５．待ち行列【第１回】

5.1 待ち行列とは

発端　電話交換機の混雑を表すモデル（A.K.Erlang）

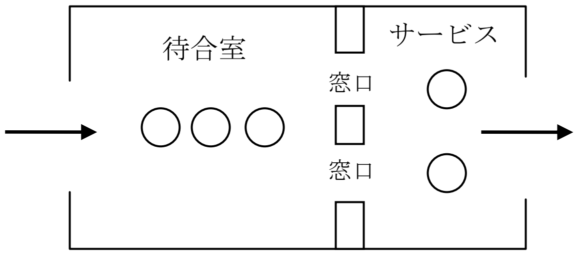


図　待ち行列のシステム

（窓口 2，滞在数（システム内）5 人，待ち数 3 人）

待ち行列のシミュレーションに必要なデータ

1) 客の到着の仕方は？（単位時間当たりの到着数の分布とその平均は？）
   言い換えると、到着時間間隔の分布とその平均は？
2) サービス時間の分布とその平均は？
3) 窓口の数は？
4) 待合室の人数制限は？

待ち行列の求めたい主な結果

1) 客の平均待ち時間
2) 待ち行列の平均的長さ
3) 窓口の稼働率
4) ある一定時間以上待つ確率

5.2 サービス時間の分布

1) 確定分布

工程の所要時間が一定である

サービス率　　　　μ　（単位時間当りのサービス件数）

サービス時間　　　$1/\mu$

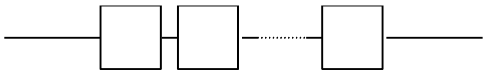
2) 指数分布（到着人数に着目するとポアッソン分布）

平均サービス率　　　μ　（単位時間当りの平均サービス件数）

平均サービス時間　　$1/\mu$

密度関数　　　$f(t) = \mu e^{-\mu t}$　　$t \geq 0$

3) n 次のアーラン分布



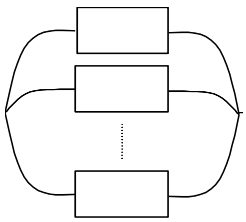
1 工程の平均サービス率　　　$n\mu$

1 工程の平均サービス時間　　$1/n\mu$

全体の平均サービス時間　　　$1/\mu$（次数が高いほどゆらぎは小さい）

密度関数　　　$f(t) = (n\mu)^n t^{n-1} e^{-n\mu t} / (n-1)!$　　$t \geq 0$

4) n 次の超指数分布



1 工程の平均サービス率　　　μ_i

1 工程の平均サービス時間　　$1/\mu_i$

工程を選ぶ確率　　　r_i

全体の平均サービス時間　　　$\sum_{i=1}^{n} r_i / \mu_i$

密度関数　　　$f(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i \mu_i e^{-\mu_i t}$　　$t \geq 0$

5.3 ケンドール（**Kendall**）の記号

待ち行列を特徴付ける記号表示

A/B/s [(r)]

A, B：　到着とサービス時間間隔の分布

D：確定分布　M：指数分布（ポアソン分布）　E_k：k 次アーラン分布

H：超指数分布　G：一般の分布

s：　サービス窓口数

r：　待合室に入れる人数（待ち行列の長さの制限・それ以上増えると並べない）

$r = \infty$（長さに制限がない）の場合、省略できる。

例

M/M/1　指数到着、指数サービス、窓口１つ（行列に制限なし）

D/M/2 (5)　確定到着、指数サービス、窓口２つ、行列５人まで

5.4 M/M/1 待ち行列

平均到着数　λ　（平均到着時間間隔　$1/\lambda$）

平均サービス数　μ　（平均サービス時間　$1/\mu$）

窓口数　c

注）以下　$\rho = \lambda/\mu c$ とする。

主な理論値

滞在数が n である確率　$P_n = \rho^n(1-\rho)$

待ち数平均　$L_q = \rho^2/(1-\rho)$

待ち時間平均　$W_q = L_q/\lambda$

滞在数平均　$L = \rho/(1-\rho)$

滞在時間平均　$W = L/\lambda$

滞在数分散　$\sigma_L^2 = \rho/(1-\rho)^2$

窓口空き確率　$P_e = P_0 = 1-\rho$

窓口稼動率　$P_f = \sum_{i=1}^{\infty} P_i = \rho$

サービスまで t より長く待つ確率 $P(t) = \rho e^{-(1-\rho)\mu t}$

問題

１時間に平均３人到着し、４人サービスが終了するシステムがある。M/M/1（∞）を仮定して以下の値を上の理論から求めよ。

1) システム内に誰もいない確率（滞在数 0）　［　　　　　］
2) サービスを受けている人だけがいる確率　［　　　　　］
3) システム内に 5 人いる確率　［　　　　　］
4) 待っている人がいない確率（滞在数 0 か 1）　［　　　　　］
5) 滞在数の平均　［　　　　　］
6) 待ち数の平均　［　　　　　］
7) 滞在時間の平均　［　　　　　］
8) 待ち時間の平均　［　　　　　］

5.5 定常的な待ち行列【第２回】

例

　前節の問題をシミュレーションで解いてみよう。

解答

【計算条件】

試行回数 = 100　　時間 = 100　　分割数 = 100

平均到着数 = 3　　平均サービス数 = 4

窓口の数（1 列） = 1

初期行列長さ = 0

到着分布　　 = ポアソン（指数）

サービス分布 = 指数（ポアソン）

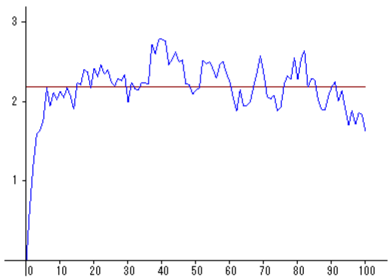
【計算結果】

全到着数　 = 305.560

平均到着数 = 3.056

全損失数　 = 0.000

損失割合　 = 0.00%



待ち数平均　 = 2.178　　理論値 = 2.250

滞在数平均　 = 2.935　　理論値 = 3.000

待ち時間平均 = 0.703　　理論値 = 0.750

滞在時間平均 = 0.951　　理論値 = 1.000

窓口空き確率 = 0.243　　理論値 = 0.250

問題

　以下の待ち行列は定常的であるか。定常的ならば、平均待ち数と平均待ち時間をシミュレーション実行結果から求めよ。但し、乱数は Seed を 1、実行時間や分割数などはデフォルト（変更しないまま）とせよ。

１）M/M/1，到着数 4，サービス数 5

　　定常的で［ある・ない］，平均待ち数［　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　］

２）M/M/1，到着数 5，サービス数 4

　　定常的で［ある・ない］，平均待ち数［　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　］

３）M/M/2，到着数 6，サービス数 4，窓口に全体で 1 列に並ぶ場合
定常的で［ある・ない］，平均待ち数［　　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　　］
４）M/M/2，到着数 6，サービス数 4，窓口ごとに複数列で並ぶ場合
定常的で［ある・ない］，平均待ち数［　　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　　］
５）複数窓口の場合、どちらが効率は良いか。
［1 列に並ぶ場合・複数列で並ぶ場合］

６）M/M/1，到着数 3，サービス数 4　　　平均待ち数［　　　　　　］
７）M/D/1，到着数 3，サービス数 4　　　平均待ち数［　　　　　　］
８）M/E_2/1，到着数 3，サービス数 4　　　平均待ち数［　　　　　　］
９）上の３つの待ち行列の記号を平均待ち数が少ない順に並べて書け。
［　　　　　　］［　　　　　　］［　　　　　　］

10）M/M/1(5)，到着数 3，サービス数 4（待ち人数が 5 人までの場合）
平均待ち数［　　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　　］
11）上の場合、行列に並ばすに帰ってしまった人は全体の何%か。
[　　　　　]%

12）M/M/1，到着数 3，サービス数 4，最初にシステム内に 10 人並んでいる場合
定常的で［ある・ない］，平均待ち数［　　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　　］
13）前問の場合、システムが定常状態になるのにおよそ何単位時間かかるか。
約［　　　　］単位時間

演習

設定は上の問題と同じとし、単位時間を 1 分として、<u>単位に気を付け</u>、シミュレーション結果を示せ。
１）M/M/1，平均到着時間間隔 20 秒，平均サービス時間 15 秒
平均待ち数［　　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　　］<u>秒</u>
２）M/M/1，平均到着時間間隔 40 秒，平均サービス時間 24 秒
平均待ち数［　　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　　］<u>秒</u>
３）M/M/1，平均到着時間間隔 2 分，平均サービス時間 1 分 40 秒
平均待ち数［　　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　　］分

5.6 時間とともに変化する待ち行列【第３回】

例

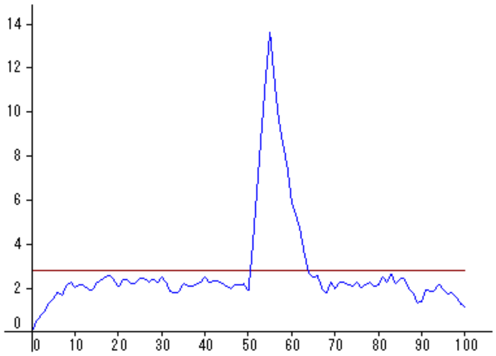
　単位時間当たりの到着数・サービス数、窓口数が以下のように時間的に変化するときの待ち行列の状態を調べる。（Samples¥待ち行列 1.txt）

時刻	到着数	サービス数	窓口数
0	3	4	1
50	6	4	1
55	6	4	2
100			

解答

【計算条件】
試行回数 ＝100　　時間 ＝100　　分割数 ＝100
初期行列長さ ＝0
到着分布　　 ＝ ポアソン（指数）
サービス分布 ＝ 指数（ポアソン）

【計算結果】
全到着数　 ＝447.690
平均到着数 ＝4.477
全損失数　 ＝0.000
損失割合　 ＝0.00%



待ち数平均　　＝2.786
滞在数平均　　＝3.915
待ち時間平均 ＝0.617
滞在時間平均 ＝0.869
窓口空き確率 ＝0.269

待ち数標準誤差　 ＝1.073
滞在数標準誤差　 ＝1.129
待ち時間標準誤差 ＝0.224
滞在時間標準誤差 ＝0.230

以下の問題では乱数の seed を 1 とすること。

問題１

ショッピングセンターのＡＴＭに、昼 12 時（時刻 0）から 12 時 20 分（時刻 20）までに 8 人、12 時 20 分から 40 分（時刻 40）までに 16 人、12 時 40 分から 13 時（時刻 60）までに 12 人ランダムに到着する。1 分当たりの処理人数が平均 0.7 人であるとき、単位時間を 1 分とし、M/M/1 を仮定して以下を求めよ。

１）各時間帯で 1 分当たりの到着数は何人か

12 時～12:20	12:20～12:40	12:40～13 時

２）最大の待ち人数はおよそいくらか　［　　　　　　］人

３）平均の待ち人数は何人か　［　　　　　　］人

４）平均の待ち時間は何分か　［　　　　　　］分

問題２

みどりの窓口で 60 分間に 72 人の客がランダムに到着するとする。サービス時間は 1 人平均 2 分で、窓口は 3 つ開いているものとする。単位時間を 1 分とし、M/M/n の 1 列を仮定して以下の問いに答えよ。シミュレーションの時間は 100 分とする。

