College Analysis レファレンスマニュアル

― 意思決定他 ―

目次

１．AHP

AHP はある選択問題に対して、選択肢（以後代替案と呼ぶ）から評価基準をもとに最適なものを選出する合理的な手法である [5, 6]。それぞれの評価基準は、問題に対して評価基準同士の１対比較により、重要度を計算される。さらに、各評価基準に対してそれぞれの代替案もそれら同士の１対比較により、重要度を計算される。各代替案の問題に対する最終的な重要度は、それぞれの評価基準の重要度とその評価基準から見たその代替案の重要度の積の合計として与えられる。

ここで、例として図１のような階層構造の意思決定モデルを考えてみよう。

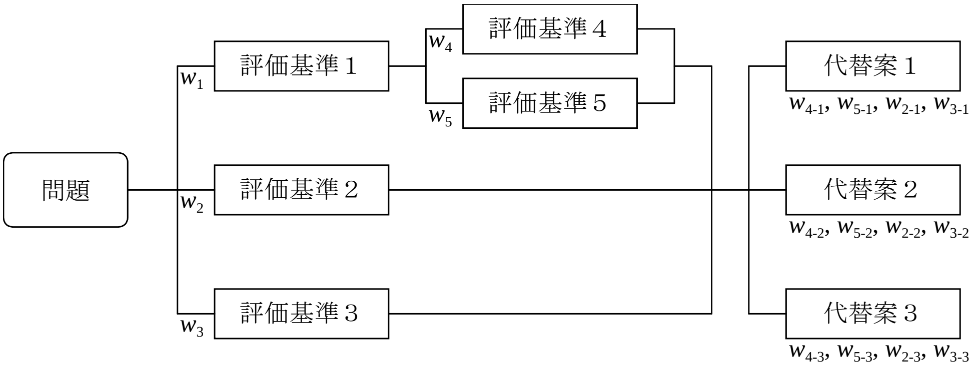


図１ 重要度の評価

評価基準と代替案に付いている w_i の記号は、それぞれ上の階層から見た重要度である。例えば、代替案１の上の階層には、評価基準 4, 5, 2, 3 があり、$w_{4-1}, w_{5-1}, w_{2-1}, w_{3-1}$ が重要度になっている。

これらの重要度は、以下の性質を持っている。

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1,\ \ w_4 + w_5 = 1,$$
$$w_{i-1} + w_{i-2} + w_{i-3} = 1 \quad (i = 2, 3, 4, 5).$$

各評価基準と各代替案の、「問題」から見た重要度をそれぞれ、$pw_1, \dots, pw_5$ 及び tw_1, tw_2, tw_3 とおくと、それらの値は以下となる。

$$pw_1 = w_1,\ \ pw_2 = w_2,\ \ pw_3 = w_3,$$
$$pw_4 = pw_1 \cdot w_4,\ \ pw_5 = pw_1 \cdot w_5,$$
$$tw_j = pw_4 \cdot w_{4-j} + pw_5 \cdot w_{5-j} + pw_2 \cdot w_{2-j} + pw_3 \cdot w_{3-j} \quad (j = 1, 2, 3).$$

重要度は、問題または評価基準の、１階層下の評価基準または代替案の１対比較によって求められる。例えば、問題に対する重要度 w_1, w_2, w_3 は、以下の一対比較行列から求められる。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 \end{pmatrix}.$$

ここに a_{ij} は主観的に見た、評価基準 i の評価基準 j に対する重要度の比率である。即ち、評価が理想的に行われるなら、$a_{ij}=w_i/w_j$ である。しかし現実には、比較を容易なものとするために、1～9 の整数値及びその逆数が提案されている。

完全に理想化された n 次元の一対比較行列から、重要度は以下のように最大固有値 n の固有ベクトルとして求められる。

$$\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} .$$

ここに、その他の固有値は全て 0 である。

理想的な場合からは多少ずれているが、一般の一対比較行列の場合にも、重要度は最大固有値 $\lambda_{\max}$ に対する固有ベクトルによって与えることにする。但し、そのずれの程度を明らかにするために、以下のように、理想的には 0 であるべきその他の固有値の平均的な値をとって整合度 C.I.と呼び、一対比較の整合性を測るための指標とする。

$$\mathrm{C.I.} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} .$$

この値が 0.1 程度以下であれば、整合度は合格とする。また、もう 1 つの整合性を見る指標として、無作為に作られた一対比較行列の整合度である、ランダム整合度で C.I.を割った、整合比 C.R.も用いられる。この値も 0.1 程度以下なら、整合性は合格とする。

階層的意思決定手法である AHP（Analytic Hierarchy Process）のメニュー画面は図 2 である。

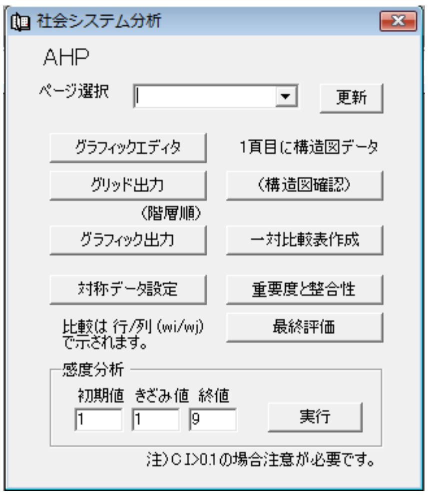


図 2 AHP 分析メニュー

階層構造を表す構造図のデータはグリッドエディタからでもグラフィックエディタからも入力できる。グラフィックエディタのデータは、分析メニューの「グリッド出力」ボタンからでも、グラフィックエディタのメニュー「編集－グリッド出力」からでもグリッドエディタに出力可能であるが、変数の表示順が分析メニューからだと階層順、グラフィックエディタのメニューからだと変数名昇順となる。図 3 に構造図入力の例を示す。

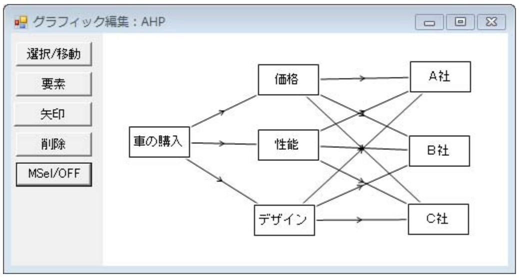
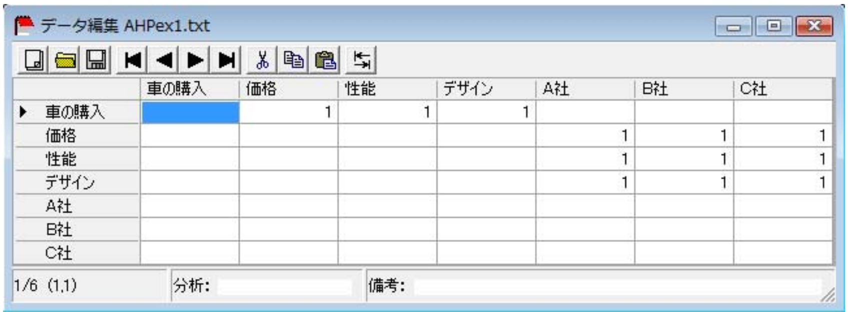


図 3 構造図入力

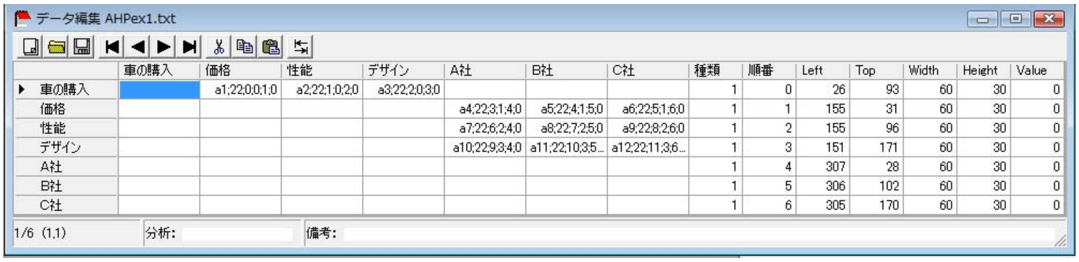
この分析におけるグラフィックエディタのボタンの特徴は「MSel/OFF」ボタンで、これをクリックすると他のボタンは利用不可能になり、ボタン名も「MSel/ON」となる。これは一度に複数の矢印を引くモードで、例えば、価格、性能、デザインボックスを複数選択し、車の購入ボックスをクリックすれば、後者から前者 3 つに矢印が引かれる。再度「MSel/ON」ボタンをクリックすると通常モードに戻る。ただ分析を実行するという観点からは、グラフィックエディタを使って入力するより、直接グリッドエディタを用いた方が効率的かも知れない。

図 4 にデータ構造の直接的な入力画面、図 5 にグラフィックエディタからの入力画面を示す。



	車の購入	価格	性能	デザイン	A社	B社	C社
車の購入		1	1	1			
価格					1	1	1
性能					1	1	1
デザイン					1	1	1
A社							
B社							
C社							

図 4 直接的な入力画面



	車の購入	価格	性能	デザイン	A社	B社	C社	種類	順番	Left	Top	Width	Height	Value
車の購入		a1;22;0;0;1;0	a2;22;1;0;2;0	a3;22;2;0;3;0				1	0	26	93	60	30	0
価格					a4;22;3;1;4;0	a5;22;4;1;5;0	a6;22;5;1;6;0	1	1	155	31	60	30	0
性能					a7;22;6;2;4;0	a8;22;7;2;5;0	a9;22;8;2;6;0	1	2	155	96	60	30	0
デザイン					a10;22;9;3;4;0	a11;22;10;3;5...	a12;22;11;3;6...	1	3	151	171	60	30	0
A社								1	4	307	28	60	30	0
B社								1	5	306	102	60	30	0
C社								1	6	305	170	60	30	0

