

経営科学

福山平成大学経営学科

福井正康

1. 経営科学とは【第1回】

経営科学の位置付け

全く同じ意味ではないが、以下のような名前の授業は似た内容である。

経営科学、経営工学、OR、経営数学（どれも本学で実際使われていたもの）

個人的には、以下のように考えている。

OR と経営数学は近く、数学的な色彩が強い。内容は以下に代表される。

数理計画法、待ち行列理論、ゲーム理論 等

経営工学はそれに経営管理の考えを加え、内容を応用的にして、数学的色彩を弱めたもの。内容は以下のようなものである。

OR+品質管理、在庫管理、スケジュール管理 等

経営科学はこれをさらに広くし、入門的な香りを加えた感じ。内容は以下のようなものである。

経営工学+意思決定論、統計分析 等

以上は私の頭の中の概念であり、他にもいろいろな考え方がある。

この授業の取り組み

本学では、他に意思決定論や実用統計などの授業があるため、経営工学の内容を学ぶこととする。

2. 線形計画法 (Linear Programming, LP) 【第2回】

2.1 LP の例

問題

原料の供給量の範囲内で、利益が最大となる製品の生産量は？

原料 \ 製品	1	2	原料の供給量 (kg)
A	1	3	60
B	3	4	100
C	2	1	50
製品 1 単位当りの利益 (万円)	5	6	

問題の定式化

目的関数 (objective function)

$$z = 5x_1 + 6x_2 \quad \text{最大化}$$

制約条件 (constraints)

$$x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

入力書式

$$z=5*x1+6*x2 \quad \text{max}$$

$$x1+3*x2<=60$$

$$3*x1+4*x2<=100$$

$$2*x1+x2<=50$$

$$x1, x2 \geq 0$$

最適解

x1	x2	Z
20	10	160

問題 1

以下の線形計画問題の初期シンプレックス表と最適解を求めよ。

目的関数 $z = x_1 + 2x_2 + x_3$ 最大化

$$\text{制約条件} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 600 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 300 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

最適解

x1	x2	x3	Z
60	180	0	420

問題 2

製品 1 と 2 の製造のためには 3 つの原料 A, B, C が必要である。各製品 1 単位製造するために必要な各原料の量 (kg)、各原料の供給量の上限 (kg) 及び、各製品 1 単位生産するごとの利益 (万円) は以下の表の通りである。原料の供給量の範囲内で、利益が最大となる各製品の生産量 (単位) はいくらか。解答は少数で表せ。

	製品 1	製品 2	原料供給量上限
原料 A	1.5	3.2	60
原料 B	3.4	4.3	100
原料 C	2.1	1.4	50
利益 (万円)	5.2	6.3	

x_1 x_2

目的関数

$$Z = 5.2x_1 + 6.3x_2 \quad \text{最大化}$$

制約条件

$$\begin{cases} 1.5x_1 + 3.2x_2 \leq 60 \\ 3.4x_1 + 4.3x_2 \leq 100 \\ 2.1x_1 + 1.4x_2 \leq 50 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

最適解

製品 1	製品 2	利益
17.5644	9.3677	150.3513

2.2 シンプレックス法 (Simplex Method) 【第3回】

目的関数 (objective function)

$$z = 5x_1 + 6x_2 \quad \text{利益の最大化}$$

制約条件 (constraints)

$$x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

スラック変数 (slack variable) x_3, x_4, x_5 を導入して以下の問題を考える。

Step 0

$$z = 5x_1 + 6x_2 \quad (z - 5x_1 - 6x_2 = 0)$$

$$x_1 + [3x_2] + x_3 = 60$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 100$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 50$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

解は

$$x_1 = 0, x_2 = 0,$$

$$x_3 = 60, x_4 = 100, x_5 = 50$$

$$\rightarrow z = 0$$

特徴

x_3, x_4, x_5 基底変数(basic variable) 制約式の中に1回だけ現れる

x_1, x_2 非基底変数(non-basic variable) 値が0

目的関数の式には非基底変数だけが現れる

x_1, x_2 どちらの変数を正にしたら z を増加させるのに効率が良いか?

答 係数が最大のもの x_2 (左辺に移した場合は最小のもの)

x_2 はどこまで増やせるか?

1 式 $60/3=20$, 2 式 $100/4=25$, 3 式 50

20 より大きくすると $x_3 < 0$ となる。

以上より、 $x_2 \rightarrow 20$ とするが、同時に $x_3 \rightarrow 0$ ともなる。

式の変形 (x_2 を基底変数に、 x_3 を非基底変数にするように)