１）1 分当たりの客の到着人数は何人か　［　　　　　　］人

２）1 分当たりのサービス人数は何人か　［　　　　　　］人

３）平均の待ち人数は何人か　［　　　　　　］人

４）平均の待ち時間は何分か　［　　　　　　］分

５）窓口の空き確率はいくらか［　　　　　　］

６）窓口の稼働率（１－空き確率）［　　　　　　］％

７）開始から 90 分後、1 台が故障して窓口が 2 つになった。その 10 分後にはおよそ何人の行列ができるか。　およそ［　　　　　　］人

演習問題【第４回】

問題３

シミュレーション時間を 100 単位時間、乱数の seed を 1 （プログラムの初期設定）として、M/M/1 の待ち行列について以下の問いに答えよ。ただし、単位時間を 1 分とすること。

１）平均到着時間間隔 20 秒，平均サービス時間 15 秒の場合について

単位時間に何人到着するか。［　　　　　　］人

単位時間に何人サービスが終わるか。［　　　　　　］人

待ち数の平均は何人か。［　　　　　　］人

待ち時間の平均は何分か。［　　　　　　］分

２）平均到着時間間隔 40 秒，平均サービス時間 24 秒

単位時間に何人到着するか。［　　　　　　］人

単位時間に何人サービスが終わるか。［　　　　　　］人

待ち数の平均は何人か。［　　　　　　］人

待ち時間の平均は何分か。［　　　　　　］分

問題４

あるスーパーのレジへの客の到着は全レジ合計で 10 分当たり以下の表のようである。

時間帯	3 時～4 時	4 時～5 時	5 時～6 時	6 時～7 時
到着人数	5	10	20	10

レジ打ちは一人平均 2.5 分、単位時間を 1 分とし、M/M/n の複数列を仮定して、以下の問いに答えよ。但し、計算結果に表示される待ち数は全体の窓口の合計である。

１）各時間帯の単位時間（1 分）当たりの客の到着数を求めよ。

3 時～4 時	4 時～5 時	5 時～6 時	6 時～7 時

２）レジ打ちについて単位時間（1 分）当たりのサービス数を求めよ。

［　　　　　］人

３）混雑しているときでも待ち数が伸びないように窓口を 6 つ開けた。3 時〜7 時までシミュレーションを行うとして以下を求めよ。

注）シミュレーション結果に表示される待ち数平均は全体の待ち数で、窓口当たりの待ち数ではない。

全体平均待ち数［　　　　　　］，窓口当たりの平均待ち数［　　　　　　］

平均待ち時間［　　　　　　］，窓口の空き確率［　　　　　　］

ピーク時の待ち数　約［　　　　　　］人

４）各時間帯のアルバイト数を調整して効率化を図りたい。それぞれ窓口数はいくらにすればよいか。但し、<u>各窓口当たりの</u>平均待ち数は 2 人以下（合計待ち数≦2×窓口数）となるようにしたい。

3 時〜4 時	4 時〜5 時	5 時〜6 時	6 時〜7 時

問題５

イベントのセールで会場後 0 分から 100 分までの 1 分間の到着数が以下の式で与えられているものとする。（小数点以下 3 桁とすること）

y = 6*exp(-x/10)+0.5

初期滞在数 15 人、1 人当たりの平均レジ時間を 2 分とし、窓口は 5 つあるとする。M/M/n の単数列を仮定して以下の問いに答えよ。

１）レジ 1 台当たり 1 分間の平均サービス数はいくらか。

［　　　　］人

２）最大の待ち数の発生は開場から何分後でおよそ何人か。

開場から［　　　　　］分後で、およそ［　　　　］人

３）待ち数の平均と待ち時間の平均はいくらか。

待ち数平均［　　　　］人、待ち時間平均［　　　　］分

４）待ち数が 25 人を超えると客が帰るとすると、これで帰る人の割合は何％になるか。

［　　　　］％

5.6 ポアソン到着（ランダムな到着）の理論

1. 確率の方程式

時刻 t までの到着状況はその後の到着状況に影響を与えない。(独立性)

λ ：単位時間当りの到着数

$P_n(t)$ ：時刻 t までに n 人到着している確率

時刻 t と $t+\Delta t$ 間の到着確率（Δt は微少時間とする。）

この間に到着する確率　　$\lambda\Delta t$

この間に到着しない確率　$1-\lambda\Delta t$

$P_n(t)$ の満たすべき式

$$P_0(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)P_0(t) \tag{1}$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t)$$

$$P_n(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)P_n(t) + \lambda\Delta t P_{n-1}(t) \tag{2}$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$\Delta t \to 0$ の極限では、

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda P_0(t) \tag{1)'}$$

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \tag{2)'}$$

但し、$P_0(0)=1,\ P_n(0)=0\ \ (n>0)$

2. 方程式の解

(1)'より、$P_0(t) = Ce^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$　　$\leftarrow\ P_0(0) = C = 1$

$P_n(t) = y_n(t)e^{-\lambda t}$ とおくと、(2)'より、

$$\frac{d}{dt}y_n(t) = \lambda y_{n-1}(t)$$

但し、$y_0(t)=1,\ \ y_n(0)=0\ \ (n>0)$

順次解いて、

$$y_1(t) = \lambda t$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 t^2$$

$$y_3(t) = \frac{1}{2\cdot 3}\lambda^3 t^3$$

一般に

$$y_n(t) = \frac{1}{n!}(\lambda t)^n$$

これより、 $$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

単位時間当り n 人到着する確率

$$P_n = P_n(1) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \qquad \text{ポアッソン分布}$$

3. 到着時間間隔の分布

時刻 t まで誰も到着していない確率を考える。

$$P_0(t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

時刻 t までに最初の客が到着する確率　$F(t)$

$$F(t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad \text{指数分布}$$

Poisson 到着は指数到着ともいう。

時刻 t から $t+dt$ までの間に最初の客が到着する確率　$dP(t)$

$$dP(t) = F(t+dt) - F(t) = \frac{F(t+dt)-F(t)}{dt}dt \xrightarrow[dt\to 0]{} \frac{dF}{dt}dt$$

5.7 M/M/1 型待ち行列の定常状態の理論

1. 確率の方程式

λ ：単位時間当りの到着数

μ ：単位時間当りのサービス数

$P_n(t)$ ：時刻 t にシステム内に n 人いる確率（サービス中も含む）

到着とサービス終了が Δt のうちに複数回起こることはないと仮定すると

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)\mu\Delta t \qquad (1)$$

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t \tag{2}$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t)$$

定常性　$P_r(t) \to P_r$　を仮定すると、

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \tag{3}$$

$$-(\lambda+\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = 0 \tag{4}$$

2. 解法

$\rho \equiv \lambda/\mu$ として、(3), (4) 式を変形する。

$$P_1 - \rho P_0 = 0$$

$$P_{n+1} - \rho P_n = P_n - \rho P_{n-1}$$

これらから、

$$P_{n+1} - \rho P_n = P_n - \rho P_{n-1} = \cdots = P_1 - \rho P_0 = 0$$

即ち、

$$P_n = \rho P_{n-1} = \rho^2 P_{n-2} = \cdots = \rho^n P_0$$

確率の合計より、

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i P_0 = P_0(1+\rho+\rho^2+\cdots) = \frac{P_0}{1-\rho} = 1 \qquad P_0 = 1-\rho$$

これから、

$$P_n = \rho^n P_0 = \rho^n (1-\rho)$$

窓口が空いている確率

$$P_{empty} = P_0 = 1-\rho$$

窓口の稼働率

$$P_{busy} = 1 - P_{empty} = \rho$$

5.6 諸量の計算

システム中の人数の平均

$$l_s = 0\cdot P_0 + 1\cdot P_1 + 2\cdot P_2 + 3\cdot P_3 \cdots = (1-\rho)(1\cdot\rho + 2\cdot\rho^2 + 3\cdot\rho^3 + \cdots)$$

$$= (1-\rho)\rho(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \cdots) = (1-\rho)\rho\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

注） $$S_1 = 1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots = \frac{1}{1-\rho}$$

$$S_2 = 1 + 2\rho + 3\rho^2 + \cdots = \frac{d}{d\rho}(\rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots)$$

$$= \frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{(1-\rho)+\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

システム中の人数の分散

$$u_s^2 = \sum_{i=0}^{\infty}(i - l_s)^2 P_i = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$ 証明略

待ち人数の平均

$$l_q = 0\cdot P_0 + 0\cdot P_1 + 1\cdot P_2 + 2\cdot P_3 + 3\cdot P_4 + \cdots$$

$$= (1-\rho)(\rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \cdots) = (1-\rho)\rho^2(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \cdots)$$

$$= (1-\rho)\rho^2\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

サービスが終わるまでの平均時間（厳密な計算ではない）

$$t_s = \frac{1}{\mu}\cdot P_0 + \frac{2}{\mu}\cdot P_1 + \frac{3}{\mu}\cdot P_2 + \cdots = \frac{1-\rho}{\mu}(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \cdots)$$

$$= \frac{1-\rho}{\mu}\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

注） $$t_s = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{l_s}{\lambda}$$

これに類似の関係は、平均待ち時間についても成り立っている。

平均待ち時間

$$t_q = \frac{l_q}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

5.8 定常的な待ち行列の主な理論値（まとめ）

平均到着数　λ

平均サービス数　μ

窓口数　c

注）以下　$\rho = \lambda / \mu c$ とします

M/M/1(∞)　注）（ ）内は滞在数

滞在数が n である確率　$P_n = \rho^n (1-\rho)$

待ち数平均　$L_q = \rho^2 / (1-\rho)$

待ち時間平均　$W_q = L_q / \lambda$

滞在数平均　$L = \rho / (1-\rho)$

滞在時間平均　$W = L / \lambda$

滞在数分散　$\sigma_L^2 = \rho / (1-\rho)^2$

窓口空き確率　$P_e = P_0 = 1-\rho$

窓口稼動率　$P_f = \sum_{i=1}^{\infty} P_i = \rho$

サービスまで T より長く待つ確率　$P(T > t) = \rho e^{-(1-\rho)\mu T}$

M/M/1(N)

$P_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$　として

滞在数が n である確率　$P_n = \dfrac{c^c}{c!} \rho^n P_0$

待ち数平均　$L_q = \rho^2 \dfrac{1 - N\rho^{N-1} + (N-1)\rho^N}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$

滞在数平均　$L = \rho \dfrac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$

滞在数分散　$\sigma_L^2 = \dfrac{\rho - (N+1)^2 \rho^{N+1}(1-\rho)^2 - 2\rho^{N+2} + \rho^{2N+3}}{(1-\rho)^2 (1-\rho^{N+1})^2}$

窓口空き確率　$P_e = P_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$

窓口稼動率　$P_f = \sum_{i=1}^{N} P_i = \dfrac{\rho(1-\rho^N)}{1-\rho^{N+1}}$

M/M/c(∞)

$$P_0 = \frac{1-\rho}{(1-\rho)\sum_{i=0}^{c}\frac{(c\rho)^i}{i!}+\frac{(c\rho)^c}{c!}\rho}$$ として

滞在数が n である確率 $P_n = \frac{(c\rho)^n}{n!}P_0 \quad (0 \le n \le c)$

$P_n = \frac{c^c}{c!}\rho^n P_0 \quad (c \le n \le \infty)$

待ち数平均 $L_q = \frac{\rho(c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2}P_0$

待ち時間平均 $W_q = L_q / \lambda$

滞在数平均 $L = L_q + c\rho$

滞在時間平均 $W = L/\lambda$

窓口稼働率 $P_f = \sum_{i=c}^{\infty}P_i = \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}P_0$