図 5 グラフィックエディタからの入力画面

エディタ内の列名には、問題、評価基準、代替案全ての項目を入れ、行名には、問題と評価基準の項目を入れる。そして行項目を上位として、それぞれが連結している部分に、データ 1 を入力する。

入力が完成したら、「(構造図確認)」ボタンをクリックして、図 6 のような構造図を表示させて入力が正しいかどうか確認する。

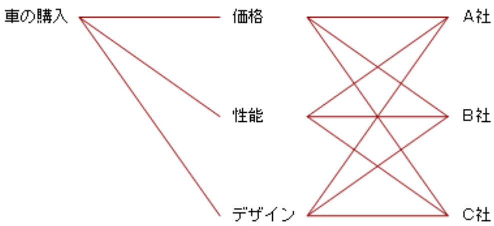
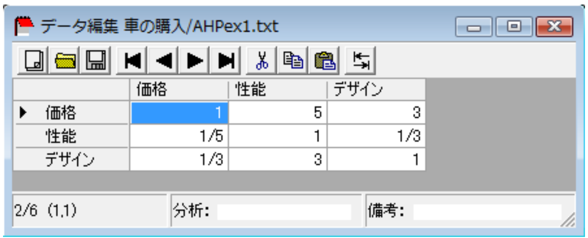


図 6 構造図確認画面

構造図を確認した後、「一対比較表作成」ボタンをクリックすると、図 6 のような一対比較画面が現れる。但し、図の中にある重要度と整合度の項目は最初の段階では表示されていない。



	価格	性能	デザイン
価格	1	5	3
性能	1/5	1	1/3
デザイン	1/3	3	1

図 6 一対比較画面

この画面の入力には、三角行列部分を入力して「対称行列設定」ボタンをクリックすると便利である。

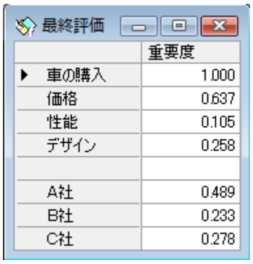
利用者は例えば、 i 行 j 列の比較値を w_i / w_j 形式の分数で入力する。その後、「重要度と整合性」

ボタンをクリックすると、図 7 のように重要度と λmax, C.I., C.R.の値を求めることができる。適合度の値に満足が行かなければ、再度データを変更し、再表示させる。

	重要度
価格	0.637
性能	0.105
デザイン	0.258
λ max	3.039
C.I.	0.019
C.R.	0.033

図 7　重要度と整合性

全てのデータを入力し、適合度の検定が終わり、「最終評価」ボタンをクリックすると図 8 のように、問題からみた各項目の重要度が表示される。



	重要度
車の購入	1.000
価格	0.637
性能	0.105
デザイン	0.258
A社	0.489
B社	0.233
C社	0.278

図 8　最終評価

利用者には、代替案だけでなく、選択基準についても自分の考えている重要度が分かり、結果と直感との差異が認識出来る。これは、教育的な観点から導入された。

例えば現在、価格とデザインを比較した数値が 3 になっているが、これを変動させた場合の代替案の重要度と整合性の変化を見る分析が感度分析である。カーソルを変更させたい一対比較表の部分に合わせて、感度分析グループボックスの「実行」ボタンをクリックすると、図 9 の感度分析の結果が表示される。

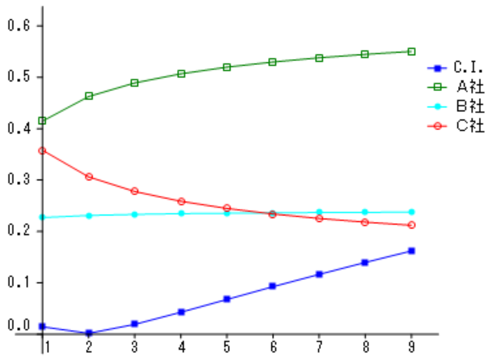


図 9 感度分析結果

２．デシジョンツリー

デシジョンツリーは多段階意思決定に利用される分析手法で、1つの意思決定段階は例えば図1のように表わされる。

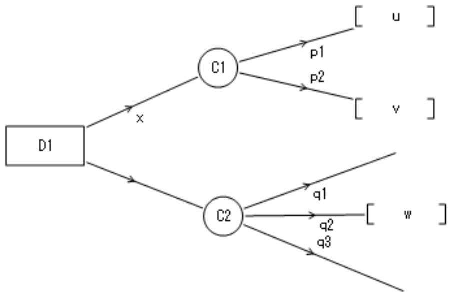


図１ １段階の意思決定

ここに、四角 D1 は意思決定、丸 C1 と C2 はチャンスイベントと呼ばれる。意思決定 D1 から出る矢印は意思決定の内容を表し、矢印に沿って書かれた値 x は意思決定に付随する利益（負の場合は費用）を表す。利益や費用がない場合は、値を記入する必要はない。チャンスイベントから出る矢印は確率的に生じる事象を表し、矢印に沿って事象の生起確率を書く。矢印の先端には、その事象によって得られる利益（負の場合は損失） $\mathrm{u, v, w}$ を書く場合もあるし、次の意思決定が繋がる場合もある。

チャンスイベントは下に繋がる事象等の利益の期待値を値として持つ。例えば C1 では、$\mathrm{p1 \times u + p2 \times v}$ である。同様に、意思決定も下に繋がるチャンスイベントの利益の最大の値を利益として持つ。その際、意思決定に付随する利益を加えておく。チャンスイベントの下に意思決定が繋がる場合には、事象の利益の代わりに意思決定の利益を利用する。以後プログラムの実行画面を例に説明を行う。

デシジョンツリーの説明のために、以下のような意思決定問題を考える。

１．A 社は新製品 G を B 社に納入したい。

２．成功した場合の報酬は 1000 万円、失敗した場合の違約金は 300 万円である。

３．A 社は 2 つの開発法 C1 と C2 を持っており、最初にどちらか選べる。

４．C1 には開発費 400 万円、C2 には開発費 550 万円がかかる。

５．C1 で成功する確率は 0.7、失敗する確率は 0.3 である。

６．C1 で失敗した場合、違約金を払うか、もう一度 C2 で挑戦が可能である。

７．C2 で成功する確率は 0.9、失敗する確率は 0.1 である。

８．C2 で失敗した場合、違約金を払って開発を打ち切るしかない。

メニュー［分析－意思決定支援他－デシジョンツリー］をクリックすると図 2 のデシジョンツリーの分析メニューが表示される。

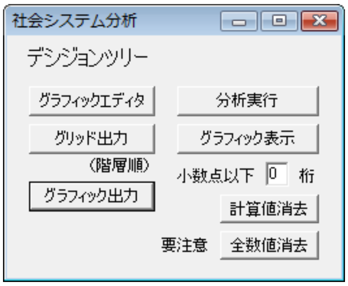


図 2 分析メニュー

ここに、左側の 3 つのボタンはグラフィックエディタを操作するボタンで、グラフィックエディタの立ち上げや、表形式のグリッドエディタとのデータの交換用である。これらは、グラフィックエディタを扱う他の分析メニューにも、グリッドへの出力順序の扱いを除いて、ほぼ同様に含まれている。

「グラフィックエディタ」ボタンで、グラフィックエディタを立ち上げ、上の意思決定問題を図式化して入力すると図 3 のような画面になる。画面左のボタンは、グラフィックエディタの描画ボタンで、意思決定は「□」、利得は「定数[ ]」、チャンスイベントは「○」である。

分析メニューの「分析実行」ボタンをクリックすると、各意思決定の段階での期待値と、選ぶべき選択肢が図 4 のように表示される。この例においては、意思決定 D1 においては、期待値 396 のチャンスイベント C1 を選択し、意思決定 D2 においては、期待値 320 のチャンスイベント C2 を選択することが大きな期待値を得る方法である。言いかえれば、最初の意思決定で、開発法 C1 を選択し、失敗した場合は、開発法 C2 で再挑戦することが有利である。

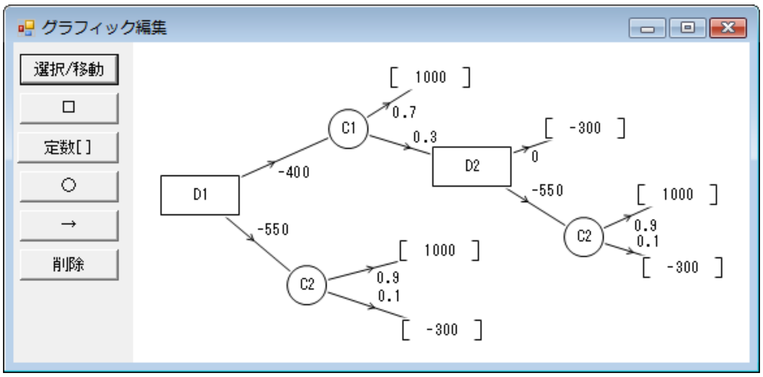


図 3 デシジョンツリー

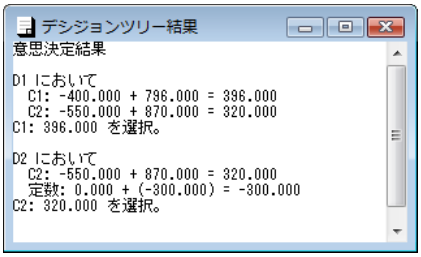


図 4 デシジョンツリー

この設定で分析メニュー「グラフィック表示」を選択すると、図 5 に示すように、各チャンスイベントの上に期待値、各意思決定の上に、期待値が最も高い選択肢とその期待値が示される。