1 式の x_2 の係数を1にする。

$$\frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 20$$

他の制約式から x_2 を消す。

$$\frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_3 + x_4 = 20$$

$$\frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 + x_5 = 30$$

目的関数式から x_2 を消す。

$$z - 3x_1 + 2x_3 = 120$$

以上の操作をピボット操作(pivot operation)という。

ピボット操作はサイクル(cycle)という名前で回数を数える。

Step 1

$$z = 3x_1 - 2x_3 + 120 \quad (z - 3x_1 + 2x_3 = 120)$$

$$1/3 x_1 + x_2 + 1/3 x_3 = 20$$

$$[5/3 x_1] - 4/3 x_3 + x_4 = 20$$

$$5/3 x_1 - 1/3 x_3 + x_5 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

解は

$$x_1 = 0, x_3 = 0,$$

$$x_2 = 20, x_4 = 20, x_5 = 30$$

$$\rightarrow z = 120$$

以後同様な操作を進める

Step 2

$$z = 2/5 x_3 - 9/5 x_4 + 156 \quad (z - 2/5 x_3 + 9/5 x_4 = 156)$$

$$x_2 + 3/5 x_3 - 1/5 x_4 = 16$$

$$x_1 - 4/5 x_3 + 3/5 x_4 = 12$$

$$x_3 - x_4 + x_5 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

解は

$$x_3 = 0, x_4 = 0,$$

$$x_1 = 12, x_2 = 16, x_5 = 10$$

$$\rightarrow z = 156$$

Step 3

$$z = -7/5 x_4 - 2/5 x_5 + 160 \quad (z + 7/5 x_4 + 2/5 x_5 = 160)$$

$$x_2 + 2/5 x_4 - 3/5 x_5 = 10$$

$$x_1 - 1/5 x_4 + 4/5 x_5 = 20$$

$$x_3 - x_4 + x_5 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

解は

$$x_4 = 0, x_5 = 0,$$

$$x_1 = 20, x_2 = 10, x_3 = 10$$

$$\rightarrow z = 160$$

これは、 x_4, x_5 を大きくしたら z の値は小さくなる。

$$x_4 = 0, x_5 = 0,$$

$$x_1 = 20, x_2 = 10, x_3 = 10 \quad \text{のとき} \quad \text{最大値 } z = 160$$

2.3 シンプレックス表

数式のままでは見にくいので、表を使って計算を進める。

問題

以下のシンプレックス表を完成させよ。但し、 $x_3=SL1, x_4=SL2, x_5=SL3$ である。

回数	基底変数	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右辺
0	z	-5	-6	0	0	0	0
	x_3	1	(3)	1	0	0	60
	x_4	3	4	0	1	0	100
	x_5	2	1	0	0	1	50
1	z	-3	0	2	0	0	120
	x_2	1/3	1	1/3	0	0	20
	x_4	(5/3)	0	-4/3	1	0	20
	x_5	5/3	0	-1/3	0	1	30
2	z	0	0	-2/5	9/5	0	156
	x_2	0	1	3/5	-1/5	0	16
	x_1	1	0	-4/5	3/5	0	12
	x_5	0	0	1	-1	1	10
3	z	0	0	0	7/5	2/5	160
	x_2	0	1	0	2/5	-3/5	10
	x_1	1	0	0	-1/5	4/5	20
	x_3	0	0	1	-1	1	10

最適解

x_1	x_2	z
20	10	160

2.4 シンプレックス法の幾何学的意味

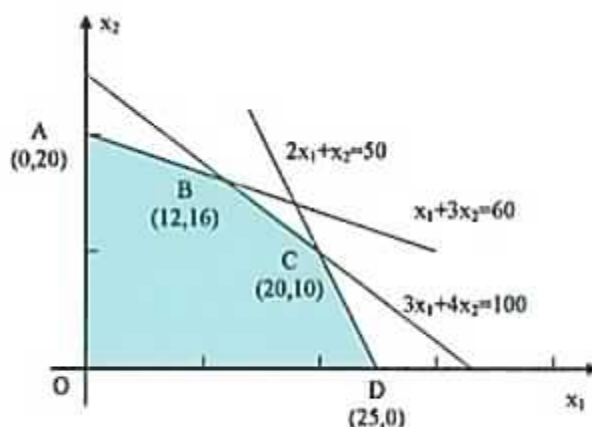


図 シンプレックス法の幾何学的意味

$$\begin{array}{ll}
 x_1 + 3x_2 \leq 60 & x_2 \leq -\frac{1}{3}x_1 + 20 \\
 3x_1 + 4x_2 \leq 100 & \rightarrow x_2 \leq -\frac{3}{4}x_1 + 25 \quad \text{の領域を横切り、} \\
 2x_1 + x_2 \leq 50 & x_2 \leq -2x_1 + 50
 \end{array}$$

$$z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow x_2 = -\frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{6}z \quad \frac{1}{6}z \text{ (切片) を最大にする直線を考える。}$$

各ステップの x_1, x_2 の値をたどってみる。

Step 0 → Step 1 (Cycle 1)

$$x_1 = 0, x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 20 \quad \text{点 O} \rightarrow \text{点 A}$$

Step 1 → Step 2 (Cycle 2)

$$x_1 = 0, x_2 = 20 \rightarrow x_1 = 12, x_2 = 16 \quad \text{点 A} \rightarrow \text{点 B}$$

Step 2 → Step 3 (Cycle 3)

$$x_1 = 12, x_2 = 16 \rightarrow x_1 = 20, x_2 = 10 \quad \text{点 B} \rightarrow \text{点 C}$$

シンプレックス法は、各頂点をたどって、最適解に導く手法である。

線形計画問題とシンプレックス表【第3回】

例

以下の線形計画問題の初期シンプレックス表と最適解を求めよ。

$$\text{目的関数} \quad z = x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \text{最大化}$$

$$\text{制約条件} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 600 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 300 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

初期シンプレックス表

	x1	x2	x3	SL1	SL2		
<Z>	-1	-2	-1	0	0	=	0
SL1	1	3	2	1	0	=	600
SL2	2	1	2	0	1	=	300

最適解

x1	x2	x3	Z
60	180	0	420

問題 1

以下の線形計画問題の初期シンプレックス表と最適解を求めよ。

$$\text{目的関数} \quad z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad \text{最大化}$$

$$\text{制約条件} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 400 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 300 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

初期シンプレックス表

	x1	x2	x3	SL1	SL2		
<Z>	-2	-2	-3	0	0	=	0
SL1	3	2	1	1	0	=	400
SL2	2	1	2	0	1	=	300

最適解

x1	x2	x3	Z
0	166.6667	66.6667	533.3333

問題2

製品1と2の製造のためには3つの原料A, B, Cが必要である。各製品1単位製造するために必要な各原料の量(kg)、各原料の供給量の上限(kg)及び、各製品1単位生産するごとの利益(万円)は以下の表の通りである。原料の供給量の範囲内で、利益が最大となる各製品の生産量(単位)はいくらか。解答は少数で表せ。

	製品1	製品2	原料供給量上限
原料A	1	2.2	40
原料B	2	4.1	60
原料C	2.5	2.3	50
利益(万円)	3.1	4.2	

1) 目的関数を書け。(最大化/最小化も書くこと)

$$z = 3.1x_1 + 4.2x_2 \quad \text{最大化}$$

2) 制約式を書け。

$$\begin{cases} x_1 + 2.2x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + 4.1x_2 \leq 60 \\ 2.5x_1 + 2.3x_2 \leq 50 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3) 最適解を求めよ。

製品1	製品2	利益
11.8584	8.8496	73.9292

2.5 標準的な線形計画問題【第4回】

標準的な線形計画問題とは？

- 1) 最大化問題である
- 2) 右辺が非負
- 3) 変数が非負
- 4) 不等号の向きが「 $\leq$ 」

目的関数

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n : \text{最大化}$$

制約条件

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$$

係数の条件

$$b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \cdots, b_m \geq 0$$

2.6 等号条件の線形計画問題

例

目的関数

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \text{最大化}$$

制約条件

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 60$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

シンプレックス法の適用（可能か？）

$$z - 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \quad \text{最大化}$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 60$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 40$$

これでは、初期可能解として、 $x_4 = 60, x_5 = 40$ と出来ない（他の合計が0になる）。

そこで、別の初期可能解を見つける方法が必要になる。

初期可能解を見つけるために、元の問題から離れ、新たに以下の問題を考える。

$$w = x_4 + x_5 \quad \text{最小化}$$

$$z - 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 60$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 40$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

これは、うまくゆけば、 $x_4 = x_5 = 0$ の解が得られるが、2つの問題がある。

1) 目的関数に変数 x_4, x_5 が含まれる。

2) 最大化問題でない。

最初の問題解決のために、制約条件を用いて目的関数からこれらの変数を消す。

$$w - x_4 - x_5 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 60$$

$$+) \quad x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 40$$

$$w + 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 100 \quad \text{最小化}$$