窓口空き確率 $P_e = \sum_{i=1}^{c-1}P_i = 1 - P_f$

M/M/c(N)　（一般的な場合）

$$P_0 = \frac{1-\rho}{(1-\rho)\sum_{i=0}^{c}\frac{(c\rho)^i}{i!}+\frac{(c\rho)^c}{c!}\rho-\frac{(c\rho)^c}{c!}\rho^{N-c+1}}$$ として

滞在数が n である確率 $P_n = \frac{(c\rho)^n}{n!}P_0 \quad (0 \le n \le c)$

$P_n = \frac{c^c}{c!}\rho^n P_0 \quad (c \le n \le N)$

待ち数平均 $L_q = \frac{\rho(c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2}[1-(N-c+1)\rho^{N-c}+(N-c)\rho^{N-c+1}]P_0$

待ち時間平均 $W_q = L_q / \lambda$

滞在数平均 $L = L_q + c\rho - \frac{c(c\rho)^c}{c!}\rho^{N-c+1}P_0$

滞在時間平均 $W = L/\lambda$

窓口稼働率 $P_f = \sum_{i=c}^{N}P_i = \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}(1-\rho^{N-c+1})P_0$

窓口空き確率 $P_e = 1 - P_f$

M/E$_k$/1(∞)

待ち数平均 $L_q = \dfrac{\rho^2}{2(1-\rho)}(1+1/k)$

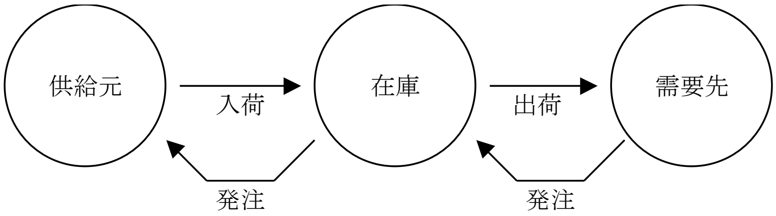
待ち時間平均 $W_q = L_q/\lambda$

滞在数平均 $L = L_q + \rho$

滞在時間平均 $W = L/\lambda$

６．在庫問題【第５回】

6.1 在庫問題とは



原料・中間原料・製品・商品　他

必要な情報

保管費用　h（円／日・個）　商品の単位は「個」とする。

発注費用　K（円）

調達期間（リードタイム）L（日）　：発注－入庫の間隔

出庫の量は？（確定的か確率的か？）

決定事項（重要な意思決定）

発注量（どれだけ発注するか？）　Q（個）

発注時期（いつの時点で発注するか？）　在庫の量 I または発注間隔 R

6.2 確定モデル

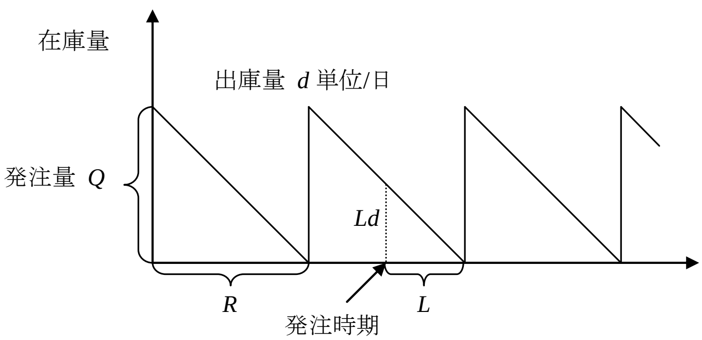
出庫量（確定）　d（個／日）　１日当たり出庫量

決定事項

発注量　Q（個）

発注間隔　$R = Q/d$（日）　［発注間隔＝発注量÷１日当たり出庫量］

（発注量が出庫で無くなるまでの日数と考える）



１回の発注までに発生する費用（発注費用＋平均在庫量×日数×保管費用）

$$Y = K + \frac{1}{2}Q \times R \times h = K + \frac{1}{2}Q\frac{Q}{d}h = K + \frac{Q^2 h}{2d}$$

単位時間（１日）に発生する費用（発生費用÷発注間隔）

$$y = \frac{Y}{R} = \frac{K}{R} + \frac{QhR}{2R} = \frac{Kd}{Q} + \frac{Qh}{2}$$

単位時間（１日）に発生する費用を最少化する発注量

$$\frac{dy}{dQ} = -\frac{Kd}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0 \qquad Q = \sqrt{\frac{2Kd}{h}}$$ ：経済的発注量

発注間隔

$$R = \frac{Q}{d} = \sqrt{\frac{2K}{dh}}$$

単位時間（１日）当りの費用

$$y = \frac{Kd}{Q} + \frac{Qh}{2} \quad \left(= \sqrt{\frac{Kdh}{2}} + \sqrt{\frac{Kdh}{2}} = \sqrt{2Kdh} \right)$$

例

発注費用 10,000 円、在庫保持費用 5 円／日・個、出庫 20 個／日、のとき経済的発注量と発注間隔、1 日当りの費用を求めよ。但し、Excel で $\sqrt{3} = 3\text{^}0.5$

解答

K = ［　　　　　］円　h = ［　　　　　］円／日・個　d = ［　　　　　］個／日

経済的発注量

$$Q = \sqrt{\frac{2Kd}{h}} = ［\qquad\qquad］$$ 個

発注間隔

$$R = \frac{Q}{d} = ［\qquad\qquad］$$ 日

1 日当り費用

$$y = \frac{Kd}{Q} + \frac{Qh}{2} = ［\qquad\qquad］$$ 円

注）経済的発注量については、異論も多い。

問題１

発注費用 8 千円、在庫保持費用 10 円／日・個、出庫 210 個／週、のとき以下の問いに答えよ。

１）単位を直して以下を求めよ。

K =［　　　　　　］円　　h =［　　　　　　］円／日・個　d =［　　　　　　］個／日

２）上の値を用いて以下を求めよ。

経済的発注量

$$Q = \sqrt{\frac{2Kd}{h}} = ［\qquad\qquad］個$$

発注間隔

$$R = \frac{Q}{d} = ［\qquad\qquad］日$$

1 日当り費用

$$y = \frac{Kd}{Q} + \frac{Qh}{2} = ［\qquad\qquad］円$$

問題２

ある原料について、発注費用 1 万円、在庫保持費用 2 千円／月・kg、出庫 100kg／週、のとき以下の問いに答えよ。但し 1 月は 30 日とすること。

１）単位を直して以下を求めよ。

K =［　　　　　　］円　h =［　　　　　　］円／日・kg　d =［　　　　　　］kg／日

２）上の値を用いて以下を求めよ。

経済的発注量

$$Q = \sqrt{\frac{2Kd}{h}} = ［\qquad\qquad］\mathrm{kg}$$

発注間隔

$$R = \frac{Q}{d} = ［\qquad\qquad］日$$

1 日当り費用

$$y = \frac{Kd}{Q} + \frac{Qh}{2} = ［\qquad\qquad］円$$

調達期間が２日のとき、在庫量がいくらになったら発注するか、図を見て考えよ。

［　　　　　　］個

6.3 定量発注方式【第６回】

必要な情報

　発注量　　　　Q

　　経済的発注量を使う場合は（以後利用しない）

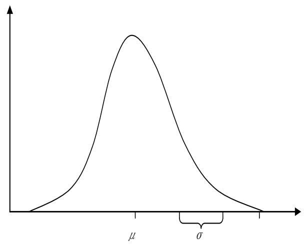
　　　保管費用　h（円／日・個）　商品の単位は「個」とする。

　　　発注費用　K（円）

　調達期間（リードタイム）L（日）　：発注ー入庫の間隔

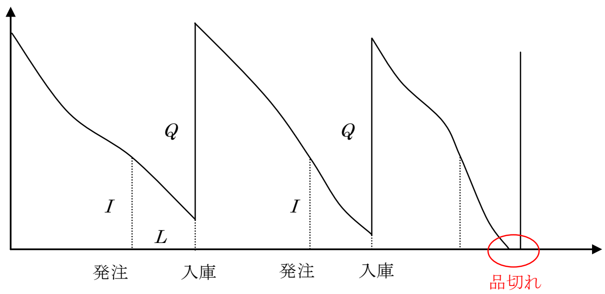
　１日当たりの出庫（確率的）　$N(\mu,\sigma^2)$

　　平均 μ（個）、分散 σ^2（標準偏差 σ 個）の正規分布を仮定



決定事項

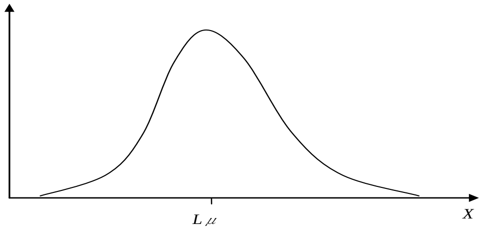
　<u>在庫量がどこまで減ったら発注するか？</u>（確定モデルでは $L\mu$ になったとき）



　　納品までの期間（調達期間）L の出庫量 X　（１日当たりの出庫量：$N(\mu,\sigma^2)$）

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_L \sim N(L\mu, L\sigma^2)\ \text{分布}$$

　　　　　平均 $L\mu$，分散 $L\sigma^2$（標準偏差 $\sqrt{L}\sigma$）の正規分布

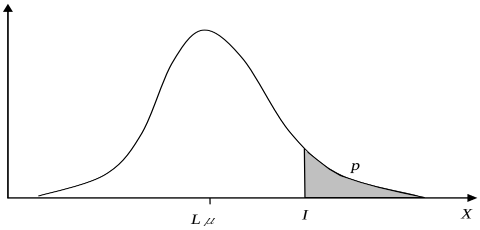


在庫Iの時点で発注して品切れを起こす確率p

＝納品までの期間にI以上の出庫がある確率＝$P(X > I)$

$$p = 1 - normsdist\left(\frac{I - L\mu}{\sqrt{L}\sigma}\right)$$

説明（考えよ）



$$X' = \frac{X - L\mu}{\sqrt{L}\sigma} \sim N(0,1)\text{分布,}\quad\text{であり、}X > I \Leftrightarrow X' > \frac{I - L\mu}{\sqrt{L}\sigma}\quad\text{より、}$$

$$p = P(X \geq I) = P\left(X' \geq \frac{I - L\mu}{\sqrt{L}\sigma}\right) = 1 - normsdist\left(\frac{I - L\mu}{\sqrt{L}\sigma}\right)$$

発注点の在庫Iを大きく取ると品切れ確率が減るが、保管費用は増える。

→　何らかの基準でIを決めたい。

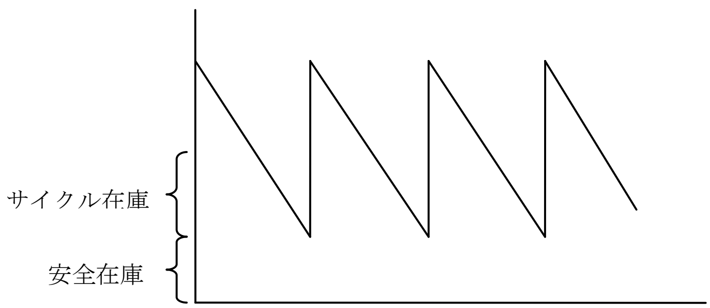
戦略的に例えば、許される品切れ確率をαとすると、

$$1 - normsdist\left(\frac{I - L\mu}{\sqrt{L}\sigma}\right) = \alpha\quad\text{より、}\quad normsdist\left(\frac{I - L\mu}{\sqrt{L}\sigma}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{I - L\mu}{\sqrt{L}\sigma} = normsinv(1 - \alpha) = \lambda \quad \leftarrow \quad \text{安全係数}$$