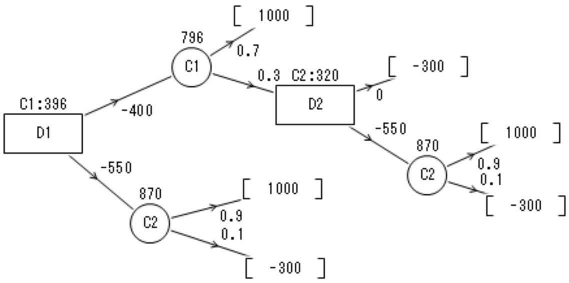


図 5 グラフィックによる結果表示

ここでは、グラフィックエディタで描かれた図だけを表示している。

分析メニューの「計算値消去」は、今計算した期待値を消し、「全数値消去」は、すべての整数値とラインに付いた利益（費用）と定数の値を消去するものである。後者のボタンは教員が演習問題等を作るときに利用すると便利である。

この例題は計算だけなら表計算ソフトを用いて簡単に実行できるが、図に表すことによって意思決定の構造が明瞭になり、学習者の興味も向上する。また、図が簡単に描けることで、指導者と学習者相互に負担なくデシジョンツリーについての教育が可能となる。

３．リスク分析

事業体の利益（一般には量的な各種指標）は、意思決定者の決断とそれによる影響及び、意思決定者には操作不能の、事業体を取り巻く環境によって変化する。リスク分析は、事業体の利益に関する数量的構造モデルを作成し、その中で、意思決定者が決定できる事項には１つの数値を設定し、環境には上限と下限の幅を持った数値を設定して、それらの影響により利益がどのように変化するかを調べる手法である。我々のプログラムは、この構造モデルをグラフィックエディタによる図で表現し、What-If 分析を実行したり、設定値を確率的に変化させるモンテカルロシミュレーション等を容易に行えるツールである。

メニュー［分析－意思決定支援他－リスク分析］を選択すると、図１で与えられる分析メニューが表示される。

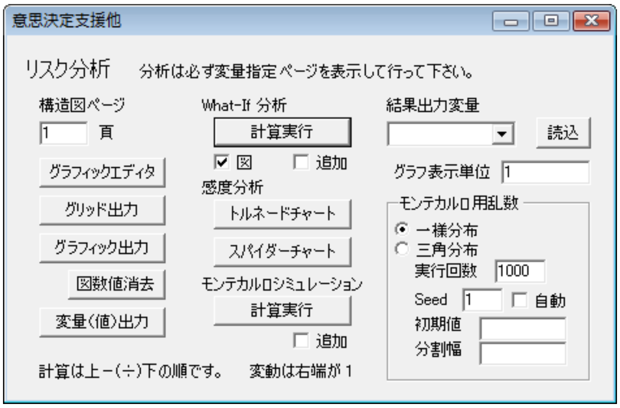


図１ 分析メニュー

左側の上３つのボタンは、グラフィックエディタ関連のボタンである。「グラフィックエディタ」ボタンでグラフィックエディタを表示し、例えば図２のような構造図を描く。

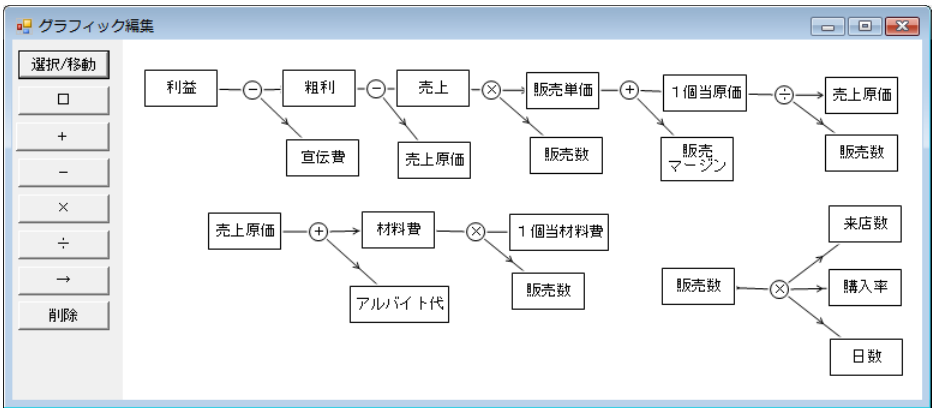


図２ リスク分析構造図

左側の「□」ボタンで変量を描き、「＋」「－」「×」「÷」ボタンで演算の種類、「→」ボタンで演算関係を結んで行く。但し、「－」ボタンは、図の中で一番上の変量から下に続く変量を引くことを意味する。「÷」ボタンも同様である。この中で例えば、「販売数」は 4 か所に見られるが、これは図の右下の、販売数が最上位に位置する関係によって定義される。「売上原価」も同様である。そのため、変量名は間違わないよう入力しておかなければならない。特に半角と全角の数字や英字は注意が必要である。

構造図ができたら、分析メニュー左下の「変量（値）出力」ボタンをクリックする。それによって構造図は、分析メニュー左上の「構造図ページ」テキストボックスで示されるグリッドエディタのページに書き込まれ、ユーザーが値を指定する変量の入力形式が図 3a のように出力される。

	変量値	基準値	最小値	最大値	変動[0/1]
アルバイト代					
宣伝費					
日数					
来店数					
販売マージン					
購入率					
1個当材料費					

図 3a グリッドエディタ貼付用データ入力画面

この画面をグリッドエディタにコピーして、必要なデータを図 3b のように入力する。

	変量値	基準値	最小値	最大値	変動[0/1]
アルバイト代	82000				0
宣伝費	130000	150000	130000	150000	1
日数	30				0
来店数	3500	3500	3200	4300	1
販売マージン	140	140	110	150	1
購入率	0.02	0.02	0.015	0.03	1
1個当材料費	70				0

図 3b グリッドエディタでのデータ入力

ここで、変量値は What-If 分析の中で使用するデータ値、最小値と最大値はデータの中で考えられる最小と最大、基準値は尤もらしいと思われる値であり、変量値は特別な設定でない限り、基準値を用いる。変量の値が 1 つに決まる場合は、変量値のみ記入する。「変動[0/1]」は、以後のトルネードチャートやスパイダーチャート、またモンテカルロシミュレーションで値を変動させるかどうかを決める変数で、0 は固定値、1 は変動値である。

グリッドエディタで変量入力画面を表示して、What-If 分析の「計算実行」ボタンをクリックすると、変量値を元にして「構造図ページ」で指定した構造図に基づいて計算を実行する。計算結果は、

図と表で、図 4 と図 5a のように示される。

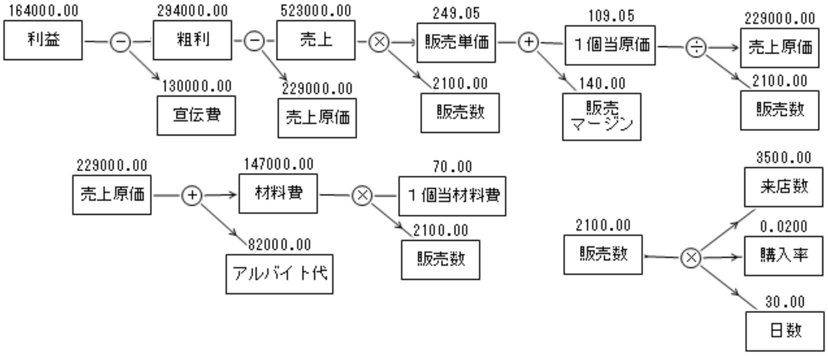


図 4 構造図の計算結果


What-If 分析

利益	164000
売上原価	229000
販売数	2100
アルバイト代	82000
売上	523000
宣伝費	130000
日数	30
材料費	147000
来店数	3500
粗利	294000
販売マージン	140
販売単価	249.05
購入率	0.02
1個当原価	109.05
1個当材料費	70

図 5a 単独結果表示


What-If 分析

利益	164000	237500	311000
売上原価	229000	265750	302500
販売数	2100	2625	3150
アルバイト代	82000	82000	82000
売上	523000	633250	743500
宣伝費	130000	130000	130000
日数	30	30	30
材料費	147000	183750	220500
来店数	3500	3500	3500
粗利	294000	367500	441000
販売マージン	140	140	140
販売単価	249.05	241.24	236.03
購入率	0.02	0.025	0.03
1個当原価	109.05	101.24	96.03
1個当材料費	70	70	70

図 5b 複数結果表示

追加チェックボックスをチェックして、設定を変えた計算結果を図 5b のように追加して行くこともできる。図 5b は購入率を 0.02, 0.025, 0.03 と変えて行った場合の結果の変化である。

次に変量の変動が利益（一般に結果を出力する変量）に及ぼす影響を見る。最初に結果出力変量の「読込」ボタンをクリックし、コンボボックスで「利益」を選択する。その後、「トルネードチャート」ボタンをクリックすると、図 3b で変動が 1 の変量を最小値から最大値へ動かしてできるトルネードチャートと呼ばれるグラフが表示される。結果を図 6 に示す。