このままでも、問題は解けるが、標準的な線形計画問題に直すために、両辺に -1 を掛けて最大化問題にする。

$$-w - 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -100 \quad \text{最大化}$$

以上のことから次のように定式化される。

$$-w - 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -100 \quad \text{第1段階目的関数 最大化}$$

$$z - 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 60$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 40$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

基底変数を x_4, x_5 から他の変数へ移すことが目的

シンプレックス表による計算

第1段階

Step	基底変数	x1	x2	x3	x4	x5	右辺
0	-w	-2	-6	-3	0	0	-100
	z	-3	-2	-1	0	0	0
	x4	1	2	2	1	0	60
	x5	1	[4]	1	0	1	40

1	-w	-1/2	0	-3/2	0	3/2	-40
	z	-5/2	0	-1/2	0	1/2	20
	x4	1/2	0	[3/2]	1	-1/2	40
	x2	1/4	1	1/4	0	1/4	10
2	-w	0	0	0	1	1	0
	z	-7/3	0	0	1/3	1/3	100/3
	x3	1/3	0	1	2/3	-1/3	80/3
	x2	1/6	1	0	-1/6	1/3	10/3

注) この段階で基底変数は x_4, x_5 から x_3, x_2 に移った。

ここで、 $x_4 = x_5 = 0$ であり、これら2つの変数を取り除いても、基底形式は保たれている。そこで、さらに計算を進める。

第2段階

Step	基底変数	x1	x2	x3	右辺
2	z	-7/3	0	0	100/3
	x3	1/3	0	1	80/3
	x2	1/6	1	0	10/3
3	z	0	14	0	80
	x3	0	-2	1	20
	x1	1	6	0	20

最適解 $x_1 = 20, x_2 = 20, x_3 = 0$ のとき $z = 80$

問題（制約条件に等号と不等号の混じる例）

以下の線形計画問題を解け。

目的関数

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

最大化

制約条件

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

小数表示

解法

- 1) 等号条件があるので、2段階法を用いて解くが、初期シンプレックス表を求めよ。

第1段階初期シンプレックス表

基底変数	x1	x2	x3	SL1	AR1	AR2	右辺
-w	-3	-3	1	0	0	0	-4
z	-2	-3	-1	0	0	0	0
SL1	5	2	3	1	0	0	10
AR1	2	1	1	0	1	0	3
AR2	1	2	-2	0	0	1	1

- 2) -w の行はどの基底変数の行とどの基底変数の行から作られているか。

基底変数 [AR1] と基底変数 [AR2] の行から作られた (符号は逆)。

- 3) 第1段階から第2段階に移った最初のシンプレックス表を求めよ。そのときの基底変数も記入せよ。

基底変数	x1	x2	x3	SL1	右辺
z	0	-2	0	0	3
SL1	0	-1/5	0	1	12/5
x3	0	-3/5	1	0	1/5
x1	1	4/5	0	0	7/5

$$\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -0.2 & 0 & 1 & 2.4 \\ 0 & -0.6 & 1 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0.8 & 0 & 0 & 1.4 \end{array}$$

- 4) 最適解を求めよ。

最適解

x1	x2	x3	z
0	1.75	1.25	6.5

問題 1

以下の線形計画問題を解け。

目的関数

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \text{最大化}$$

制約条件

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 60$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- 1) 等号条件があるので、2段階法を用いて解くが、初期シンプレックス表を求めよ。

第1段階初期シンプレックス表

基底変数	x1	x2	x3	AR1	AR2	右辺
-w	-2	-6	-3	0	0	-100
z	-3	-2	-1	0	0	0
AR1	1	2	2	1	0	60
AR2	1	4	1	0	1	40

- 2) 第1段階から第2段階に移った最初のシンプレックス表を求めよ。そのときの基底変数も記入せよ。

基底変数	x1	x2	x3	右辺
z	-2.3333	0	0	23.333
x3	0.3333	0	1	26.666
x2	0.1666	1	0	3.333

- 3) 最適解を求めよ。

最適解

x1	x2	x3	z
20	0	20	80

問題2

以下の線形計画問題を解け。

目的関数

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

最大化

制約条件

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- 1) 等号条件があるので、2段階法を用いて解くが、初期シンプレックス表を求めよ。

第1段階初期シンプレックス表

基底変数	x1	x2	x3	SL1	AR1	AR2	右辺
-w	-3	-5	1	0	0	0	-8
z	-2	-3	-4	0	0	0	0
SL1	5	2	3	1	0	0	10
AR1	2	3	1	0	1	0	5
AR2	1	2	-2	0	0	1	3

- 2) 第1段階から第2段階に移った最初のシンプレックス表を求めよ。そのときの基底変数も記入せよ。

基底変数	x1	x2	x3	SL1	右辺
z	0.375	0	0	0	5.375
SL1	2.375	0	0	1	6.375
x3	0.125	0	1	0	0.125
x2	0.625	1	0	0	1.625

- 3) 最適解を求めよ。

最適解

x1	x2	x3	z
0	1.625	0.125	5.375

2.7 その他の線形計画問題【第5回】

1) 最小化問題の場合

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \text{最小化の場合}$$

$$-z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n \quad \text{最大化として解いてもよい。}$$

2) 右辺が負の場合

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i < 0 \quad \text{の場合}$$

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n = -b_i > 0 \quad \text{として解く。}$$

3) 変数に非負条件がない場合

$$x_i \geq 0 \quad \text{でない場合}$$

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, \quad x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0 \quad \text{として変数を置き換えて解く。}$$

4) 不等号の向きが逆の場合

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \geq 0 \quad \text{の場合}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+j} = b_i \quad \text{として、スラック変数を入れ、}$$

等号制約問題として解く。

問題 以下の線形計画問題から初期シンプレックス表と最適解を求めよ。

1) $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$ 最大化

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 20$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

初期シンプレックス表

Step	基底変数	x1	x2	x3	xs4	xs5	xa6	xa7	右辺
0	-w	-5	1	-2	0	1	0	0	-7
	z	-2	-3	-1	0	0	0	0	0
	xs4	3	2	5	1	0	0	0	20
	xa6	4	-2	1	0	0	1	0	5
	xa7	1	1	1	0	-1	0	1	2

最適解

x1	x2	x3	Z
3.5714	4.6429	0	21.0714

2) $z = x_1 - 2x_2$ 最大化

$$2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1 \geq 0$$

注) 非負条件の付かない変数 x_2 については、変数名を $x2l$ のように、後ろに
! 記号を付ける。

初期シンプレックス表

Step	基底変数	x1	x2+	x2-	xs4	xa5	xa6	右辺
0	-w	-3	0	0	1	0	0	-6
	z	-1	2	-2	0	0	0	0
	xa5	2	1	-1	-1	1	0	2
	xa6	1	-1	1	0	0	1	4