これより、$I = L\mu + \lambda\sqrt{L}\sigma$となり、在庫が$L\mu + \lambda\sqrt{L}\sigma$になった時点で発注する。

$Q/2$をサイクル在庫、$\lambda\sqrt{L}\sigma$を安全在庫、サイクル在庫＋安全在庫を理論在庫という。（以後、間違える学生が多かったので$\lambda\sigma\sqrt{L}$の形に書く）



公式　定量発注方式

１日当たりの出庫　平均 μ （個)、分散 σ^2 （標準偏差 σ 個）の正規分布

発注量：Q　調達期間（リードタイム)：L （日）　品切れの危険率：$\alpha \times 100\%$

安全係数を $\lambda = normsinv(1-\alpha)$ として、

在庫が $I = L\mu + \lambda\sigma\sqrt{L}$ になった時点（発注点）で、Q の量を発注する。

サイクル在庫：$Q/2$、安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L}$、理論在庫：$Q/2 + \lambda\sigma\sqrt{L}$

例

1 日当たりの出庫の平均 20 個、標準偏差 5 個、調達期間 7 日、発注量 200 個のとき、定量発注方式として以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は 5%以下とする。

１）安全係数を求めよ。

$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［　　　　　　　］

２）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫：$Q/2$ ＝［　　　　　　　］（個）

安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［　　　　　　　］（個）

理論在庫：$Q/2 + \lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［　　　　　　　］（個）

３）発注点在庫量を求めよ。

$I = L\mu + \lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［　　　　　　　］（個）

問題 1

1 日当たりの出庫の平均 30 個、標準偏差 4 個、調達期間 3 日、発注量 150 個のとき、定量発注方式として以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は 1%以下とする。

１）安全係数を求めよ。

$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［　　　　　　　］

２）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫：$Q/2$ ＝［　　　　　　　］（個）

安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［　　　　　　　］（個）

理論在庫：$Q/2 + \lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［　　　　　　　］（個）

３）発注点在庫量を求めよ。

$I = L\mu + \lambda\sigma\sqrt{L} =$ ［　　　　　　　　］（個）

問題２

出庫は1週間当たり平均200個、標準偏差20個、調達期間1週間、発注量500個、のとき、定量発注方式として以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は3%以下とする。

１）1日当たりの出庫の平均と標準偏差を求めよ。

ヒント：標準偏差の場合の計算は　1週間の値÷$\sqrt{7}$

平均［　　　　　　　　］　　標準偏差［　　　　　　　　］

２）安全係数を求めよ。

$\lambda = normsinv(1-\alpha) =$ ［　　　　　　　　］

３）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫：$Q/2 =$ ［　　　　　　　　］（個）

安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L} =$ ［　　　　　　　　］（個）

理論在庫：$Q/2 + \lambda\sigma\sqrt{L} =$ ［　　　　　　　　］（個）

４）発注点在庫量を求めよ。

$I = L\mu + \lambda\sigma\sqrt{L} =$ ［　　　　　　　　］（個）

6.4 定期発注方式【第７回】

必要な情報

発注間隔　　　R（日）

経済的発注間隔を使う場合は

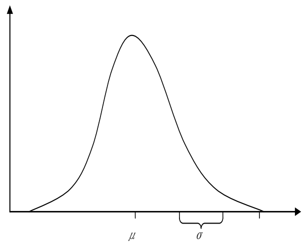
保管費用　h（円／日・個）　商品の単位は「個」とする。

発注費用　K（円）

調達期間（リードタイム）L（日）　：発注－入庫の間隔

１日当たりの出庫（確率的）　$N(\mu,\sigma^2)$

平均μ（個)、分散σ^2（標準偏差σ個）の正規分布を仮定



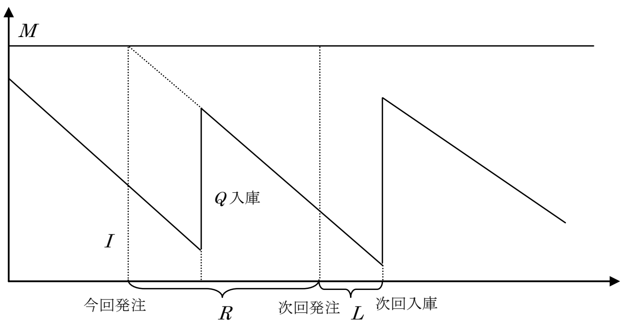
決定事項

最大在庫量Mを求める。

発注量は　最大在庫量－発注時在庫量－発注残量

注）在庫の量は今回発注を済ませたら次回入庫まで調整できない。

$L \le R$の場合



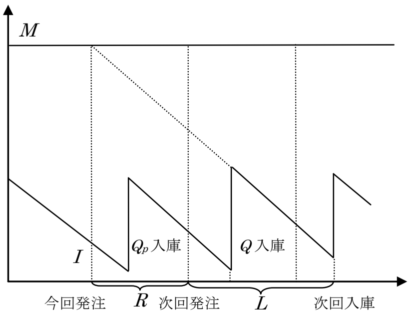
発注から次回発注分の納品まで$L+R$

この間に在庫不足の起こらないように、最大在庫量Mを求める。

$M=(L+R)\mu+\lambda\sigma\sqrt{L+R}$　　λ：安全係数

発注量　$Q=M-I$　　　発注残量は 0 である。

$R < L < 2R$ **の場合**



発注から次回発注分の納品まで $L + R$

この間に在庫不足の起こらないように、最大在庫量 M を求める。

$$M = (L + R)\mu + \lambda\sigma\sqrt{L + R}$$

前回の発注量を Q_p とすると（これは発注残量）

発注量　$Q = M - I - Q_p$

公式　定期発注方式

１日当たりの出庫　平均 μ （個)、分散 σ^2 （標準偏差 σ 個）の正規分布

発注間隔 : R（日）　調達期間（リードタイム）: L（日）　品切れの危険率 $\alpha \times 100\%$

安全係数を $\lambda = normsinv(1-\alpha)$、最大在庫量を $M = (L + R)\mu + \lambda\sigma\sqrt{L + R}$ として発注間隔ごとに、最大在庫量－現在の在庫量－現在の発注残量　を発注する。

サイクル在庫 : $R\mu/2$、安全在庫 : $\lambda\sqrt{L + R}\sigma$、理論在庫 : $R\mu/2 + \lambda\sqrt{L + R}\sigma$

例

1 日当たりの出庫の平均 20 個、標準偏差 5 個、発注間隔 10 日、調達期間 7 日のとき、定期発注方式として以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は 5%以下とする。

１）安全係数を求めよ。

$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ =［　　　　　　　　］

２）最大在庫量を求めよ。

$M = (L + R)\mu + \lambda\sigma\sqrt{L + R}$ =［　　　　　　　　］（個）

３）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫 : $R\mu/2$ =［　　　　　　　　］（個）

安全在庫 : $\lambda\sigma\sqrt{L + R}$ =［　　　　　　　　］（個）

理論在庫 : $R\mu/2 + \lambda\sigma\sqrt{L + R}$ =［　　　　　　　　］（個）

４）発注日に前の発注の残りはあるか。　　［ある・ない］

問題１

1 日当たりの出庫の平均 30 個、標準偏差 4 個、発注間隔 7 日、調達期間 3 日のとき、定期発注方式として以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は 1%以下とする。

１）安全係数を求めよ。

$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［　　　　　　］

２）最大在庫量を求めよ。

$M = (L+R)\mu + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［　　　　　　］（個）

３）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫：$R\mu/2$ ＝［　　　　　　］（個）

安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［　　　　　　］（個）

理論在庫：$R\mu/2 + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［　　　　　　］（個）

４）発注日に前の発注の残りはあるか。　［ある・ない］

問題２

出庫は 1 週間当たり平均 200 個、標準偏差 20 個、発注間隔 7 日、調達期間 10 日のとき、定期発注方式として以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は 3%以下とする。

１）1 日当たりの出庫の平均と標準偏差を求めよ。

ヒント：標準偏差の場合の計算は　1 週間の値÷$\sqrt{7}$

平均［　　　　　　］　標準偏差［　　　　　　］

２）安全係数を求めよ。

$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［　　　　　　］

３）最大在庫量を求めよ。

$M = (L+R)\mu + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［　　　　　　］（個）

４）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫：$R\mu/2$ ＝［　　　　　　］（個）

安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［　　　　　　］（個）

理論在庫：$R\mu/2 + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［　　　　　　］（個）

５）発注日に前の発注の残りはあるか。　［ある・ない］

6.5 ソフトウェアの利用【第８回】

例

1 日当たりの出庫の平均 25 個、標準偏差 5 個、調達期間 7 日のとき、発注量 250 個の定量発注方式として、また発注間隔 10 日の定期発注方式として以下の問いに答えよ。但し、欠品の危険率は 3%以下とすること。

１）安全係数を求めよ。　［　　　　　　　］

定量発注方式

２）定量発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

　　サイクル在庫　［　　　　　　　］（個）

　　安全在庫　　　［　　　　　　　］（個）

　　理論在庫　　　［　　　　　　　］（個）

３）発注点在庫量を求めよ。　［　　　　　　　］（個）

定期発注方式

４）定期発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

　　サイクル在庫　［　　　　　　　］（個）

　　安全在庫　　　［　　　　　　　］（個）

　　理論在庫　　　［　　　　　　　］（個）

５）定期発注方式の最大在庫量を求めよ。　［　　　　　　　］（個）

問題 1

出庫は <u>1 週間当たり平均 300 個、標準偏差 15 個</u>、調達期間 7 日のとき、発注量 500 個の定量発注方式として、また発注間隔 5 日のときの定期発注方式として以下の問いに答えよ。但し、欠品の危険率は 5%以下とすること。

１）1 日当たりの出庫平均と出庫標準偏差を求めよ。

　　出庫平均［　　　　　　　］　出庫標準偏差［　　　　　　　］

２）欠品の安全係数を求めよ。　［　　　　　　　］

定量発注方式

３）定量発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

　　サイクル在庫　［　　　　　　　］（個）

　　安全在庫　　　［　　　　　　　］（個）

　　理論在庫　　　［　　　　　　　］（個）

４）発注点在庫量を求めよ。　［　　　　　　　］（個）

定期発注方式

５）定期発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫　［　　　　　　　　］（個）

安全在庫　　　［　　　　　　　　］（個）

理論在庫　　　［　　　　　　　　］（個）

６）定期発注方式の最大在庫量を求めよ。　［　　　　　　　　］（個）

問題２

ファイル在庫管理 1.txt に与えられた、管理用データと出庫データを用いて各製品ごとに以下に答えよ。

１）1 日当たりの出庫平均と出庫標準偏差を求めよ。

	A	B	C
出庫平均			
出庫標準偏差			

２）欠品の安全係数を求めよ。

	A	B	C
安全係数			

定量発注方式

３）定量発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

	A	B	C
サイクル在庫			
安全在庫			
理論在庫			

４）発注点在庫量を求めよ。

	A	B	C
発注点在庫量			

定期発注方式

５）定期発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

	A	B	C
サイクル在庫			
安全在庫			
理論在庫			

６）定期発注方式の最大在庫量を求めよ。

	A	B	C
最大在庫量			

6.6 在庫管理シミュレーション【第９回】

問題１

1 日当たりの出庫の平均 25 個、標準偏差 5 個、調達期間 5 日のとき、発注量 150 個の定量発注方式として、また発注間隔 7 日の定期発注方式として、初期在庫量 200、実行期間 50 日で 100 回のシミュレーションを行い以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は 5%以下とすること。