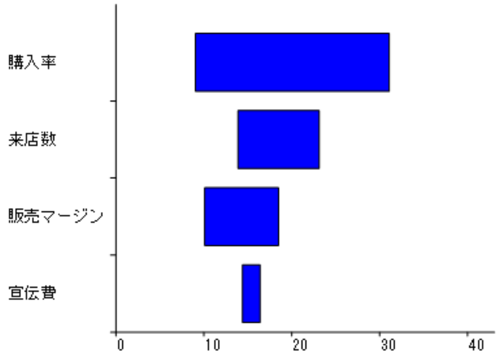


図 6 トルネードチャート

ここで横軸の単位は、分析メニューの「グラフ表示単位」のテキストボックスで、10000 に設定してあり、1 万円単位になっている。この図によって利益はどの変数の変動の影響を受け易いか知ることができる。

トルネードチャートは最小値と最大値で変動を見たが、その間を細かく分割して見るグラフがスパイダーチャートである。分析メニューの「スパイダーチャート」ボタンをクリックすると図 7 のようなスパイダーチャートが表示される。

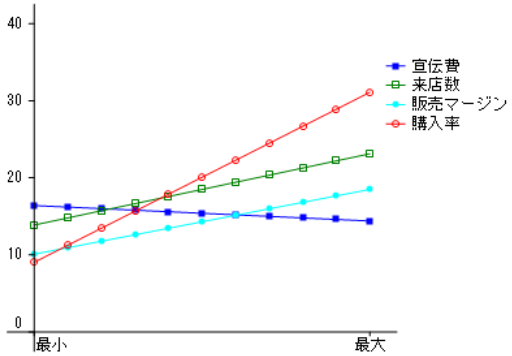


図 7 スパイダーチャート

横軸は各変数の最小値から最大値への変化を表す。その変化によって利益が増大することも減少することもある。

これまでは、1 つの変量の変化によって利益がどのように変化するか見てきたが、これらの変量が同時に変化する場合、利益はどのように変動するのであろうか。これを調べるのがモンテカルロシミュレーションである。分析メニューでモンテカルロシミュレーションの「計算実行」ボタンをクリックすると、図 3b で変動が 1 の変数について、右下のモンテカルロ用乱数グループボックス内の分布

で変動する場合の利益の分布が、ヒストグラムで表示される。図 8a は分布が最小値から最大値の一様分布の場合、図 8b は基準値を頂点とする三角分布の場合である。

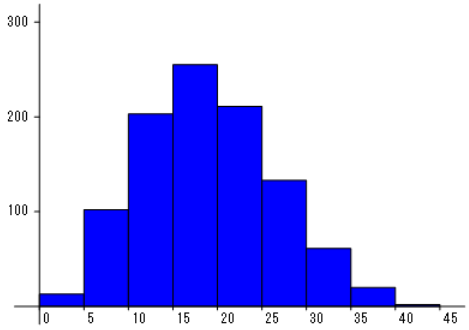


図 8a 一様分布に基づく利益の変動

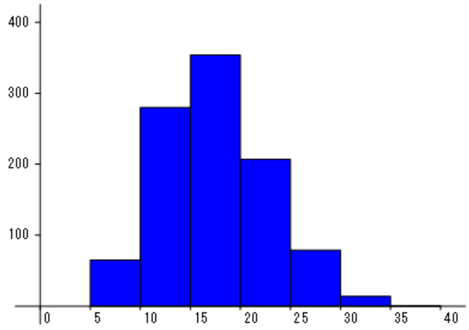


図 8b 三角分布に基づく利益の変動

ここでは「追加」チェックボックスをチェックすることにより、条件を変えた場合のシミュレーション結果の比較を行うこともできる。図 9 に日数を 30 日と 35 日にした場合の比較の例を示す。

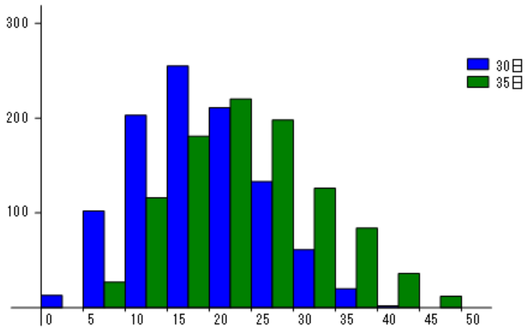


図 9 一様分布に基づく利益の変動の比較

４． 社会的意思決定手法

ここではいくつかの候補に対して、複数の審査員によって総合的な評価を与える方法を考える。その方法としてよく用いられているものに、審査員が審査項目について点数を付けその合計を評価とする方法がある。しかし、この評価法は審査員の評価の厳しさのばらつきや評価の差についての不統一性から、最終評価が疑問視される場合もある。また、審査員が候補に対して順位を付け、その順位を用いて最終評価を行う場合もある。これについては審査員の個人差は抑えられるが、候補についての審査員の思い入れの強さは考えられていない。ここでは、審査員の個人差を押さえて総合評価を与える、順位を用いた方法について考える。

総合評価に審査員の順位を用いる方法でよく利用されるものに順位法と一対比較法がある。順位法は各候補の獲得した順位にあるウェイトを付けて合計を取って評価を競うものである。ウェイトの付け方には一般的によく用いられるウェイト間の間隔を一定とする等間隔ウェイトと標準正規分布の確率と座標値を利用する正規性ウェイトがある。

今候補数 r に対して s 人の審査員が順位を付けるものとする。候補 i について順位 k を獲得した回数を n_{ik} とし、順位 k に w_k 点のウェイトを与えるものとする。これにより候補 i が獲得した点数 d_i を以下のように計算する。

$$d_i = \sum_{k=1}^{r} w_k n_{ik}$$

評価 e_i はこの点数の最大が 1、最低が 0 になるよう、以下のように定義する。

$$e_i = \frac{d_i - \min d}{\max d - \min d}$$

ここに $\max d$ と $\min d$ はそれぞれ d_i （$i = 1, 2, \cdots, r$ ）の最大値と最小値とする。

ウェイト w_k の与え方には２つの方法がよく利用される。１つは隣り合った順位の差が一定となるような等間隔ウェイトの方法で、もうひとつは標準正規分布の確率変数値を利用する正規性ウェイトの方法である。等間隔ウェイトの方法では、候補数 r の場合の順位 k のウェイトを簡単に $w_k = r - k + 1$ とすることが多い。例えば候補数 4 の場合、1 位 4、2 位 3、3 位 2、4 位 1 である。

正規性ウェイトは、標準正規分布の密度関数の面積を r 等分し、各分割の中央値の座標をウェイトに利用する。すなわち、 $p_k = 1 - (k - 1/2)/r$ として、下側確率 p_k となる座標値 $z_k \equiv Z(p_k)$ を用いる。我々のプログラムではこの z_k を使ってウェイトを以下のように偏差値で定義している。

$$w_k = 50 + 10 z_k$$

一対比較法では、各審査員について候補者を対にして順位を比べ、優っている方に 1、劣っている方に 0 を付ける。この得点を用いて他の候補に対して優っている割合を計算し、その割合から標準正規分布の座標値を求め、その値を候補者ごとに合計して最終評価を決める。

順位法の場合と同じデータで候補 i と候補 j の順位を比較したとき、候補 i が優っていると評価した審査員が s_{ij} 人、その逆が s'_{ij} 人とする。もちろん $s_{ij}+s'_{ij}=s$ である。これを用いると候補 i が優っているとした審査員数の比率 p_{ij} は $p_{ij}=s_{ij}/s$ である。標準正規分布の下側確率が p_{ij} となる座標値 $z_{ij}\equiv Z(p_{ij})$ を用いて、得点 d_i は以下のように定義される。

$$d_i=\sum_{j=1}^{r} z_{ij}$$

但し、実用上は $p_{ij}=0$ または $p_{ij}=1$ となる場合があることから、比率 p_{ij} を以下のように再定義する。

$$p'_{ij}=(s_{ij}+1)/(s+2)$$

次に A, B, C, D の 4 人の候補に 10 人の審査員が順位を付ける場合の例として、図 1 にデータ入力画面を示す。ここに使われているデータは各審査員の与えた各候補の順位であるが、代わりに昇順または降順の得点を与えても順位に換算してくれる。

社会的意思決定手法の分析画面を図 2 に示す。

	A	B	C	D
1	1	2	4	3
2	3	1	2	4
3	1	3	4	2
4	2	1	3	4
5	1	3	2	4
6	4	2	3	1
7	2	1	4	3
8	3	1	4	2
9	4	3	2	1
10	2	4	1	3

図 1 社会的意思決定法入力画面

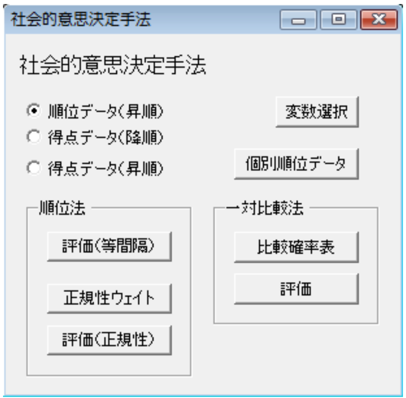


図 2 社会的意思決定手法分析画面

得点データの場合は左のラジオボタンで指定するが、それを順位に変換したデータは「個別順位データ」ボタンで表示できる。順位法では等間隔ウェイトと正規性ウェイトがあるが、ウェイトの値は、等間隔ウェイトは明らかなので、正規性ウェイトのみ表示できるようになっている。一対比較法については一対比較の比較優位確率値と評価結果が表示できるようになっている。