最適解

x1	x2	Z
2	-2	6

演習 1

以下の線形計画問題を解け。

目的関数

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

最大化

制約条件

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$

$$2x_1 + \cancel{4}x_2 + \cancel{2}x_3 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + \cancel{2}x_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

最適解

x1	x2	x3	Z
1	1	1	10

演習 2

以下の線形計画問題の最適解を求めよ。

目的関数

$$z = 5x_1 - 2x_2$$

最大化

制約条件

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

最適解

x1	x2	Z
3.2	-1.8	19.6

2.8 双対問題【第6回】

1. 双対問題とは

主問題

$$z = 5x_1 + 6x_2 \quad \text{最大化}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

双対問題

$$z' = 60y_1 + 100y_2 + 50y_3 \quad \text{最小化}$$

$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 6$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

以上を行列で書くと、

主問題

$$z = \mathbf{c}'\mathbf{x} \quad \text{最大化}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

双対問題

$$z' = \mathbf{b}'\mathbf{y} \quad \text{最小化}$$

$$\mathbf{A}'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0$$

双対定理

主問題あるいは双対問題が最適解を持てば、他方も最適解を持ち、それらの最適目的関数値は一致する。

2. 一般的な双対問題

$$z = 2x_1 + x_2 \quad \text{最大化}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 4x_2 = 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z' = 4y_1 + 5y_2 \quad \text{最小化}$$

$$2y_1 + y_2 \geq 2$$

$$3y_1 + 4y_2 \geq 1$$

$$y_1 \geq 0$$

等号 $\Leftrightarrow$ 非負条件なし

$$z = 2x_1 + x_2 \quad \text{最大化}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$z' = 4y_1 + 5y_2 \quad \text{最小化}$$

$$2y_1 + y_2 \geq 2$$

$$3y_1 + 4y_2 = 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

非負条件なし $\Leftrightarrow$ 等号

$$z = 2x_1 + x_2 \quad \text{最大化}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z' = 4y_1 - 5y_2 \quad \text{最小化}$$

$$2y_1 - y_2 \geq 2$$

$$3y_1 - 4y_2 \geq 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

($-x_1 - 4x_2 \leq -5$) 右辺の正值性は双対問題を作る際には問わない。

問題 以下の主問題の双対問題を示せ。

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \text{最大化}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 = 2.3333 \quad x_2 = 0$$

$$x_3 = 1.6667 \quad z = 8.6667$$

解答

$$z' = 4y_1 + 3y_2 \quad \text{最小化}$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 3$$

$$2y_1 + y_2 \geq 2$$

$$y_1 - y_2 = 1$$

$$y_2 \geq 0$$

$$y_1 = 1.6667 \quad y_2 = 0.6667$$

$$z' = 8.6667$$

双対問題を議論する場合には、右辺の正值性を取り除き、不等号を最大化問題の場合「 $\leq$ 」に、最小化問題のときには「 $\geq$ 」方向に向かせて考える。

2.9 結果解釈のための指標

被約費用 (reduced cost)

最終目的関数における変数の係数

(基底変数の組を変化させず、変数値を微小量変化させた際の目的関数の変化率)

双対価格 (dual prices)

双対問題の解

(これは右辺を微小量変化させた際の目的関数の変化率でもある)

感度分析の結果

基底変数の組が変化しない、目的関数または右辺定数の範囲

問題 1

1) 次の線形計画問題の最適解を求めよ。

目的関数 $z = 3x_1 + 2x_2$ 最大化

$$\text{制約条件} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 50 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

x_1	x_2	z
22	6	78

2) 上の問題の双対問題を作り、最適解を求めよ。

目的関数 $z' = 50y_1 - 20y_2$ 最小化

$$\text{制約条件} \begin{cases} 2y_1 - 2y_2 \geq 3 \\ y_1 + 4y_2 \geq 2 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

y_1	y_2	z'
1.6	0.1	78

問題 2

1) 次の線形計画問題の最適解を求めよ。

目的関数 $z = 2x_1 + 3x_2$ 最小化

$$\text{制約条件} \begin{cases} -x_1 + x_2 = 60 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 40 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

x_1	x_2	z
-16	44	100

2) 上の問題の双対問題を作り、最適解を求めよ。

目的関数 $z' = 60y_1 + 40y_2$ 最大化

$$\text{制約条件} \begin{cases} -y_1 + 3y_2 = 2 \\ y_1 + 2y_2 \leq 3 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

y_1	y_2	z'
1	1	100

2.10 輸送問題への応用

例 工場で生産した商品を各販売会社に配送する問題

表 単位商品当りの輸送コストと輸送量

	会社 1	会社 2	会社 3	会社 4	生産高
工場 1	(7) x_{11}	(3) x_{12}	(2) x_{13}	(10) x_{14}	18
工場 2	(9) x_{21}	(3) x_{22}	(6) x_{23}	(8) x_{24}	22
工場 3	(8) x_{31}	(7) x_{32}	(8) x_{33}	(6) x_{34}	26
需要	12	20	16	18	66

() 内の数字を単位商品当りの輸送コストとして、生産高と需要との関係を満たしながら、総輸送コストを最小にする輸送量 x_{ij} を求める。

線形計画法による定式化

工場 i から会社 j への単位商品当りの輸送コストを c_{ij} 、

工場 i の生産高を a_i 、会社 j の需要を b_j とすると。

$$\text{目的関数} \quad z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} \quad \text{最小化}$$

$$\text{制約条件} \quad \sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} \geq 0$$

具体的には $z = 7x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 10x_{14} + 9x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23} + 8x_{24} + 8x_{31} + 7x_{32} + 8x_{33} + 6x_{34}$ 最小化

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 18 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 22 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 26 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 12 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 16 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 18 \end{cases}$$

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{34} \geq 0$$

解答

	会社 1	会社 2	会社 3	会社 4
工場 1	2	0	16	0
工場 2	2	20	0	0
工場 3	8	0	0	18

最適輸送費用 [296] 千円

輸送問題独特の解法もあるが、ここでは計算機を用いる。

問題 1

3つの工場で生産した商品を3つの販売会社に輸送する。そのときの製品1単位当りの運送費用（括弧の付いた値，千円）、各工場の生産高（商品単位）、各会社への納入量（商品単位）は以下の表の通りである。全体の運送費用を最も安くするためには、各工場から各会社への輸送量をいくらにすればよいか。またそのときの輸送費用はいくらか。

	会社 1	会社 2	会社 3	生産高
工場 1	(4) x_{11}	(4) x_{12}	(5) x_{13}	15
工場 2	(3) x_{21}	(4) x_{22}	(5) x_{23}	14
工場 3	(6) x_{31}	(5) x_{32}	(4) x_{33}	13
納入量	12	14	16	42