定量発注方式（発注点方式）

１）理論的なサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫［　　　　　　　］

安全在庫　　［　　　　　　　］

理論在庫　　［　　　　　　　］

２）理論的な発注点在庫量を求めよ。　［　　　　　　　］（個）

３）総出庫、出庫平均、出庫標準偏差を求めよ。

総出庫［　　　　　］出庫平均［　　　　　］出庫標準偏差［　　　　　］

４）発注回数、総発注量、発注量平均を求めよ。

発注回数［　　　　　］総発注量［　　　　　］発注量平均［　　　　　］

５）入庫回数、総入庫量、入庫量平均を求めよ。

入庫回数［　　　　　］総入庫量［　　　　　］入庫量平均［　　　　　］

６）欠品回数÷入庫回数で欠品率を表すと、欠品率はいくらか。

欠品率［　　　　　］％

７）平均在庫量を求めよ。　［　　　　　］

８）在庫費用＝平均在庫量×日数×1 日当在庫費用＋発注費用×発注回数、のとき、1 日当在庫費用 10 円、発注費用 8000 円とすると、在庫費用はいくらか。

［　　　　　］

９）理論的には経済的発注量を求めることができるが、これを利用した場合、上の式で在庫費用はいくらになるか。

発注回数［　　　　　］、平均在庫量［　　　　　］より、在庫費用［　　　　　］

定期発注方式

10）理論的なの最大在庫量を求めよ。　［　　　　　　］（個）

11）理論的なサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫［　　　　　　］

安全在庫　　［　　　　　　］

理論在庫　　［　　　　　　］

12）理論在庫は定量発注方式と定期発注方式ではどちらが多いか。

［定量発注方式・定期発注方式］

13）発注回数、総発注量、発注量平均を求めよ。

発注回数［　　　　　］総発注量［　　　　　］発注量平均［　　　　　］

14）入庫回数、総入庫量、入庫量平均を求めよ。

入庫回数［　　　　　］総入庫量［　　　　　］入庫量平均［　　　　　］

15）欠品回数÷入庫回数で欠品率を表すと、欠品率はいくらか。

欠品率［　　　　　］％

16）平均在庫量を求めよ。　［　　　　　］

17）８）と同じ設定で、在庫費用はいくらか。

発注回数［　　　　　］、平均在庫量［　　　　　］より、在庫費用［　　　　　］

問題２

ファイル在庫管理 1.txt に与えられた、管理用データと出庫データの製品Ａに対して以下の問いに答えよ。

１）シミュレーション回数は何回実行すればよいか。［　　　　］回

２）1 日当たりの出庫平均と出庫標準偏差を求めよ。

出庫平均［　　　　　］　出庫標準偏差［　　　　　］

定量発注方式（初期在庫を 200 とする）

３）欠品回数÷入庫回数で欠品率を表すと、欠品率はいくらか。

欠品率［　　　　　］％

４）平均在庫量を求めよ。　［　　　　　］

定期発注方式（初期在庫を 150 とする）

５）欠品回数÷入庫回数で欠品率を表すと、欠品率はいくらか。

欠品率［　　　　　］％

６）平均在庫量を求めよ。　［　　　　　］

７．スケジュール問題【第 10 回】

7.1 スケジュール問題とは

例　家屋建築の作業リスト

作業	先行作業	所要日数	作業内容
A		7	設計
B	A	3	地盤工事
C	B	5	基礎工事
D	A	6	資材調達
E	C	3	屋根工事
F	C,D	6	外壁・防水工事
G	E	4	床面工事
H	F,G	5	内壁工事
I	E	3	ガス・水道工事
J	H,I	2	電気工事
K	F,G	10	仕上工事

スケジュール問題

この工事は最短何日かかるのか？

各作業はいつ始められるのか？

各作業はどのくらい遅れが許されるのか？

（最短日数でやる場合と納期が決められている場合）

各作業の所要日数が統計的に一定でない場合どうなるか？

各作業に使える人員に制限がある場合どうなるか？

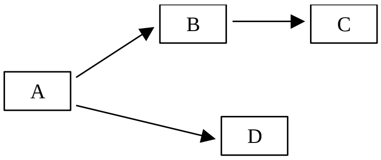
各作業にかかる費用（工期に依存）を考えた場合、費用と工期との関係は？

以上のような問題に解答する合理的手法を考えるのがスケジュール問題である。

7.2 作業とダイアグラム

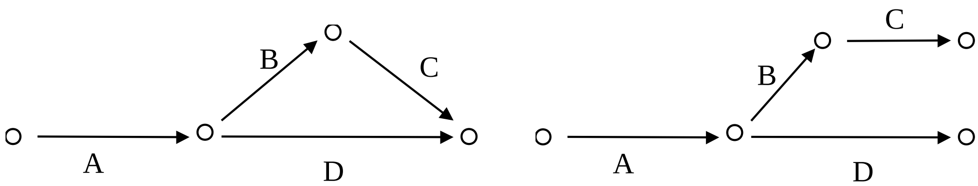
1. フローダイアグラムとアローダイアグラム

記号	先行作業
A	
B	A
C	B
D	A



フローダイアグラム

（描画が簡単・矢印は前後関係だけを表わす）



アローダイアグラム

（描画は少し複雑・矢印は作業時間の流れ）

今後は意味付けの直感的なアローダイアグラムを用いる。

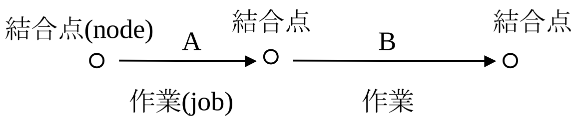
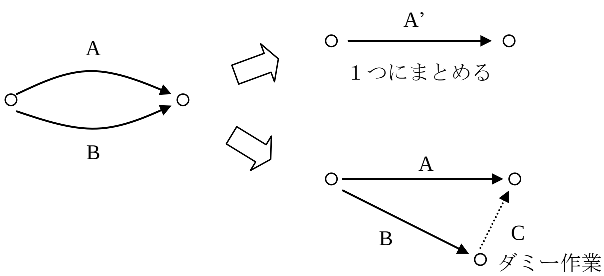


図　名称

2. アローダイアグラムの作成規則

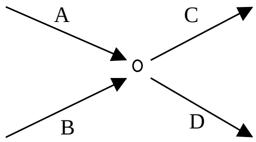
1) 矢印の長さと作業時間は無関係である。

2) 隣り合った２つの結合点間は１つの作業で結ぶ。



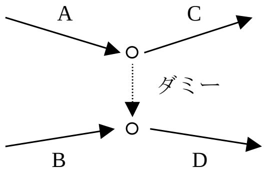
3) 同じ結合点から出る作業（に入る作業）は共通の先行作業（後続作業）を持つ。

作業	先行作業	後続作業
A		C,D
B		C,D
C	A,B	
D	A,B	

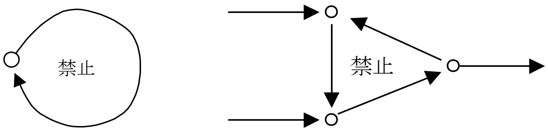


共通の先行作業を持たない作業は同一の結合点から出ない。（対偶）

作業	先行作業
A	
B	
C	A
D	A,B



4) ループがあってはならない。

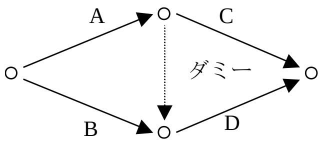


別表記

計算機での計算上、結合点に番号を打つが、$i \to j$ の矢印の場合、$i < j$ でなければならない。

5) プロジェクトの始点と終点を 1 つの結合点にまとめる。

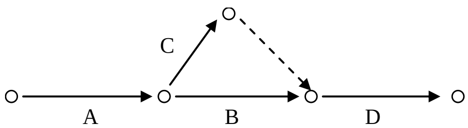
作業	先行作業
A	
B	
C	A
D	A,B



問題　以下のプロジェクトをアローダイアグラムで表せ。

1）

作業	先行作業
A	
B	A
C	A
D	B,C



２）

作業	先行作業
A	
B	
C	A,B
D	A,B

３）

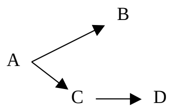
作業	先行作業
A	
B	A
C	A
D	A

注）　アローダイアグラム作成法（フローダイアグラムからアローダイアグラムへ）

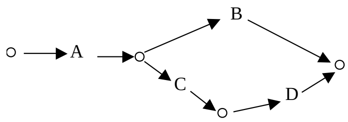
例

作業	先行作業
A	
B	A
C	A
D	C

①フローダイアグラムを描く

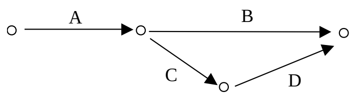


②作業の両端に結合点を入れる。



③ダイアグラムを整理する。

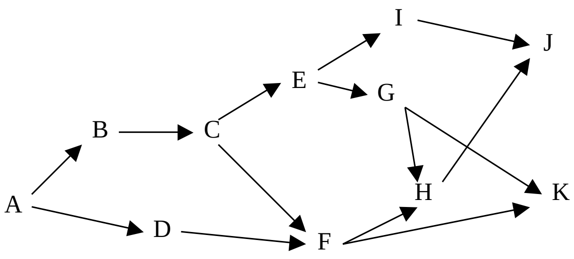
④作業を１本の線で描く。



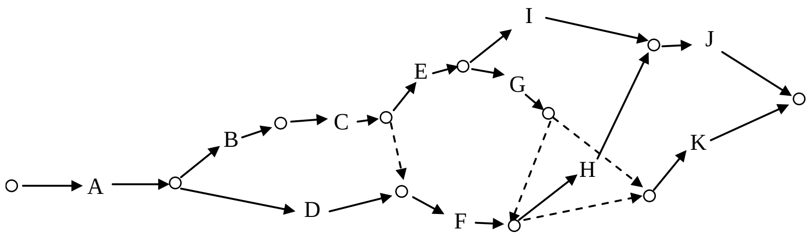
例

作業	先行作業
A	
B	A
C	B
D	A
E	C
F	C,D
G	E
H	F,G
I	E
J	H,I
K	F,G

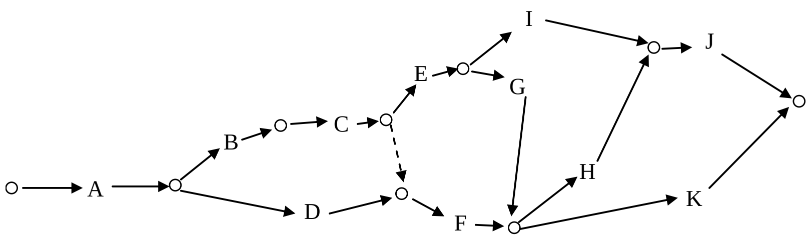
①フローダイアグラムを描く。



②作業の両端に結合点を入れる。



③ダイアグラムを整理する。



④作業を１本の線で描く。

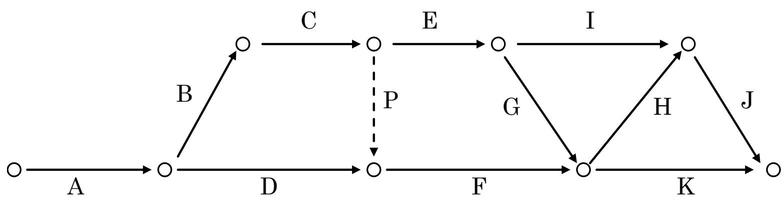
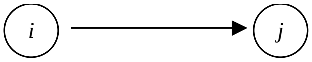