まず順位法の等間隔ウェイトを用いた集計と評価結果を図 3 に示す。

評価(等間隔)

順位	1	2	3	4	合計	加重合計	加重平均	評価
ウェイト	4	3	2	1				
A	3	3	2	2	10	27.00	2.700	0.750
B	4	2	3	1	10	29.00	2.900	1.000
C	1	3	2	4	10	21.00	2.100	0.000
D	2	2	3	3	10	23.00	2.300	0.250
合計	10	10	10	10				

図 3 等間隔ウェイト順位法評価画面

ここで表の左半分の値は各候補が上の列名の順位を獲得した回数である。加重合計はこの回数にウェイトを掛けて合計したものであり、加重平均はそれを審査員の人数で割ったものである。評価は理論のところでも述べたように 1 位が 1、最下位が 0 になるように線形変換したものである。

正規性ウェイトの確率値と標準正規分布の座標値及びウェイトについては「正規性ウェイト」ボタンを押すことにより、図 4 のように表示される。

正規性ウェイト

	累積確率値	横座標値	ウェイト
1	0.8750	1.1503	61.50
2	0.6250	0.3186	53.19
3	0.3750	-0.3186	46.81
4	0.1250	-1.1503	38.50

図 4 正規性ウェイトの表示画面

このウェイトを用いた評価結果は図 5 のように表される。

評価(正規性)

順位	1	2	3	4	合計	加重合計	加重平均	評価
ウェイト	61.50	53.19	46.81	38.50				
A	3	3	2	2	10	514.69	51.47	0.734
B	4	2	3	1	10	531.32	53.13	1.000
C	1	3	2	4	10	468.68	46.87	0.000
D	2	2	3	3	10	485.31	48.53	0.266
合計	10	10	10	10				

図 5 正規性ウェイト順位法評価結果

同順位が含まれている場合、例えば 1 位が 2 人いる場合、$(1+2)\div 2=1.5$ として、両方1.5位として扱うが、それぞれの等間隔ウェイトは $5-1.5=3.5$ と定義する。また正規性ウェイトは、$p_{1.5}=1-(1.5-0.5)\div 4=0.75$ の確率を用いて求めるようになっている。同順位が含まれる場合の具体的な等間隔ウェイトの評価画面を図 6 に示す。

評価（等間隔）

順位	1	1.5	2	3	4	合計	加重合計	加重平均	評価
ウェイト	4	3.5	3	2	1				
A	2	1	3	2	2	10	26.50	2.650	0.647
B	4	1	1	3	1	10	29.50	2.950	1.000
C	1	0	3	2	4	10	21.00	2.100	0.000
D	2	0	2	3	3	10	23.00	2.300	0.235
合計	9	2	9	10	10				

図 6 同順位が含まれる場合の等間隔ウェイト順位法評価画面

一対比較法において順位法で用いたデータと同じものから求めた比較優位確率値の表示画面を図 7 に示す。この行列の成分は行要素が列要素に優る確率である。但し、理論のところで述べた補正は行っている。

比較確率表（行要素が優位である確率）

	A	B	C	D
A	0.5000	0.4167	0.5833	0.6667
B	0.5833	0.5000	0.6667	0.5833
C	0.4167	0.3333	0.5000	0.4167
D	0.3333	0.4167	0.5833	0.5000

図 7 比較優位確率表表示画面

上の比較優位確率表の値が下側確率となる標準正規分布の座標値を求め、その合計を取って評価を行った実行画面を図 8 に示す。最終的な評価は三つの評価法で比較できるようになっている。

比較評価表（行要素が優位である得点）

	A	B	C	D	合計	平均	評価
A	0.0000	-0.2104	0.2104	0.4307	0.4307	0.108	0.753
B	0.2104	0.0000	0.4307	0.2104	0.8516	0.213	1.000
C	-0.2104	-0.4307	0.0000	-0.2104	-0.8516	-0.213	0.000
D	-0.4307	-0.2104	0.2104	0.0000	-0.4307	-0.108	0.247

図 8 一対比較法評価結果

５．ラフ集合分析

5.1 ラフ集合分析の理論

ラフ集合は、集合の要素の属性値が連続的は範囲になっている場合や集合の要素が複数の属性値で与えられる場合に定義される。

例えば、集合 U の各要素 $s_i\,(i=1,\cdots,n)$ が、属性値 x_i^a $(a=1,\cdots,p)$ を持つ場合において、属性値がすべて等しいという関係 R を考え、要素 s_i と属性値がすべて等しい要素の集合を R による s_i の同値類といい、$[s_i]_R$ と書く。

集合 U のある部分集合 X について、以下の $R_*(X)$ と $R^*(X)$ をそれぞれ、R による集合 X の下近似及び上近似という。

$$R_*(X)=\{s_i|[s_i]_R\subseteq X\},\qquad R^*(X)=\{s_i|[s_i]_R\cap \mathrm{X}\neq\emptyset\}$$

これらの下近似と上近似を合わせて、集合 X のラフ集合という。

集合の要素 s_i とその属性値 x_i^a を表にしたものを情報表という。表 1 にその例を示す。

表 1 情報表

要素	属性 a	属性 b	属性 c	属性 d
s1	a1	b1	c1	d1
s2	a2	b2	c1	d1
s3	a3	b1	c1	d2
s4	a1	b2	c2	d2
s5	a2	b1	c2	d1
s6	a2	b2	c1	d2
s7	a3	b1	c1	d2

情報表は要素と属性名で属性値を与える表である。情報表の中で要素の集合を U、属性の集合を AT 、属性値の集合を V 、要素と属性から属性値への写像を ρ とすると、情報表はこれらの 4 対 (U,AT,V,ρ) で表わされる。

表 1 の例では、U= {s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7}、AT= { 属性 a, 属性 b, 属性 c, 属性 d }、V= { a1, a2, ⋯ , d2 }で、ρ は行列の行と列から要素を示す写像となる。

属性の集合 AT の属性値がすべて等しいという関係を R_{AT} とすると、R_{AT} による同値類 $[s_i]_{R_{AT}}$ の集合が求められる。この同値類の集合は属性の部分集合 $A\subseteq AT$ によっても得られる。これらの部分集合のうち、属性数の最小の部分集合 A を AT の縮約という。縮約は一般に複数存在する。

表 1 の例では、同値類の集合は { {s1}, {s2}, {s3,s7}, {s4}, {s5}, {s6} } であり、縮約 A は、{属性 a, 属性 b, 属性 d }、{属性 a, 属性 c, 属性 d}、{属性 b, 属性 c, 属性 d} の 3 種類である。

次に、情報表に新しい属性の集合 D を加えて表を作りなおす。この新しい属性をこれまでの属性の集合 $C\,(=AT)$ と異なるものと考え、これまでの属性を条件属性、新しく加えた属性を決定属性と

呼ぶ。新しくなった属性全体の集合 AT' は $AT' = C \cup D$ となる。このように条件属性と決定属性からなる情報表は決定表と呼ばれる。以下ではこの決定表について話を進める。表 2 に決定表の例を示す。一般に決定属性の数は 1 つとは限らないが、ここでは簡単のため 1 つの場合を考える。

表 2 決定表

要素	条件属性 a	条件属性 b	条件属性 c	条件属性 d	決定属性 e
s1	a1	b1	c1	d1	e2
s2	a2	b2	c1	d1	e1
s3	a3	b1	c1	d2	e2
s4	a1	b2	c2	d2	e1
s5	a2	b1	c2	d1	e2
s6	a2	b2	c1	d2	e1
s7	a3	b1	c1	d2	e1

決定属性の集合 D（またはその部分集合）によって、全体集合は $D_i\ (i = 1, \cdots, p)$ に分割できる。D_i は決定クラスと呼ばれる。条件属性の集合 C が与えられると、識別不能関係 R_C に基づく、各決定クラス D_i の下近似 $C_*(D_i)$ と上近似 $C^*(D_i)$ が与えられる。これらは、どんな属性なら特定の決定クラスに確実に含まれるか、または、含まれる候補となりうるかといった、分割の識別可能性の情報をすべて与えてくれる。

表 2 の例で、決定属性 e の属性値が e1 の集合を D_1={s2, s4,　s6, s7}、e2 の集合を D_2={s1, s3, s5} とすると、決定クラス D_1 と D_2 の下近似と上近似は以下のようになる。

$C_*(D_1)$ = {s2, s4, s6}，$C^*(D_1)$ = {s2, s3, s4, s6, s7},

$C_*(D_2)$ = {s1, s5}，$C^*(D_2)$ = {s1, s3, s5, s7}

次に決定表の縮約について考える。情報表の縮約の場合は、属性の値で要素がどのように識別されるかを問題にしたが、決定表の場合は、決定クラスについて要素の識別を考える。即ち、集合 C のどんな部分集合で、元の識別結果と同じ結果を出せるかという問題である。識別の情報は、すべて下近似と上近似に含まれているので、これは元の属性集合のどんな部分集合で、同じ下近似と上近似を与えることができるかという問題になる。その部分集合で最小のものが縮約である。

決定表の縮約を求めるには、いくつかの方法が考えられるが、我々は識別行列を求める方法を利用した。識別行列は、決定クラスの異なる 1 対の要素間を識別するために必要な属性の和集合を成分とする行列で与えられる。表 2 の例では、識別行列は表 3 のようになる。