解答

	会社 1	会社 2	会社 3
工場 1	0	12	3
工場 2	12	2	0
工場 3	0	0	13

輸送費用 [159] 千円

問題 2

上の問題で、工場3から会社3への輸送量は8単位を超えないものとする、各工場から各会社への輸送量はどうか。またそのときの輸送費用はいくらか。

解答

	会社 1	会社 2	会社 3
工場 1	0	7	8
工場 2	12	2	0
工場 3	0	5	8

輸送費用 [169] 千円

演習 1

3つの工場で生産した商品を4つの販売会社に配送する問題で、単位商品当たりの輸送コストと輸送量が以下の表のように与えられているとき、各工場から各会社への最適な輸送量を求めよ。

表 単位商品当たりの輸送コストと輸送量

	会社 1	会社 2	会社 3	会社 4	生産高
工場 1	(4) x_{11}	(6) x_{12}	(3) x_{13}	(9) x_{14}	270
工場 2	(6) x_{21}	(4) x_{22}	(8) x_{23}	(5) x_{24}	350
工場 3	(4) x_{31}	(7) x_{32}	(9) x_{33}	(5) x_{34}	200
需要	230	300	180	110	820

1) 目的関数を求めよ。

$$z = 4x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 9x_{14} + 6x_{21} + 4x_{22} + 8x_{23} + 5x_{24} + 4x_{31} + 7x_{32} + 9x_{33} + 5x_{34} \quad \text{最小化}$$

2) 制約式を求めよ。

生産高による制限

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 270 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 350 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 200 \end{cases}$$

需要による制限

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 230 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 180 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110 \end{cases}$$

非負条件

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{34} \geq 0$$

注) 直接表に打ち込むのが分かりにくい場合は、そのまま数式で打ち込んでもよい。

- 3) 最適な輸送量を求めよ。

	会社1	会社2	会社3	会社4
工場1	90	0	180	0
工場2	0	300	0	50
工場3	140	0	0	60

- 4) 最適な輸送量のときの費用を求めよ。

最適輸送費用 [3210]

- 5) 事故によって工場1から会社1への輸送ができなくなった。荷物は他の経路に回すことになったが、そのときの最適な輸送量を求めよ。

	会社1	会社2	会社3	会社4
工場1	0	90	180	0
工場2	30	210	0	110
工場3	200	0	0	0

- 6) 5) の場合の費用を求めよ。

最適輸送費用 [3450]

難 (事故の設定は元に戻すこと)

- 7) 今後の輸送費用のことを考えて、工場1～工場3の生産高を調整しようと思う。
現在の需要 820 をそのまま考えて、最少の輸送費用となるように各工場の生産高 z_1, z_2, z_3 を決定せよ。またそのときの最適輸送費用はいくらか。

工場1 (z_1)	工場2 (z_2)	工場3 (z_3)	最適輸送費用
410	410	0	3210

- 8) この結果から輸送費用改善のために各工場の生産高を変える必要があるか。 [ある・(ない)]

2.11 割当問題への応用【第9回】

例

5人の社員と5種類の職がある。社員*i*を職*j*につけた場合、会社に以下の利益をもたらすことが分かっている。総利益を最大にする組合せを求めよ。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

	職 1	職 2	職 3	職 4	職 5	計
社員 1	(1) x_{11}	(3) x_{12}	(4) x_{13}	(5) x_{14}	(2) x_{15}	1
社員 2	(3) x_{21}	(5) x_{22}	(2) x_{23}	(2) x_{24}	(6) x_{25}	1
社員 3	(1) x_{31}	(2) x_{32}	(5) x_{33}	(8) x_{34}	(5) x_{35}	1
社員 4	(2) x_{41}	(3) x_{42}	(4) x_{43}	(6) x_{44}	(2) x_{45}	1
社員 5	(2) x_{51}	(5) x_{52}	(1) x_{53}	(3) x_{54}	(4) x_{55}	1
計	1	1	1	1	1	

利益の係数の行列 C を利益行列という。

目的関数 $z = (x_{11} + \cdots + 2x_{15}) + \cdots + (2x_{51} + \cdots + 4x_{55})$ 最大化

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{i5} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$

制約条件 $x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{5j} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, 5)$

$$x_{ij} = \{0, 1\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 5)$$

この問題では $x_{ij} = \{0, 1\}$ の条件を以下の非負条件に変えても同じ結果になることが知られている。

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 5)$$

従って、通常の線形計画法として解かれる。

最適解は

	職 1	職 2	職 3	職 4	職 5
社員 1	0	0	/	0	0
社員 2	0	0	0	0	/
社員 3	0	0	0	/	0
社員 4	/	0	0	0	0
社員 5	0	/	0	0	0

として、 $z = 4 + 6 + 8 + 2 + 5 = 25$ 総利益 [25]

問題

上記の問題で、利益行列 $C = (c_{ij})$ が以下で与えられるとき、以下の表を埋め、最適解を求めよ。

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & 10 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

	職 1	職 2	職 3	職 4	職 5	計
社員 1	(0) x_{11}	(6) x_{12}	(10) x_{13}	(2) x_{14}	(3) x_{15}	1
社員 2	(9) x_{21}	(0) x_{22}	(10) x_{23}	(5) x_{24}	(7) x_{25}	1
社員 3	(8) x_{31}	(6) x_{32}	(0) x_{33}	(4) x_{34}	(1) x_{35}	1
社員 4	(3) x_{41}	(4) x_{42}	(9) x_{43}	(0) x_{44}	(7) x_{45}	1
社員 5	(6) x_{51}	(5) x_{52}	(2) x_{53}	(7) x_{54}	(0) x_{55}	1
計	1	1	1	1	1	

解答

	職 1	職 2	職 3	職 4	職 5
社員 1	0	0	1	0	0
社員 2	1	0	0	0	0
社員 3	0	1	0	0	0
社員 4	0	0	0	0	1
社員 5	0	0	0	1	0

として、総利益 [39]

3. 多目的線形計画法

3.1 多目的線形計画法とは

線形計画法では、1つの量（目的関数）について最適な解を求めたが、現実にはいくつかの量をできるだけ良い値（最良化妥協解）にするような解決法を求められる場合も多い。このような問題に対して、適用されるのが多目的線形計画法である。

例

原料の供給量の範囲内で、利益及び広告効果をできるだけ大きくする製品の生産量は？

原料 \ 製品	1	2	原料の供給量 (kg)
A	1	3	60
B	3	4	100
C	2	1	50
製品1 単位当りの利益 (万円)	5	6	
広告効果	2	3	