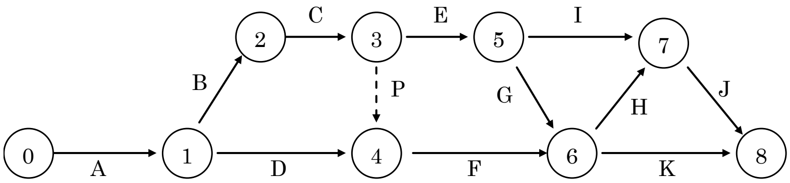
図　家屋建築のアローダイアグラム

3. 結合点番号

始点を 0 として各作業の両端の結合点に対して、



$i < j$ となるように順番に番号を付ける。



7.3 PERT の手法【第 11 回】

PERT (Program Evaluation and Review Technique)

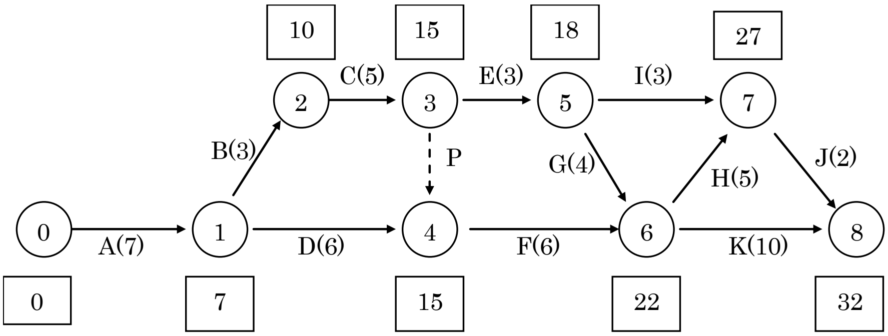
作業時間に基づくスケジュール管理手法として広く用いられている。

例

作業	先行作業	作業時間	作業内容
A		7	設計
B	A	3	地盤工事
C	B	5	基礎工事
D	A	6	資材調達
E	C	3	屋根工事
F	C,D	6	外壁・防水工事
G	E	4	床面工事
H	F,G	5	内壁工事
I	E	3	ガス・水道工事
J	H,I	2	電気工事
K	F,G	10	仕上工事

1. **最早結合点時刻（Earliest Node Time）**

各結合点で最も早く次の作業に移れる時刻



入ってくる作業について終了時刻の最大のものをとる。

最終結合点の最早結合点時刻はプロジェクト遂行時間と呼ばれる。

数式表現

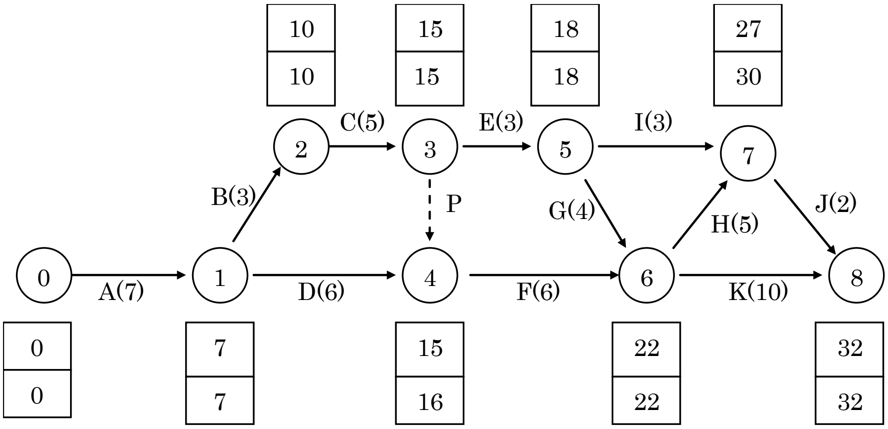
作業全体の集合を P、結合点 k から結合点 i への作業を (k, i)、その作業時間を D_{ki} とすると結合点 i の最早結合点時刻 t_i^E は以下で与えられる。

$$t_0^E = 0$$

$$t_i^E = \max_{(k,i)\in P} (t_k^E + D_{ki}) \quad (1 \le i \le n)$$

2. 最遅結合点時刻（**Latest Node Time**）

プロジェクト遂行時刻で仕上げるために、各結合点で遅くとも次の作業に移らなければならない時刻



出て行く作業について開始時刻の最小のものをとる。

数式表現

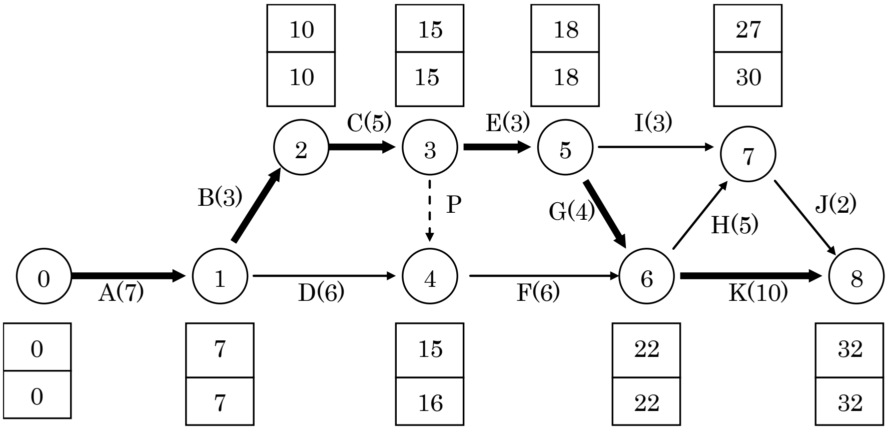
結合点 i の最早結合点時刻 t_i^E は以下で与えられる。

$$t_n^L = t_n^E$$

$$t_i^L = \min_{(i,\,k)\in P} (t_k^L - D_{ik}) \quad (0 \le i \le n-1)$$

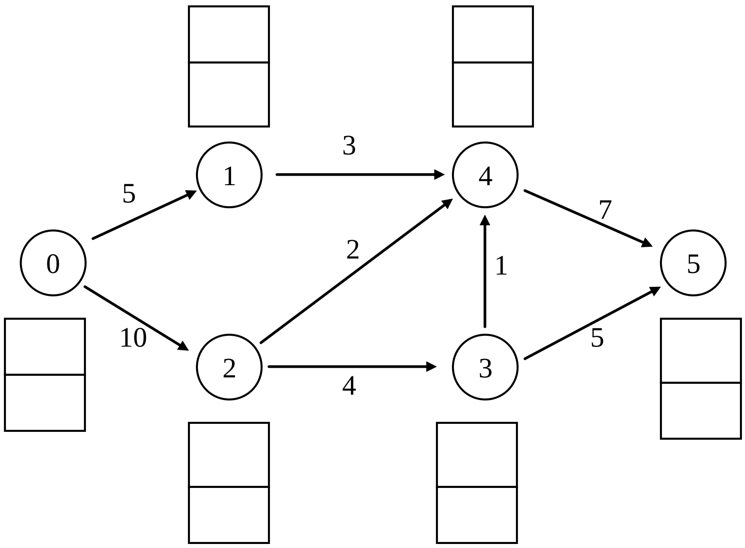
3. クリティカルパス

プロジェクト遂行時間でプロジェクトを終了するために、遅れることのできない作業をつなぐパス（最遅結合点時刻＝最早結合点時刻となる結合点で、次の作業の最早結合点時刻＝最早結合点時刻＋作業時間になるもの）



問題

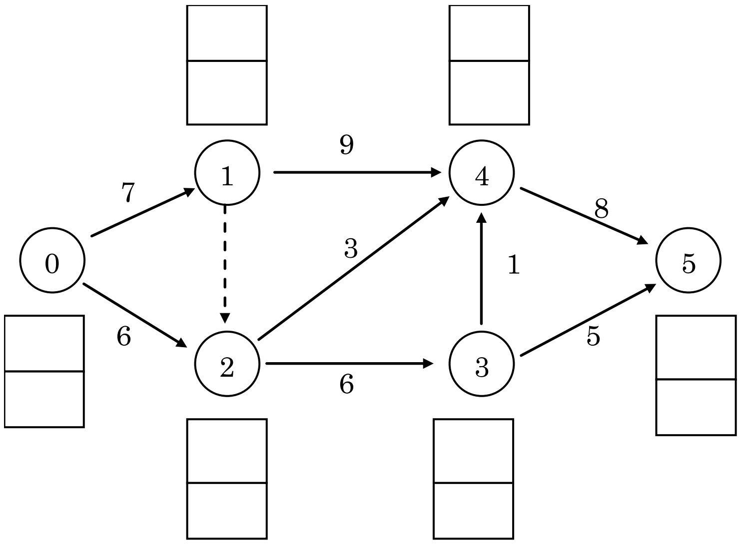
以下のプロジェクトの最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求め、クリティカルパスを示せ。



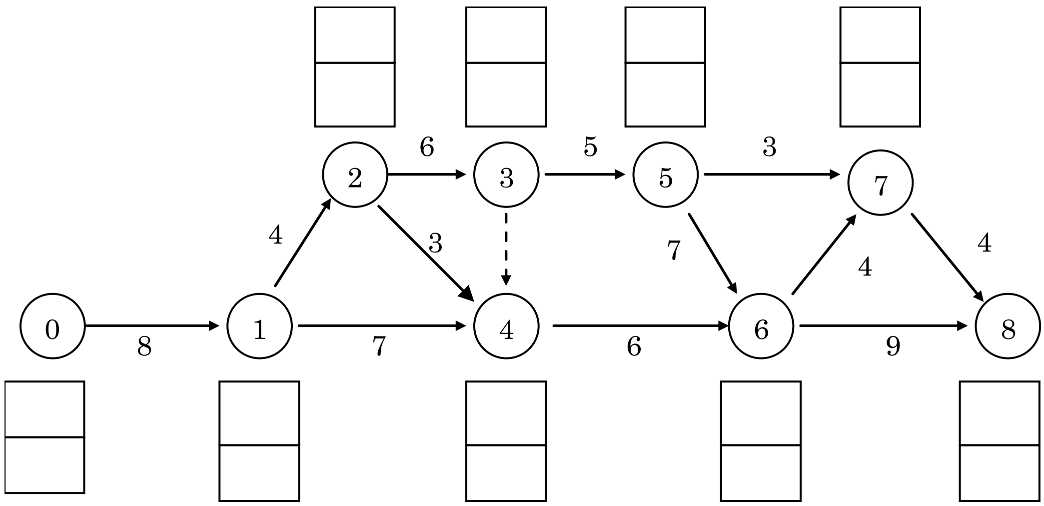
演習【第 12 回】

以下のプロジェクトの最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求め、クリティカルパスを示せ。

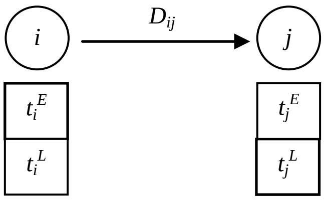
1）



2）



4. 日程計画【第 13 回】



各種の時刻

最早開始時刻 (earliest starting time) ES_{ij}

その作業を最も早く開始できる時刻 = t_i^E

最早終了時刻 (earliest finishing time) EF_{ij}

その作業を最も早く終了できる時刻 = $t_i^E + D_{ij}$

最遅開始時刻 (latest starting time) LS_{ij}

その作業を遅くとも開始しなければならない時刻 = $t_j^L - D_{ij}$

最遅終了時刻 (latest finishing time) LF_{ij}

その作業を遅くとも終了しなければならない時刻 = t_j^L

時間のゆとり

フリー・フロート FF_{ij}

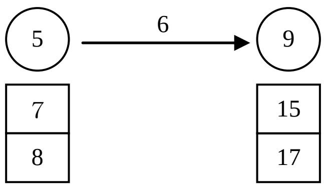
後続の作業に影響を与えないゆとり $FF_{ij} = t_j^E - t_i^E - D_{ij}$