表 3 識別行列

	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7
s1	*						
s2	a|b	*					
s3	*	a|b|d	*				
s4	b|c|d	*	a|b|c	*			

s5	*	b|c	*	a|b|d	*		
s6	a|b|d	*	a|b	*	b|c|d	*	
s7	a|d	*	nul	*	a|c|d	*	*

この中で記号「*」は決定クラスが同じもので、「nul」は識別できる属性がないもの、その他 a|b 等は識別できる属性の和集合である。和集合を表わす演算子は「|」と書くことにする。縮約が正確に行われるためには、これらの関係がすべて成り立たなければならないので、これらの積集合が決定表の縮約となる。それを実行すると以下となる。

$$(a|b)\&(a|b|d)\& \cdots \&(a|c|d) = (a\&b)|(a\&c)|(b\&d)$$

ここで、積集合を表わす演算子は「&」と書くことにする。この関係から、縮約は属性 a と属性 b、属性 a と属性 c、属性 b と属性 d の 3 種類であることが分かる。これらの縮約の属性によっても、決定クラス D_1 と D_2 の下近似と上近似は完全に再現される。

決定表は条件属性の値に対して決定属性の値を決める以下の決定ルールを与える。

a1&b1&c1&d1 ⇒ e2 (s1)
a2&b2&c1&d1 ⇒ e1 (s2)
a1&b2&c2&d2 ⇒ e1 (s4)
a2&b1&c2&d1 ⇒ e2 (s5)
a2&b2&c1&d2 ⇒ e1 (s6)

ここに、属性名は省略している。s3 と s7 については条件属性の値が同じで、決定属性の値が異なっているのでルールにならない。

これらのルールから、まず決定クラス D_1 を決めるルールを考える。これらのルールの中で、結果が e1 となる要素を求めると、決定クラス D_1 の下近似がそれである。これらと決定クラス D_2 の要素とを識別する属性を求める。行列の行に決定クラス D_1 の下近似の要素、列に決定クラス D_2 の要素を取り、行列の成分にそれぞれの属性の値が異なるもののうち、D_1 の下近似の要素の属性を書く。これを決定クラスD_1の決定行列という。表 4 に決定行列の例を示す。

表 4 決定クラスD_1の決定行列

	s1	s3	s5
s2	a2|b2	a2|b2|d1	b2|c1
s4	b2|c2|d2	a1|b2|c2	a1|b2|d2
s6	a2|b2|d2	a2|b2	b2|c1|d2

s2, s4, s6 のどれかのルールがすべて満たされれば、識別が可能であるので、ルールは以下のように求められる。

$$\{(a2|b2)\&(a2|b2|d1)\&(b2|c1)\}|\cdots|\{(a2|b2|d2)\&(a2|b2)\&(b2|c1|d2)\}$$
$$= b2|(a2\&c1)|(a1\&c2)|(c2\&d2)|(a1\&d2)|(a2\&d2)$$

これから、決定ルールは、b2, a2&c1, a1&c2, c2&d2, a1&d2, a2&d2 のうちのどれかになる。

決定ルールとそのうちどのルールが D_1 の識別に用いられたかを示す表を表 5 に示す。

表 5 決定クラスD_1の決定ルール

	C.I.	s2	s4	s6	s7
b2	3/4	*	*	*	
a2&c1	2/4	*		*	
a1&c2	1/4		*		
c2&d2	1/4		*		
a1&d2	1/4		*		
a2&d2	1/4			*	

ここに、C.I.（Covering Index）は、左端の決定ルールが、D_1 の要素の識別のうち、いくつに使われているかを表す指標で、「*」はそれがどの識別で用いられているかを表す。例えばルール a2&c1 はD_1の 4 つの要素の識別のうち、2 つの要素 s2 と s6 の識別に用いられている。

決定クラス D_2 の決定行列と決定ルールは、表 6 と表 7 のようになる。

表 6 決定クラスD_2の決定行列

	s2	s4	s6	s7
s1	a1|b1	b1|c1|d1	a1|b1|d1	a1|d1
s5	b1|c2	a2|b1|d1	b1|c2|d1	a2|c2|d1

表 7 決定クラスD_2の決定ルール

	C.I.	s1	s3	s5
b1&d1	2/3	*		*
a1&b1	1/3	*		
a1&c1	1/3	*		
a1&d1	1/3	*		
a2&b1	1/3			*
b1&c2	1/3			*
a2&c2	1/3			*
c2&d1	1/3			*

ここで述べたルールは決定属性の決定者が 1 人の場合である。決定者が複数人の場合はルールの併合という問題が生じる。これについてプログラムでは触れず、C.I.の情報を提示して、ルールの信頼性を提示するに留める。

5.2 プログラムの動作

経営科学の立場で言うと、ラフ集合分析は、どんな属性の組合せが良い選好結果を与えるかを求める分析手法である。ここではプログラムの利用法を表 8 の例を用いて説明する。これは前節で用いた

サンプルを直感的に分かり易いように具体的な事例に書き換えたものである。

表 8 スナック菓子の選好

サンプル	原料	味	形	口当たり	選好
s1	小麦	塩	丸	堅め	それほど
s2	じゃが	しょうゆ	丸	堅め	好き
s3	もろこし	塩	丸	ソフト	それほど
s4	小麦	しょうゆ	四角	ソフト	好き
s5	じゃが	塩	四角	堅め	それほど
s6	じゃが	しょうゆ	丸	ソフト	好き
s7	もろこし	塩	丸	ソフト	好き

表 1 はスナック菓子のサンプル s1 から s7 について、試食した好みの結果を与えたデータである。サンプルはいくつかの属性で分けられている。「原料」から「口当たり」までが条件属性で、「選好」が決定属性である。まず、このデータをメニュー「ファイルー開く」でプログラムに読み込んでおく。

メニュー［分析－意思決定支援他－ラフ集合分析］を選択すると、図 1 に示される分析メニューが表示される。

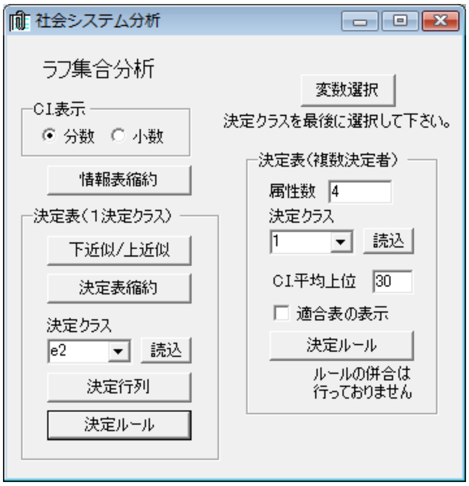


図 1 分析メニュー

最初に、「変数選択」ボタンで、変数「原料」から「口当たり」までを選択し、「情報表縮約」ボタンをクリックすると図 2 の同値類の集合と縮約結果が表示される。

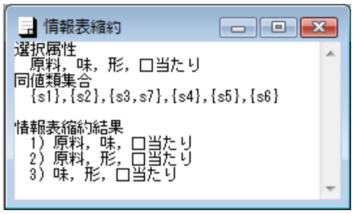


図 2 情報表縮約結果

この場合、縮約は 3 種類で、同じ同値類の集合を与える。

次に「変数選択」ボタンで、すべての変数を選択する。最後の変数は決定属性となる。「下近似/上近似」ボタンをクリックすると図 3 のような結果を与える。

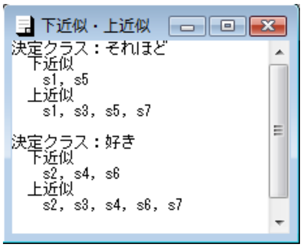


図 3 下近似/上近似結果

これと同じ下近似と上近似を与える最小の属性部分集合を与える決定表の縮約を求めるには「決定表縮約」ボタンをクリックする。結果を図 4 に示す。

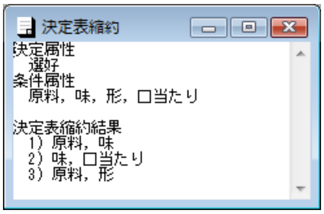


図 4 決定表縮約結果

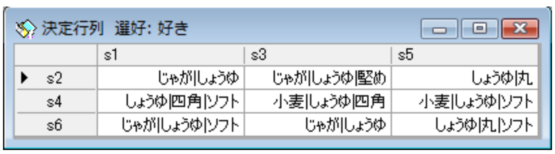
「決定表縮約」ボタンで、決定表縮約結果と同時に、計算過程である識別行列も図 5 のように表示される。


識別行列

	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7
s1	*						
s2	原料|味	*					
s3	*	原料|味|口当たり	*				
s4	味|形|口当たり	*	原料|味|形	*			
s5	*	味|形	*	原料|味|口当たり	*		
s6	原料|味|口当たり	*	原料|味	*	味|形|口当たり	*	
s7	原料|口当たり	*	nul	*	原料|形|口当たり	*	*

図 5 識別行列

次に、分析メニュー左側の「読込」ボタンをクリックして、決定クラスを選択する（この場合は「好き」を選んでいる）。その後、「決定行列」ボタンをクリックするとルールを抽出する計算過程である決定行列が図 6 のように表示される。


決定行列 選好: 好き

	s1	s3	s5
s2	じゃが|しょうゆ	じゃが|しょうゆ|堅め	しょうゆ|丸
s4	しょうゆ|四角|ソフト	小麦|しょうゆ|四角	小麦|しょうゆ|ソフト
s6	じゃが|しょうゆ|ソフト	じゃが|しょうゆ	しょうゆ|丸|ソフト