問題の定式化

目的関数 (objective function)

$$z_1 = 5x_1 + 6x_2 \quad \text{利益の最大化}$$

$$z_2 = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{広告効果の最大化}$$

制約条件 (constraints)

$$x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

3.2 具体的な計算

例 上の問題

各目的関数についての最適値を求める。

	x_1	x_2	z
目的関数 1	20	10	160
目的関数 2	12	16	72

ペイオフ表を求める。

	x_1	x_2	z_1	z_2
目的関数 1	20	10	160	70
目的関数 2	12	16	156	72

最良な妥協解を求める。

新しい線形計画法 各目的関数の充足率の合計を新しい目的関数とする。

目的関数

$$z = \frac{160 - (5x_1 + 6x_2)}{160} + \frac{72 - (2x_1 + 3x_2)}{72} = 2 - 0.059028x_1 - 0.079167x_2 \quad \text{最小化}$$

制約条件は前に同じ

最良化妥協解

x_1	x_2	z
12	16	0.025

最良化充足率を求める。

	最大/最小	最適化値	妥協値	充足率
目的関数 1	最大化	160	156	0.975
目的関数 2	最大化	72	72	1

場合によって、目的関数にウェイトをおく場合もある。例えばウェイトを 2 : 1 とすると最良化妥協解と最良化充足率は以下のように変わる。

最良化妥協解

x_1	x_2	z
20	10	0.0278

最良化充足率

	最大/最小	最適化値	妥協値	充足率
目的関数 1	最大化	160	160	1
目的関数 2	最大化	72	70	0.972

問題

以下の多目的線形計画問題について問いに答えよ。

目的関数

$$z_1 = 8x_1 + 20x_2 + 24x_3 + 48x_4 \quad \text{最大化}$$

$$z_2 = 5x_2 + 10x_3 + 6x_4 \quad \text{最大化}$$

制約条件

$$3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 150$$

$$10x_1 + 16x_3 \leq 250$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 120$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

1) 各目的関数についての最適値

	x_1	x_2	x_3	x_4	z_1, z_2
目的関数 1	0	0	15.6250	34.7917	2045
目的関数 2	0	10.4679	15.6250	27.9464	375.2679

2) ペイオフ表を求めよ。

	x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2
目的関数 1	0	0	15.6250	34.792	2045	365
目的関数 2	0	10.4679	15.6250	27.946	192.786	375.268

3) 各目的関数のウェイトを1にした最良化問題の目的関数を求めよ。

$$z = [-0.003912] x_1 + [-0.023104] x_2 + [-0.038384] x_3 + [-0.039460] x_4 + [2]$$

4) 制約条件は前と同じか。[同じ・違う]

5) 上の目的関数の解（最良化妥協解）を求めよ。

x_1	x_2	x_3	x_4	z
0	0	15.6250	34.7917	0.0274

6) 最良化妥協解についての各目的関数の充足率を求めよ。

	最適化値	妥協値	充足率
目的関数 1	2045	2045	1
目的関数 2	375.268	365	0.973

演習

原料の供給量の範囲内で、利益、広告効果、安定供給性ができるだけ大きくなるように製品の生産量を求めたい。多目的線形計画法を用いて以下の問いに答えよ。

原料 \ 製品	1	2	3	原料の供給量 (kg)
A	1	3	2	160
B	2	4	5	200
C	2	1	1	80
製品単位当利益	4	6	8	
広告効果	7	3	2	
安定供給性	1	3	3	

- 1) この多目的線形計画問題の目的関数を max/min を付けて示せ。

$$\text{目的関数 1 : } z_1 = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \quad \text{max}$$

$$\text{目的関数 2 : } z_2 = 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 \quad \text{max}$$

$$\text{目的関数 3 : } z_3 = x_1 + 3x_2 + 3x_3 \quad \text{max}$$

- 2) 制約条件を示せ。

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 160$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 200$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 80$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- 3) 各目的関数についての最適値を示せ。

	x_1	x_2	x_3	z
目的関数 1	25	0	30	340
目的関数 2	40	0	0	280
目的関数 3	0	50	0	150

- 4) ペイオフ表を求めよ。

	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	z_3
目的関数 1	25	0	30	340	235	115
目的関数 2	40	0	0	160	280	40
目的関数 3	0	50	0	300	150	150

- 5) 最良化問題の目的関数を求めよ。

$$z = [-0.04343] x_1 + [-0.04876] x_2 + [-0.050672] x_3 + [3]$$

- 6) 目的関数は最大化か最小化か。[最大化・最小化]

制約条件は前と同じか。[同じ・違う]

- 7) 上の目的関数の解 (最良化妥協解) を求めよ。

x_1	x_2	x_3	z
20	40	0	0.1969

- 8) 最良化妥協解についての各目的関数の充足率を求めよ。

	最適化値	妥協値	充足率
目的関数 1	340	320	0.941
目的関数 2	280	260	0.929
目的関数 3	150	140	0.933

- 9) 利益を重んじるため目的関数に 5 : 1 : 1 のウェイトを置きたい。最良化問題の目的関数はどんな形か、以下に示せ。

$$z = \left(\frac{340 - (4x_1 + 6x_2 + 8x_3)}{340} \right) \times 5 + \left(\frac{280 - (\cancel{2x_1 + 4x_2}^{7x_1 + 3x_2 + 2x_3})}{280} \right) \times 1 + \left(\frac{150 - (x_1 + 3x_2 + 3x_3)}{150} \right) \times 1$$

- 10) 最良化問題の目的関数は最終的にどうなるか。パソコンによる答えを書け。

$$z = [-0.090490] x_1 + [-0.118750] x_2 + [-0.144770] x_3 + [7]$$

- 11) 10) の目的関数の解 (最良化妥協解) を求めよ。

x_1	x_2	x_3	z
25	0	30	0.3940

- 12) 10) の最良化妥協解についての各目的関数の充足率を求めよ。

	最適化値	妥協値	充足率
目的関数 1	340	340	1
目的関数 2	280	235	0.839
目的関数 3	150	115	0.767

4. DEA (Data Envelopment Analysis: 包絡分析法)

4.1 DEA とは

通常、事業体（企業など）の生産や経営の効率は「産出÷投入」の形で考えられる。しかし、産出や投入に何を取るべきかはあいまいであるし、複数の項目を取った場合でも、どの項目に重点を置くべきか疑問が残る。

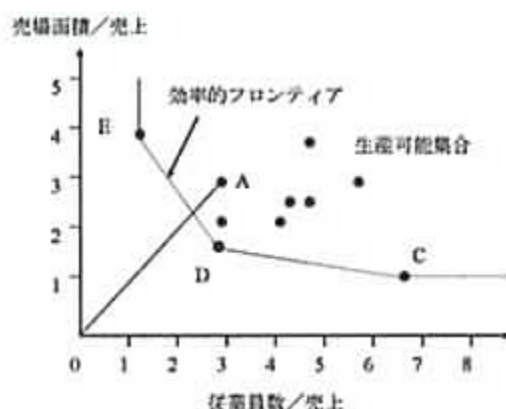
DEAは各事業体の得意な項目に重点を置いて効率を計るように考えられた手法である。