トータル・フロート TF_{ij}

最大限許されるゆとり $TF_{ij} = t_j^L - t_i^E - D_{ij}$ （$= LF_{ij} - EF_{ij} = LS_{ij} - ES_{ij}$）

フリー・フロート≦トータル・フロート

例



最早開始時刻 $ES_{59} = 7$

最早終了時刻 $EF_{59} = 7 + 6 = 13$

最遅開始時刻 $LS_{59} = 17 - 6 = 11$

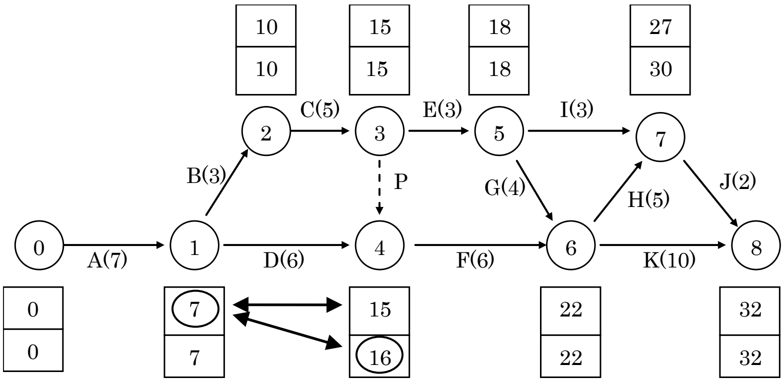
最遅終了時刻 $LF_{59} = 17$

フリー・フロート $FF_{59} = 15 - 7 - 6 = 2$

トータル・フロート $TF_{59} = 17 - 7 - 6 = 4$

例

作業	作業内容	先行作業	作業時間
A	設計		7
B	地盤工事	A	3
C	基礎工事	B	5
D	資材調達	A	6
E	屋根工事	C	3
F	外壁・防水工事	C,D	6
G	床面工事	E	4
H	内壁工事	F,G	5
I	ガス・水道工事	E	3
J	電気工事	H,I	2
K	仕上工事	F,G	10



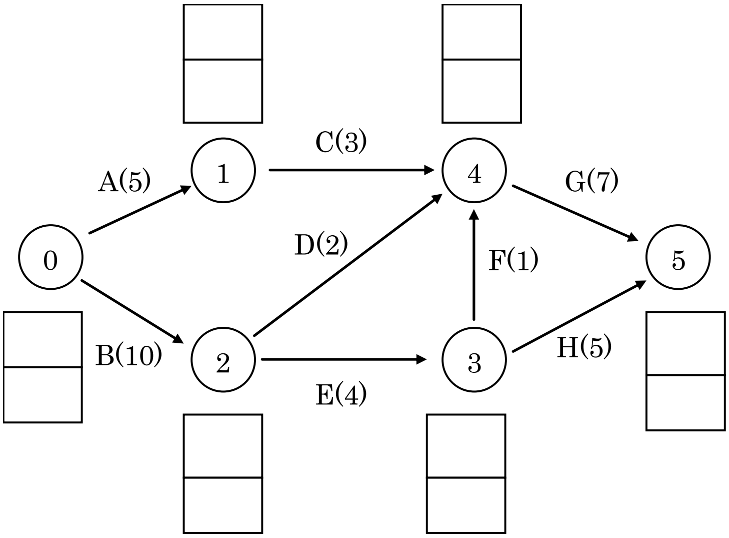
日程表

作業	最早開始時刻	最早終了時刻	最遅開始時刻	最遅終了時刻	フリーフロート	トータルフロート	クリティカル・パス
A(7)	0	7	0	7	0	0	*
B(3)	7	10	7	10	0	0	*
C(5)	10	15	10	15	0	0	*
D(6)	7	13	10	16	2	3	
E(3)	15	18	15	18	0	0	*
F(6)	15	21	16	22	1	1	
G(4)	18	22	18	22	0	0	*
H(5)	22	27	25	30	0	3	
I(3)	18	21	27	30	6	9	
J(2)	27	29	30	32	3	3	
K(10)	22	32	22	32	0	0	*

クリティカル・パス上の作業は遅れに十分注意する。

問題

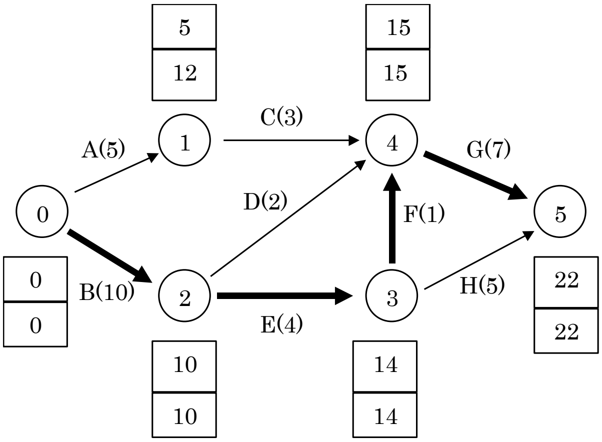
以下のプロジェクトの最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求め、日程表を作れ。



日程表

作業	最早開始時刻	最早終了時刻	最遅開始時刻	最遅終了時刻	フリーフロート	トータルフロート	クリティカル・パス
A(5)							
B(10)							
C(3)							
D(2)							
E(4)							
F(1)							
G(7)							
H(5)							

解答



作業	最早開始 時刻	最早終了 時刻	最遅開始 時刻	最遅終了 時刻	フリー フロート	トータル フロート	クリティ カル・パス
A(5)	0	5	7	12	0	7	
B(10)	0	10	0	10	0	0	*
C(3)	5	8	12	15	7	7	
D(2)	10	12	13	15	3	3	
E(4)	10	14	10	14	0	0	*
F(1)	14	15	14	15	0	0	*
G(7)	15	22	15	22	0	0	*
H(5)	14	19	17	22	3	3	

7.4 コンピュータの利用【第 14 回】

Samples¥PERT1.txt のデータから、これまでの処理をパソコンを使って行う。

この中で作業内容は特に必要ない。

作業名	先行作業	所要日数	作業内容
A		7	設計
B	A	3	地盤工事
C	B	5	基礎工事
D	A	6	資材調達
E	C	3	屋根工事
F	C,D	6	外壁・防水工事
G	E	4	床面工事
H	F,G	5	内壁工事
I	E	3	ガス・水道工事
J	H,I	2	電気工事
K	F,G	10	仕上工事

手順

１）「作業リストから」ラジオボタンを選択し、アローダイアグラムを描画

２）アローダイアグラム調整

３）グラフィックデータをメニュー［編集－グリッドへ追加コピー］を用いて、グリッドデータに変換

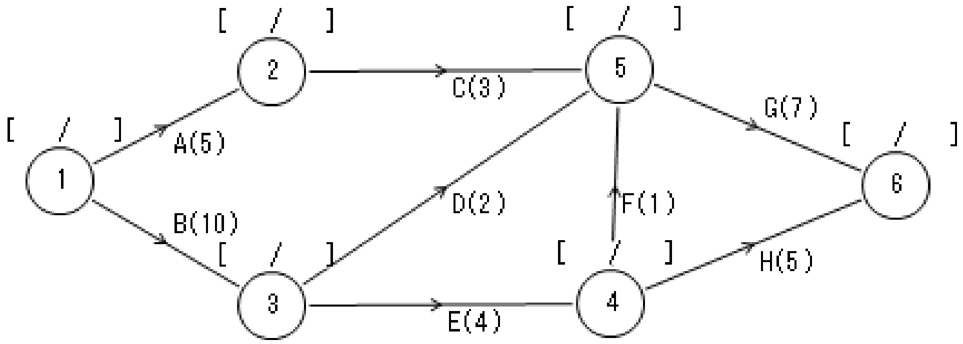
４）「ダイアグラムデータから」ラジオボタンを選択し、「最早結合点時刻」、「最遅結合点時刻」、「日程表」ボタンをクリックする。日程表の作業順で表示したいときは、「作業リストから」ラジオボタンで直接作ることもできる。

問題 1

以下の作業リストをグリッドエディタに入力し、以下の問いに答えよ。

作業名	先行作業	所要日数
A		5
B		10
C	A	3
D	B	2
E	B	4
F	E	1
G	C,D,F	7
H	E	5

1）以下のアローダイアグラムを描き、最早結合点時刻と最遅結合点時刻を書き込め。



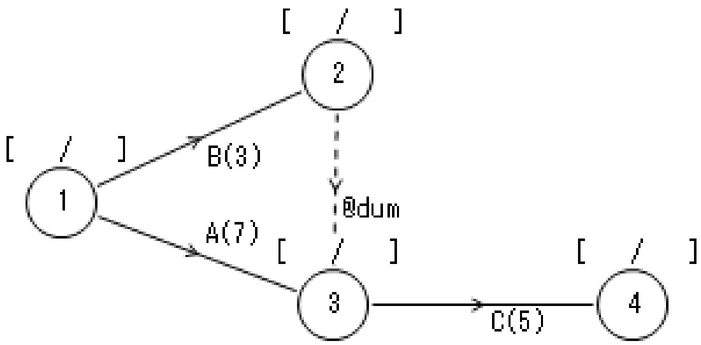
2）以下の日程表を完成させよ。

	作業 時間	最早開 始時刻	最早終 了時刻	最遅開 始時刻	最遅終 了時刻	Free Float	Total Float	Critical Path
A								
B								
C								
D								
E								
F								
G								
H								

問題２

１）以下のアローダイアグラムとなる作業リストを求めよ。また最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求めよ。

作業名	先行作業	所要日数
A		
B		
C		



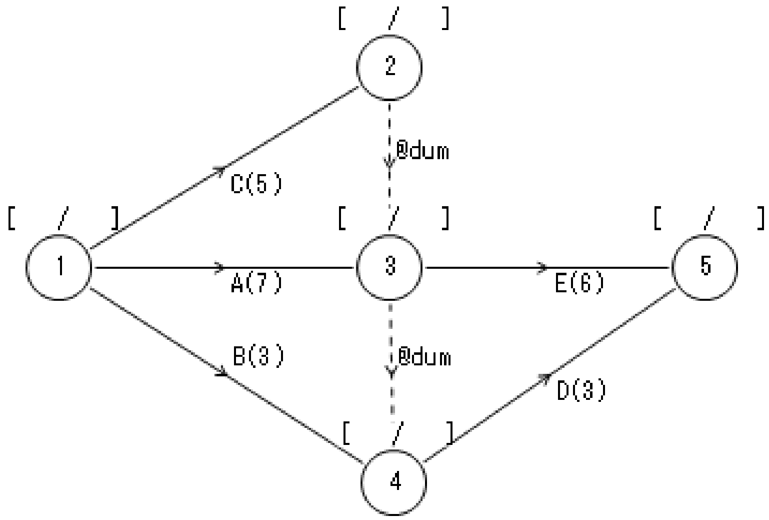
２）以下の日程表を完成させよ。

	作業 時間	最早開 始時刻	最早終 了時刻	最遅開 始時刻	最遅終 了時刻	Free Float	Total Float	Critical Path
A								
B								
C								

