/2$ だけずれていることに注意して下さい。

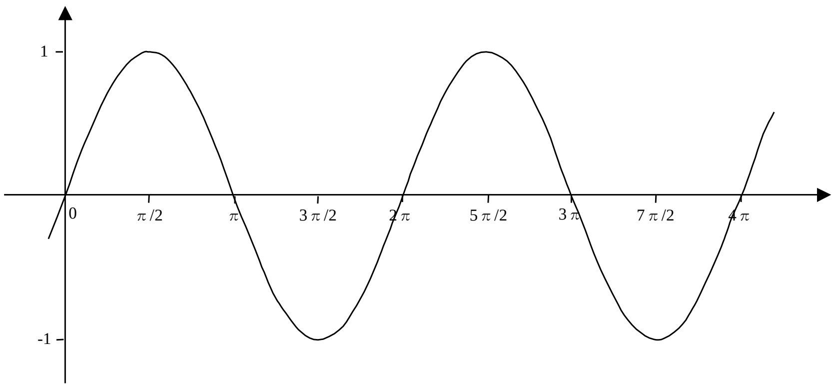


図 3-12a $y = \sin x$ のグラフ

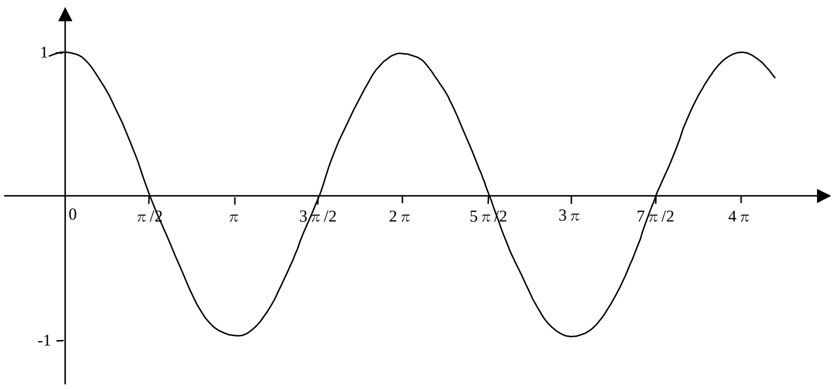


図 3-12b $y = \cos x$ のグラフ

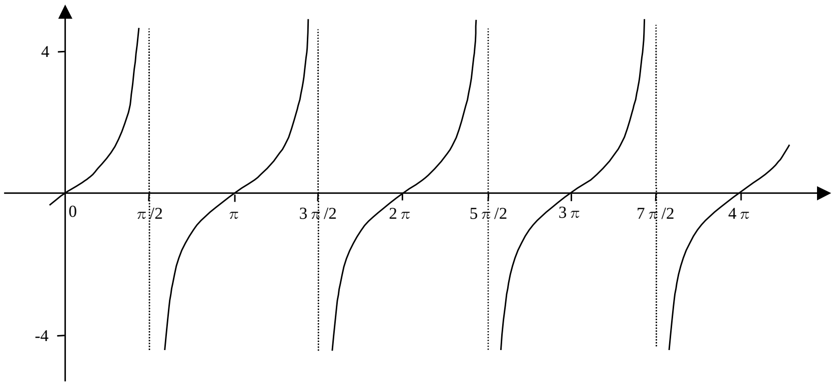


図 3-12c　$y = \tan x$ のグラフ

3.5.3 三角関数の基本的な公式

ここでは三角関数の値に関する最も基本的な公式を説明します。公式を鵜呑みにするのではなく、その意味を十分考えて下さい。

最初は最もよく知られた関係式です。sin 関数と cos 関数の定義から以下の関係を得ます。

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1 \qquad (3.5)$$

角度の符号を変えることは、$y \to -y$ と変えることです。これを用いると以下の関係が得られます。

$$\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta \qquad (3.6)$$

次に、$\theta \to \pi - \theta$ とすることは、$x \to -x$ とすることです。それ故、以下の関係が示されます。

$$\sin(\pi - \theta) = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{-x}{r} = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \qquad (3.7)$$

また、$\theta \to \pi + \theta$ とすることは、同時に $x \to -x,\ y \to -y$ とすることに相当しますので、以下の関係も求まります。

$$\sin(\pi + \theta) = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = \frac{-x}{r} = -\cos\theta\ ,$$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta \qquad (3.8)$$

最後に、$\theta \to \pi/2-\theta$ とすることは、x と y を入れ換えることに相当しています。それ故、以下の関係が得られます。

$$\sin(\pi/2-\theta)=\frac{x}{r}=\cos\theta$$

$$\cos(\pi/2-\theta)=\frac{y}{r}=\sin\theta$$

$$\tan(\pi/2-\theta)=\frac{\sin(\pi/2-\theta)}{\cos(\pi/2-\theta)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta} \qquad (3.9)$$

以上の関係は覚えておけばそれに越したことはありませんが、その意味からいつでも導けるようになっておくことが重要です。

3.5.4 加法定理 **[Skip OK]**

ここでは、三角関数の中で多少厄介な加法定理について述べます。加法定理とは２つの角度を足し合わせた場合、三角関数の値が元の角度とどのような関係にあるのかを示す定理です。

図 3-13 は加法定理を図的に証明しようとしたものです。

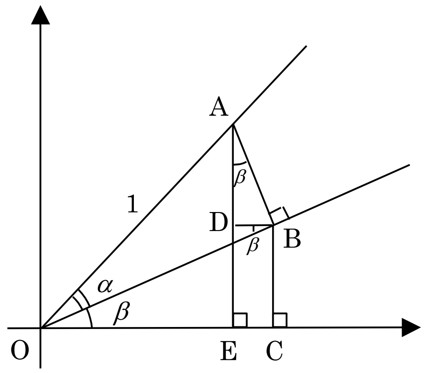


図 3-13 加法定理

さて、直線 OA の距離を $\overline{\mathrm{OA}}=1$ としますと、求めるべきものは以下となります。

$$\sin(\alpha+\beta)=\overline{\mathrm{AE}}, \quad \cos(\alpha+\beta)=\overline{\mathrm{OE}}$$

ここで、次の関係を見てみましょう。

$$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos\beta+\overline{\mathrm{OB}}\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{OC}}-\overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{OB}}\cos\beta-\overline{\mathrm{AB}}\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

これより、sin と cos に対する加法定理が示されました。

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (3.10a)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (3.10b)$$

tangent 関数に対する加法定理はその定義と上の関係から、以下のように導かれます。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

最後の式の分母分子を$\cos\alpha\cos\beta$で割って、$\sin\alpha/\cos\alpha=\tan\alpha$等を用いると以下を得ます。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \tag{3.10c}$$

問題

$\pi/6+\pi/4=5\pi/12$, $\pi/4-\pi/6=\pi/12$の関係を利用して、$5\pi/12$, $\pi/12$のときの三角関数の値を求めよ。

解答

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1),\quad \cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1),\quad \tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$$
$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1),\quad \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1),\quad \tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$$

倍角と半角の公式

加法定理で、$\alpha=\beta=\theta$とすると、以下の倍角の公式が求まります。

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \tag{3.11}$$

半角の公式を求めるには、上の２番目の関係で$\theta\to\theta/2$としたものを以下のように書き換えます。

$$\cos\theta=\cos^2\theta/2-\sin^2\theta/2$$
$$=2\cos^2\theta/2-1$$
$$=1-2\sin^2\theta/2$$

ここに、$\sin^2\theta/2+\cos^2\theta/2=1$の関係を用いています。これらより、以下の公式が求められます。

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2},\quad \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2} \tag{3.12}$$