例 投入：従業員数、売場面積 産出：売上 として店舗の効率性を調べる。

店舗	A	B	C	D	E	F	G	H	I
従業員数	20	42	20	26	20	15	45	55	42
売場面積	300	360	50	260	800	120	600	500	350
売上	20	24	10	26	40	12	30	40	28

企業によって、従業員数で効率化を進めている場合と売り場面積で工夫を進めている場合がある。

比較の方法



解答（有意集合の数値は似ている程度を表す値、大きいほど似ている）

	効率値	優位集合
A	0.857	D(0.549), E(0.143)
B	0.632	C(0.253), D(0.826)
C	1.000	C(1.000)
D	1.000	D(1.000)
E	1.000	E(1.000)
F	0.923	C(0.185), D(0.391)
G	0.600	D(0.923), E(0.150)
H	0.774	C(0.258), D(1.439)
I	0.750	C(0.350), D(0.942)

4.2 DEA の定式化

分数計画問題

x_1 = 従業員数, x_2 = 売場面積, y = 売上

$$\text{目的関数 } r = \frac{uy_o}{v_1x_{1o} + v_2x_{2o}} \quad \text{最大化}$$

$$\begin{aligned} \text{制約式 } & \frac{uy_j}{v_1x_{1j} + v_2x_{2j}} \leq 1 \quad (j=1,2,\dots,n) \\ & u, v_1, v_2 \geq 0 \end{aligned}$$

分数計画問題から線形計画問題へ

入力モデル

$$\text{目的関数 } z = uy_o \quad \text{最大化}$$

$$\begin{aligned} \text{制約式 } & v_1x_{1o} + v_2x_{2o} = 1 \\ & uy_j - v_1x_{1j} - v_2x_{2j} \leq 0 \quad (j=1,2,\dots,n) \\ & u, v_1, v_2 \geq 0 \end{aligned}$$

出力モデル

$$\text{目的関数 } 1/z = v_1x_{1o} + v_2x_{2o} \quad \text{最小化}$$

$$\begin{aligned} \text{制約式 } & uy_o = 1 \\ & uy_j - v_1x_{1j} - v_2x_{2j} \leq 0 \quad (j=1,2,\dots,n) \\ & u, v_1, v_2 \geq 0 \end{aligned}$$

この線形計画問題 (入力モデル) は通常以下の双対問題から解が求められる。

$$\text{目的関数 } z' = 1 \cdot \theta \quad (\text{制約式右辺利用}) \quad \text{最小化}$$

$$x_{1o}\theta - \sum_{j=1}^n x_{1j}\lambda_j \geq 0 \quad (v_1 \text{ の係数利用})$$

$$x_{2o}\theta - \sum_{j=1}^n x_{2j}\lambda_j \geq 0 \quad (v_2 \text{ の係数利用})$$

$$\sum_{j=1}^n y_j\lambda_j \geq y_o \quad (u \text{ の係数利用})$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n)$$

以下の制約式を満たす領域 (x_1, x_2, y) を生産可能集合という。

$$x_1 - \sum_{j=1}^n x_{1j}\lambda_j \geq 0, \quad x_2 - \sum_{j=1}^n x_{2j}\lambda_j \geq 0, \quad y - \sum_{j=1}^n y_j\lambda_j \leq 0$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n)$$

$(x_{1o}\theta, x_{2o}\theta, y_o)$ は生産可能集合内で最大の θ を取るように選ぶ。

問題 1

Samples\DEA2.txt はあるグループの店舗についてのデータである。入力を従業員数と売場面積、出力を売上と会員数として（CCR モデル）で各店舗の効率性を調べ、それらの効率値とその優位集合（数値も含めて）を求めよ。

店舗	A	B	C	D	E	F	G	H
従業員数	20	42	20	26	20	15	45	55
売場面積	300	360	50	260	800	120	600	500
売上	20	24	10	26	40	12	30	40
会員数	522	734	340	433	525	350	826	913

解答

	効率値	優位集合
A	1.000	A(1.000)
B	0.742	A(0.129) F(1.907)
C	1.000	C(1.000)
D	1.000	D(1.000)
E	0.933	A(1.400)
F	1.000	F(1.000)
G	0.721	A(1.237) F(0.515)
H	0.813	A(0.263) D(0.768) F(1.365)

問題 2

Samples\DEA3.txt は東京都各区の図書館のデータである。このデータを用いて、入力を蔵書数（千冊）と職員数（人）、出力を登録者数（人）と貸出冊数（千冊）として各図書館の効率を DEA を用いて検討し、いくつかの図書館について効率値と有意集合（名前のみ）答えよ。

	効率値	優位集合
千代田	0.226	世田谷
中央	0.635	世田谷
台東	0.540	世田谷
荒川	0.593	板橋, 世田谷
港	0.911	世田谷
文京	0.745	板橋, 世田谷
墨田	0.650	板橋, 世田谷
渋谷	0.539	板橋

4.3 種々のモデル

簡単のため、1 入力、1 出力の場合の生産可能集合（網掛け部分）を考える。

主問題

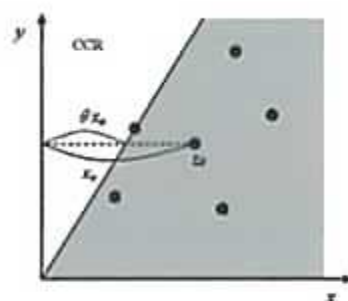
$$\begin{aligned} \text{目的関数} \quad & z = uy_0 && \text{最大化} \\ \text{制約式} \quad & vx_0 = 1 \\ & uy_j - vx_j \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ & u, v \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{目的関数} \quad & z' = \theta && \text{最小化} \\ & x_0\theta - \sum_{j=1}^n x_j\lambda_j \geq 0 && (1) \\ & \sum_{j=1}^n y_j\lambda_j \geq y_0 && (2) \\ & \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

生産可能集合 (x, y)

$$x - \sum_{j=1}^n x_j\lambda_j \geq 0, \quad y - \sum_{j=1}^n y_j\lambda_j \leq 0, \quad \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