問題３

１）以下のアローダイアグラムとなる作業リストを求めよ。また最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求めよ。

作業名	先行作業	所要日数
A		
B		
C		
D		
E		



２）以下の日程表を完成させせよ。

	作業時間	最早開始時刻	最早終了時刻	最遅開始時刻	最遅終了時刻	Free Float	Total Float	Critical Path
A								
B								
C								
D								
E								

８．品質管理

品質管理（Quality Control, QC）とは

広義の品質管理「品質要求事項を満たすことに焦点を合わせた品質マネジメントの一部」（JIS）

狭義の品質管理「品質保証行為の一部をなすもので、部品やシステムが決められた要求を満たしていることを、前もって確認するための行為」（JIS）

ウォルター・シューハート、エドワーズ・デミング、石川馨らによってはじめられ、1960 年以降日本企業に広く普及した。

ＱＣ七つ道具

データを図にまとめたり、数値にまとめたりすることが重要

１．グラフ（折れ線グラフ、棒グラフ、円グラフ、帯グラフ、レーダーチャートなど）
２．ヒストグラム（山の形から工程の安定性、拡がりから規格からのずれなどをみる）
３．管理図（工程の安定性を見る）
４．チェックシート（確認要点事項を予め抜粋しまとめられたツール）
５．パレート図（工程改善用に問題点を原因別・損失別に並べた棒グラフ、）
６．特性要因図（問題抽出用に用いられる問題点を階層別に表した図）
７．散布図（相関）
８．層別（クロス集計）

グラフと管理図をひとまとめにして７つにすることが多い。

新ＱＣ七つ道具

連関図法，親和図法（KJ 法の別名），系統図法，アローダイアグラム法，マトリックス図法，マトリックスデータ解析法，PDPC 法

例

Samples¥品質管理 1.txt のデータを用いて品質管理の考え方を学ぶ。

１ページ目のデータは１日単位で求めた４つの工場の初期不良の個数である。

各工場の初期不良数を**「折れ線グラフ」**で見てみる。

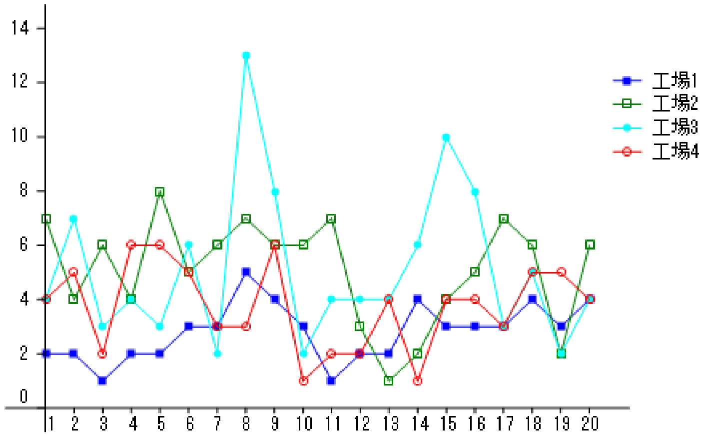


図 1 折れ線グラフ

これから工場３で変化が大きいと思われるが、工場３の重要性を調べてみる。

このために各工場の初期不良数の合計（群別データ合計から）を**「パレート図」**で見てみる。1 頁目のデータをそのまま利用する。

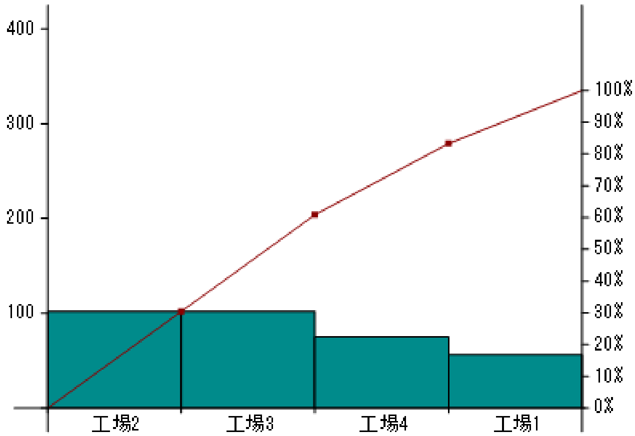


図 2 初期不良数で見たパレート図

これによると特に工場３の初期不良が多いとは考えにくい。しかし、工場の重要性は金額ベースでも見る必要がある。そこで、2 頁目の金額ベースの損失のデータでもパレート図を描いてみる。

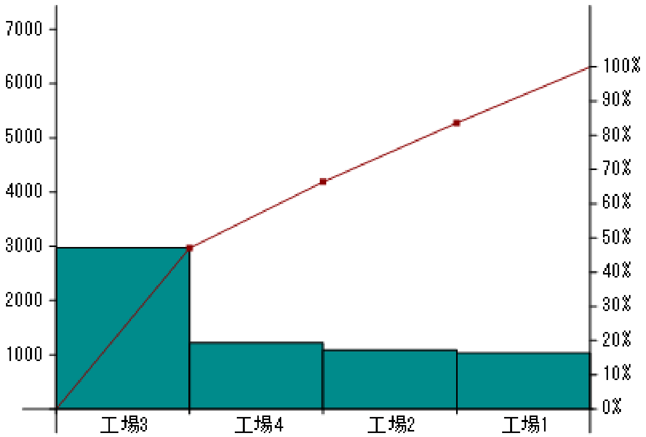


図 3 損失額で見たパレート図

件数で見た場合はあまり差が見られないが、金額ベースで見ると工場 3 の改善に取り組むことが重要であると分る。

工場 3 の初期不良数のデータ（1 頁目）は 1 つのデータであるので、**「x 管理図」**を用いて異常を調べる。

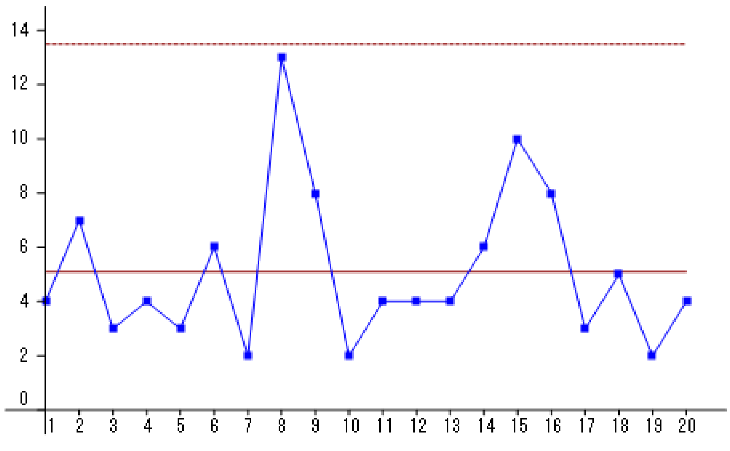


図 4 x 管理図で見たデータの異常

ここで中央の線を中心線（CL）、上の点線を管理限界線（UCL）という。下側に管理限界線（LCL）が付く場合も多い。この場合、1 回の測定でデータが 1 つであったが、複数個のデータを集める場合がある。そのときには$\bar{x}$管理図を用いる。またばらつきの異常を調べるにはR管理図が用いられる。

x 管理図で限界線近くまで拡がる場合があったので、**「ヒストグラム」**で分布の特性を見る。自然な誤差の場合には分布が正規分布に近いものになる。

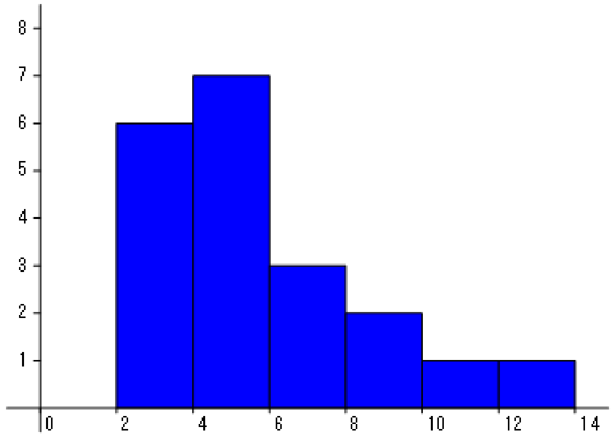


図 5 初期不良数の分布

これを見ると右方向に伸びており、正規分布とは異なる。これらのことから、異常が発生している可能性があるように思われる。

次に**「特性要因図」**によって原因の絞り込みを行いたい。

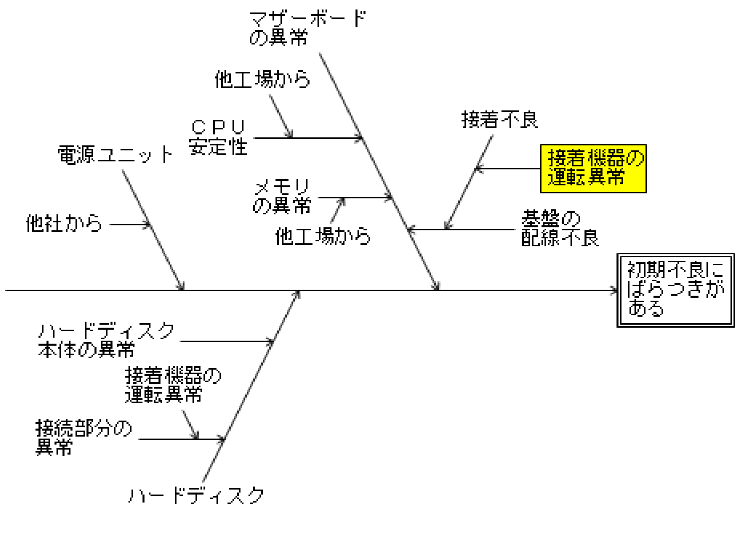


図 6 特性要因図による原因の絞り込み

初期不良にばらつきがある場合、上の特性要因図のような原因が考えられるが、今回はマザーボードの異常によるものが多かったため、その原因を考えて行くと、接着

機器の運転異常が原因ではないかと疑われた。

　不良品発生の状況を層別の手段で考えるために、不良品の発生に午前と午後の差はあるのか、機器による差はあるのかを**「層別」**の手法で調べてみたところ、以下の結果を得た。

不良品の発生に午前と午後の差はあるか。（層別）3 頁
　検定名　［　　　　　　　　　　］検定
　検定確率［　　　　　　］　差があると［いえる・いえない］
不良品の発生に機器による差はあるか。（層別）4 頁
　検定名　［　　　　　　　　　　］検定
　検定確率［　　　　　　］　差があると［いえる・いえない］

この結果から、機器の不良が考えられたが、異常は断続的に表れるので、何らかの外的な要因があるように思われた。異常発生と天候との関係に気付くものがおり、調べてみると以下の結果を得た。

不良品の発生に天候の影響はあるか。（層別）5 頁
　検定名　［　　　　　　　　　　］検定
　検定確率［　　　　　　］　差があると［いえる・いえない］

原因がかなり絞り込めたので、調べてみると雨漏りが原因で漏電が発生していることが分り、問題が解決された。

参考

　Wikipedia
　フリーソフトウェア R による統計的品質管理入門，荒木孝治，日科技連

問題

１）これまで検討に用いた図 1～図 6 をワープロに貼り付けて簡単なレポートにせよ。
２）上の検定結果を記入せよ。