図 6 決定クラス「好き」の決定行列

決定クラスを選択して、「決定ルール」ボタンをクリックすると、図 7 のような決定ルールが表示される。

決定ルール条件部　選好: 好き

	C.I.	s2	s4	s6	s7
しょうゆ	3/4	*	*	*	
じゃが&丸	2/4	*		*	
小麦&四角	1/4		*		
四角&ソフト	1/4		*		
小麦&ソフト	1/4		*		
じゃが&ソフト	1/4			*	

図 7 決定クラス「好き」の決定ルールと信頼性

C.I.はそのルールがどれだけの要素の選好に利用されたかを表す量である。

これまで述べてきたことは、意思決定者が 1 人の場合である。表 9 に意思決定者が 3 人の場合の決定表の例を示す。

表 9 スナック菓子の選好（複数回答者）

サンプル	原料	味	形	口当たり	選好 1	選好 2	選好 3
s1	小麦	塩	丸	堅め	それほど	それほど	それほど
s2	じゃが	しょうゆ	丸	堅め	好き	好き	好き
s3	もろこし	塩	丸	ソフト	それほど	それほど	好き
s4	小麦	しょうゆ	四角	ソフト	好き	好き	好き
s5	じゃが	塩	四角	堅め	それほど	好き	それほど
s6	じゃが	しょうゆ	丸	ソフト	好き	好き	好き
s7	もろこし	塩	丸	ソフト	好き	好き	好き

複数人の場合は、各人のルールを集め、その中で、決定クラスの要素の選好に利用された数を決定クラスの全要素数（人数分の合計）で割ったものの大きい順に並べてみる。右側の決定表グループボックスの属性数を入力し、決定クラスを選択し、「決定ルール」ボタンをクリックすると図 8 のような決定ルールが表示される。表示されるルール数を変更する場合は C.I.平均上位テキストボックスに記入する（デフォルトは 30）。

多選好ルール　決定クラス: 好き

	CI選好1	CI選好2	CI選好3	CI全体
しょうゆ	3/4	3/5	3/5	9/14
じゃが&丸	2/4	0/5	2/5	4/14
ソフト	0/4	0/5	4/5	4/14
じゃが	0/4	3/5	0/5	3/14
小麦&四角	1/4	0/5	1/5	2/14
小麦&ソフト	1/4	1/5	0/5	2/14
四角	0/4	2/5	0/5	2/14
もろこし	0/4	0/5	2/5	2/14
四角&ソフト	1/4	0/5	0/5	1/14
じゃが&ソフト	1/4	0/5	0/5	1/14

図 8 決定クラス「好き」の決定ルール（複数人数）

これらのルールがどの要素の識別に利用されたかを見たい場合は、「適合表の表示」チェックボック

スをチェックして、「決定ルール」ボタンをクリックすると、図 9 のような決定ルール画面が表示される。

多選好ルール 決定クラス: 好き

	CI選好1	CI選好2	CI選好3	CI全体	s2	s4	s6	s7	s3	s5	s1
適合率					1	1	1	1	0.333	0.333	0
しょうゆ	3/4	3/5	3/5	9/14	*	*	*				
じゃが&丸	2/4	0/5	2/5	4/14	*		*				
ソフト	0/4	0/5	4/5	4/14		*	*	*	*		
じゃが	0/4	3/5	0/5	3/14	*		*			*	
小麦&四角	1/4	0/5	1/5	2/14		*					
小麦&ソフト	1/4	1/5	0/5	2/14		*					
四角	0/4	2/5	0/5	2/14		*				*	
もろこし	0/4	0/5	2/5	2/14				*	*		
四角&ソフト	1/4	0/5	0/5	1/14		*					
じゃが&ソフト	1/4	0/5	0/5	1/14			*				

図 9 決定クラス「好き」の決定ルール（複数人数・適合表付き）

一番上の「適合率」は選好回答者数 3 人のうち何人が「好き」と回答したかの割合を表している。この表はルールを完全に確定するためのものではなく、あくまでも意思決定の支援のためのものと考えている。

６．ＩＳＭ

ISM（Interpretive Structural Modeling）は問題の因果関係の階層構造を作成する数学的手法で、各要因間の直接的な因果関係を表わす隣接行列 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ を決定することから始める。この隣接行列の成分は、問題の要素となりうる n 個の要因のうち、要因 i から要因 j への直接的な因果関係の有無によって $a_{ij}=1$ または $a_{ij}=0$ の値をとる。例えば図 1 に示されるモデルでは、隣接行列は以下のように与えられる。

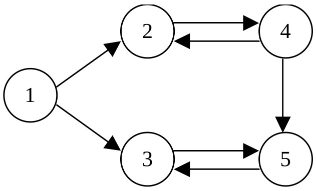


図 1 要因間の因果関係

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列は 1 つの矢印で結ばれた隣接する要因間を 1 で繋いでいる。

次に、以下のような隣接行列間の演算を定義する。

$$(\mathbf{A}^2)_{ij}=\underset{k}{\vee}(a_{ik}\wedge a_{kj})$$

ここに $\wedge$ は、1 を真、0 を偽と見た場合の論理積を、$\underset{k}{\vee}$ は、k についての論理和を表わすものとする。

この行列 $\mathbf{A}^2$ は最大 2 つの矢印を通って到達できる要因間を 1 で繋いでいる。この演算を繰り返すと、これ以上変化しない行列 $\mathbf{R}$ に到達するが、これを可到達行列という。可到達行列の成分が 0 になった要因間には、因果関係が無いものと解釈される。

可到達行列は、因果関係の階層構造を表わしているが、このままでは、関係が把握しにくい。そこで、階層の順序に従って要因を並べ替えた行列を作る。これを階層化可到達行列と呼び、$\mathbf{R}^*$ で表わす。この例での可到達行列、階層化可到達行列は以下のようになる。

$$\mathbf{R}=\mathbf{A}^3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{R}^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで並べ替えの順番は、(1, 2, 4, 3, 5) である。階層化可到達行列の中、四角で囲んである部分は、同じ階層を表わす。

上の場合、隣接行列の成分は直接的な因果関係の有無により 0 と 1 とであったが、因果関係をもう少し詳しく考えると、ある要因の傾向を高める（＋で表わす）場合もあるし、逆に低くする場合（－で表わす）もある。また影響はあるが不明（u で表わす）の場合もある。このような傾向を隣接行列に取り入れることもできる。但し、計算には表 1 の演算ルールを用いる。

表 1 演算ルール

∧演算	0	+	−	u	∨演算	0	+	−	u
0	0	0	0	0	0	0	+	−	u
+	0	+	−	u	+	+	+	u	u
−	0	−	+	u	−	−	u	−	u
u	0	u	u	u	u	u	u	u	u

以後、図 2 の関係図を元に、実際の分析画面を見て行く。

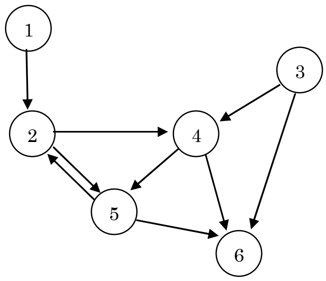


図 2 関係図

ISM の分析画面を図 3 に、具体的なデータ入力画面を図 4 に示す。データ入力において、0 は入力せず、空欄のまま残しておいてもよい。分析画面では、「データの種類」で、先に述べたように 0, 1 データか、+, −, u, 0 データか選択することができる。

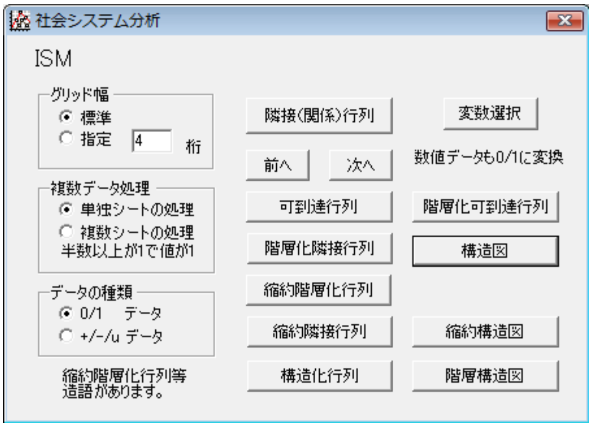
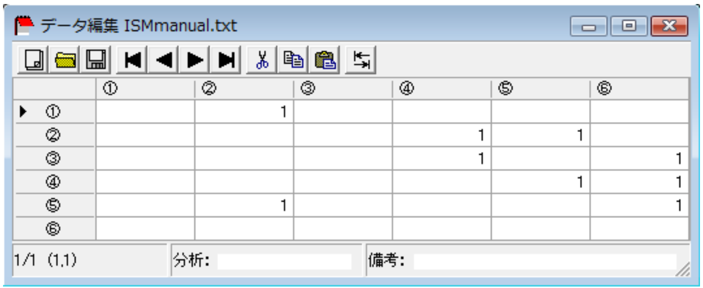


図 3 ISM 分析画面



	①	②	③	④	⑤	⑥
①		1				
②				1	1	
③				1		1
④					1	1
⑤		1				1
⑥						

図 4 ISM データ入力画面

このプログラムでは、1 枚の隣接行列シートから、分析を実行することもできるし、0, 1 データの場合、複数のシートの傾向を用いることもできる。複数のシートの場合は各セルのシート間の平均が 0. 5 以上の場合に 1、それ以下の場合に 0 として計算を行う。

分析手順として、まず要素間の 2 項関係を表す隣接行列（または関係行列）をもとにして直接関係のつながりをたどり、可到達行列を作る。可到達行列の作成過程は、途中の計算を見るために、「前へ」と「次へ」のボタンを設け、処理の流れを追えるようになっている。