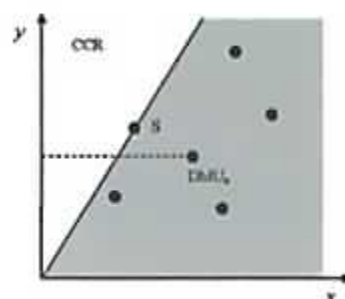


(1),(2)式を満たす最小の θ （効率に等しい）は縦軸と各事業体及び領域の境界までの距離の比で表される。

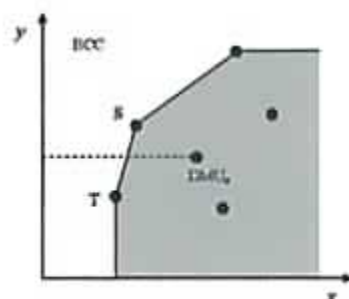
様々な基本的なモデルはこの生産可能集合に以下の条件を付けて得られる。

$$L \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq U \quad (0 \leq L \leq 1, U \geq 1)$$

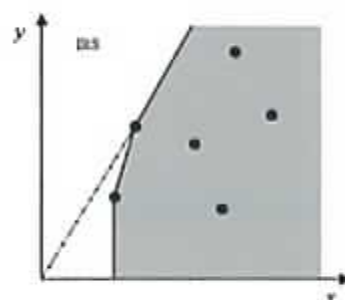
CCR モデル $(L=0, U=\infty)$	規模の収穫一定を仮定したモデル (入出力が同比率で拡大すると効率と同じ)
IRS モデル $(L=1, U=\infty)$	規模の収穫増加を仮定したモデル (入出力が同比率で拡大すると効率は下がる)
DRS モデル $(L=0, U=1)$	規模の収穫減少を仮定したモデル (入出力が同比率で拡大すると効率は上がる)
BCC モデル $(L=1, U=1)$	規模の小さいときは IRS、大きいときは DRS
GRS モデル $(0 \leq L \leq 1, U \geq 1)$	利用者が L と U の値を与える。



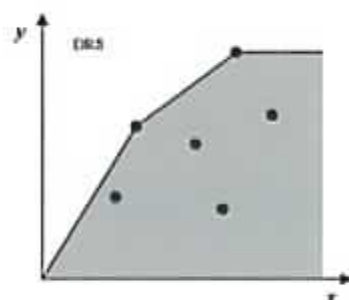
CCR モデル



BCC モデル



IRS モデル



DRS モデル

出力モデルの場合

主問題

目的関数 $z = vx_o$ 最小化

制約式 $uy_o = 1$

$-uy_j + vx_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$

$u, v \geq 0$

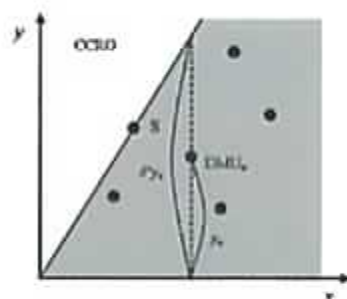
双対問題

目的関数 $z' = \theta' (= 1/\theta)$ 最大化

$y_o\theta' - \sum_{j=1}^n y_j\lambda_j \leq 0$

$\sum_{j=1}^n x_j\lambda_j \leq x_o$

$\lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$



まとめ

各事業体の効率を知るには → D 効率値

各事業体に似た効率的な事業体は → 優位集合

優位集合のうちどちらに近い → 優位集合名のカッコ内の数字の大きい方

各事業体の入出力でどの項目が評価されたか → 仮想入出力で大きい値のもの

モデルの特徴

- CCR モデル** 規模の収穫一定を仮定したモデル
(入出力が同比率で拡大すると効率は同じ)
- IRS モデル** 規模の収穫増加を仮定したモデル
(入出力が同比率で拡大すると効率は下がる)
- DRS モデル** 規模の収穫減少を仮定したモデル
(入出力が同比率で拡大すると効率は上がる)
- BCC モデル** 規模の小さいときは IRS、大きいときは DRS

問題 1

samples\DEA2.txt はあるグループの店舗についてのデータである。入力を従業員数と売場面積、出力を売上と会員数として CCR, IRS, DRS, BCC の各モデルで各店舗の効率性を調べ、それらの効率値を求めよ。

店舗	A	B	C	D	E	F	G	H
従業員数	20	42	20	26	20	15	45	55
売場面積	300	360	50	260	800	120	600	500
売上	20	24	10	26	40	12	30	40
会員数	522	734	340	433	525	350	826	913

解答

効率値	CCR	IRS	DRS	BCC
A	1.000	1.000	1.000	1.000
B	0.742	0.742	1.000	1.000
C	1.000	1.000	1.000	1.000
D	1.000	1.000	1.000	1.000
E	0.933	0.933	1.000	1.000
F	1.000	1.000	1.000	1.000
G	0.721	0.721	1.000	1.000
H	0.813	0.813	1.000	1.000

問題 2

Samples\DEA3.txt は東京都各区の図書館のデータである。このデータを用いて、入力を蔵書数（千冊）と職員数（人）、出力を登録者数（人）と貸出冊数（千冊）として各図書館の効率を DEA を用いて検討し、以下の問いに答えよ。

- 1) CCR モデルを用いて港区、文京区、墨田区の効率値とそれらの優位集合を求めよ。

	効率値	優位集合
港区	0.911	板橋, 世田谷
文京区	0.745	世田谷

- 2) BCC モデルを用いて港区、文京区、墨田区の効率値とそれらの優位集合を求めよ。

	効率値	優位集合
港区	1.000	港
文京区	0.885	江東, 世田谷

- 3) 入力と出力を同じ比率で大きくすると以下のモデルで効率はどうなるか。

CCR	一定・上がる・下がる・どちらともいえない
BCC	一定・上がる・下がる・ <u>どちらともいえない</u>
IRS	一定・上がる・ <u>下がる</u> ・どちらともいえない
DRS	一定・ <u>上がる</u> ・下がる・どちらともいえない

- 4) BCC モデルは規模が小さいとき IRS・DRS モデルに似て、規模が大きくなると IRS・DRS モデルに似てくる。

以後は CCR モデルを用いて質問に答えよ。

- 5) 千代田区で余分な入力とは 蔵書数・職員数 で、不足している出力は 登録者数・貸出冊数 である。
- 6) 千代田区の入力では 蔵書数・職員数 が主に評価され、出力では 登録者数・貸出冊数 が主に評価されている。
- 7) 千代田区を効率的にする案として、まず入力を 0.2260 倍にする。その後、蔵書数を 3.537 千冊減らし、貸出冊数を 13.840 千冊増やす。
- 8) この案を実行すると、蔵書数は 33.4192 千冊、貸出冊数は 119.161 千冊となる。

以後は CCRO モデルを用いて質問に答えよ。

- 9) CCR モデルと比べて効率に差があるか。[ある・ない]
- 10) 千代田区を効率的にする案として、まず出力を 4.425 倍にする。その後、蔵書数を 15.650 千冊減らし、貸し出し冊数を 61.237 千冊増やす。