次にこの可到達行列の階層構造を調べ、要素を階層的に並べ替えた階層化可到達行列を作る。この行列は要素間の有向グラフなどを描く際に利用されるが、現在のバージョンでは、これらに加えて階層化隣接行列、縮約階層化行列、縮約隣接行列、構造化行列などの表示機能が加わっている。構造化行列を除くこれらの行列は我々が定義したもので、意味は例をもとに以下で説明する。

図 4 のデータから、「隣接（関係）行列」ボタンをクリックして図 5 の結果を得る。

初期行列 パス = 1

	①	②	③	④	⑤	⑥
①	1	1				
②		1		1	1	
③			1	1		1
④				1	1	1
⑤		1			1	1
⑥						1

図 5 隣接関係行列

このデータによる階層化可到達行列は図 6 となる。階層化可到達行列の計算方法は参考文献 5）で述べており、ここでは省略する。この階層化可到達行列を用いた階層図を図 7 に示す。

階層化可到達行列

	①	③	②	④	⑤	⑥
①	1		1	1	1	1
③		1	1	1	1	1
②			1	1	1	1
④			1	1	1	1
⑤			1	1	1	1
⑥						1

図 6 階層化可到達行列表示画面

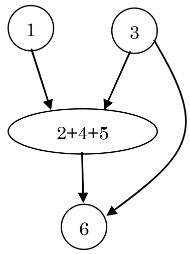


図 7 階層図

図 7 は階層化可到達行列を参考に描いたものだが、実はこの図を描くことは意外と難しい。到達可能な要素への成分が多すぎて、これだけ少ない要素ですら一目でその構造は見抜けない。そこで我々は描画の助けとなるいくつかの行列を定義した。

階層化隣接行列は隣接（関係）行列の要素を階層化可到達行列で示された順に並べ替えたものである。要素の並びが階層順であるため、階層化可到達行列と見比べて図 7 を描くには隣接（関係）行列より便利である。図 8 にその表示画面を示す。

階層化隣接行列

	①	③	②	④	⑤	⑥
①	1		1			
③		1		1		1
②			1	1	1	
④				1	1	1
⑤			1		1	1
⑥						1

図 8 階層化隣接行列表示画面

この出力表示にはグラフィック表示も選択できる。「構造図」ボタンをクリックすると図 9 のような画面が表示される。但し、これは図の位置を手直ししたものである。

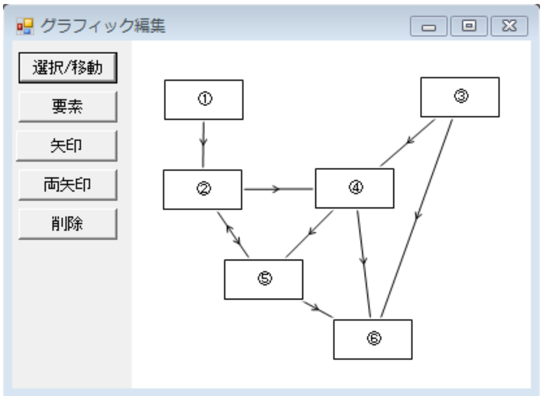


図 9 階層化隣接行列からの構造図

次の縮約階層化行列は、階層化行列の中ですべての要素間が相互に関係（この場合は 1）で結ばれた部分の要素を 1 つにまとめて表すものである。その表示画面を図 10 に示す。

縮約階層化行列

	①	③	②+④+⑤	⑥
①	1		1	1
③		1	1	1
②+④+⑤			1	1
⑥				1

図 10 縮約階層化行列表示画面

縮約隣接行列は、縮約階層化行列の中で、隣接（関係）行列に現れない関係を除いたものである。その表示画面を図 11 に示す。この行列の対角要素を除いた関係はまさに図 7 の関係を表している。

縮約隣接行列

	①	③	②+④+⑤	⑥
①	1		1	
③		1	1	1
②+④+⑤			1	1
⑥				1

図 11 縮約隣接行列表示画面

「縮約構造図」ボタンをクリックすると、縮約隣接行列のグラフィック表示が図 12 のように示される。

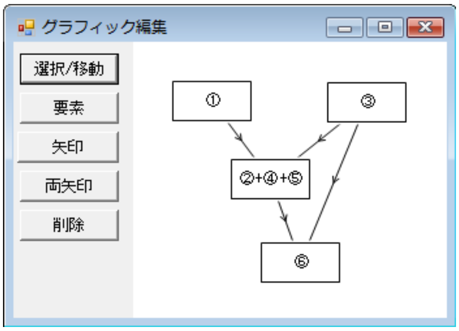
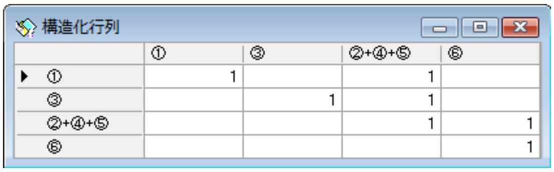


図 12 縮約構造図

最後に構造化行列であるが、これは縮約階層化行列の中で階層を飛ばす矢印を省いたものとして定義する。この行列はループのない場合の樹形図などを描く際に最適である。構造化行列の表示画面を図 13 に、それから描かれる構造図を図 14 に示す。図 14 では図 7 の中の階層を飛ばす矢印が消されている。


構造化行列

	①	③	②+④+⑤	⑥
①	1		1	
③		1	1	
②+④+⑤			1	1
⑥				1

図 13 構造化行列表示画面

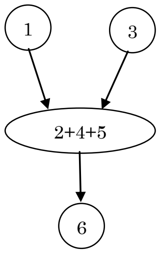


図 14 構造図

「階層構造図」ボタンをクリックすると図 15 のような、グラフィック表示が得られる。

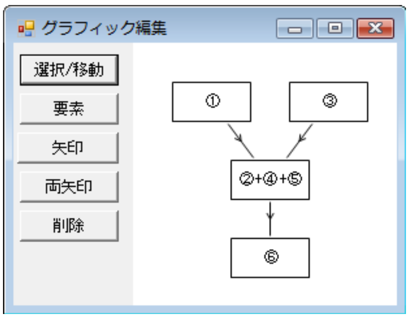


図 15 階層構造図

７．Dematel 法

Dematel (Decision Making Trial and Evaluation Laboratory) 法はある問題となるシステム内の要素間の関係の強さを専門家へのアンケートで決定し、その 2 項関係を用いて、各要素の影響の様子や影響の強さまたは影響を受ける程度などを導き出し、システム構造への理解を深めようとする分析手法である。このプログラムは参考文献 11) に従って作成した。

まず以下のような n 次元のクロスサポート行列を専門家へのアンケートから決める。

$$\mathbf{A} = (a_{ij})$$

クロスサポート行列 $\mathbf{A}$ の成分 a_{ij} は影響の強さに応じて {0, 2, 4, 6, 8} の値をとるものとする。次に以下のように直接影響行列 $\mathbf{D}$ を定義する。

$$\mathbf{D} = s\mathbf{A}$$

ここに係数 s は以下の関係を満たすものと仮定する。

$$s \le \sup \equiv 1 \Big/ \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| \qquad (1)$$

具体的には $s = \sup,\ 3/4 \cdot \sup,\ 1/2 \cdot \sup$ などがよく用いられる。

次に直接影響行列 $\mathbf{D}$ を使って、k 次の影響を考えるとその強さは $\mathbf{D}^k$ で与えられる。これよりすべての次数の影響を考えると全影響行列 $\mathbf{F}$ は以下のように与えられる。

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}^k = \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \qquad (2)$$

ここで (1) 式は (2) 式の収束の十分条件になっている。

全影響から直接影響を除いた間接影響行列 $\mathbf{H}$ は以下で与えられる。

$$\mathbf{H} = \sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{D}^k = \mathbf{D}^2(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}$$

これらの行列の成分の大きさは関係の強さを表しており、我々はある程度大きな値に絞って関係を見てみたいと考える。そこで、直接影響行列、全影響行列、間接影響行列それぞれにあるしきい値を設け、それより小さい成分はすべて 0 としてこれらの影響行列を書き直すことにする。これをそれぞれしきい値直接影響行列、しきい値全影響行列、しきい値間接影響行列とよぶ。これらすべてを総称する場合はしきい値影響行列とよぶ。以後の名称からは「直接」、「全」、「間接」を取り除き、この総称を用いることとする。必要な場合は適宜付けて用いる。

しきい値影響行列を用いて要素間の関係を示す構造図を描く際、ISM の階層化の技術を利用すると見通しがよくなる。そこでこれらの行列に対して 0 と異なる成分を 1 として、階層化可到達行列を求め、その要素の並びを用いてしきい値影響行列を書き直す。我々はこれを階層化しきい値影響行列と呼ぶ。

要素 i が他の要素から影響を受ける程度や要素 i が他の要素に影響を与える程度は、それぞれ

以下の式によって与えられる。

$$v_i(f)=\sum_{j=1}^{n} f_{ji} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\,,\qquad w_i(f)=\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}$$

この v_i を被影響度、 w_i を影響度と呼ぶ。ここでは例として成分を f_{ij} とする全影響行列 $\mathbf{F}$ についてのものを与えたが、直接影響行列、間接影響行列についての被影響度と影響度も同様に定義できる。

次に具体的な実行画面について説明する。Dematel 法の分析画面を図 1 に、要素 1～要素 5 に関するクロスサポート行列の入力画面を図 2 に示す。ここでは全影響に関する各行列の値を表示するように選択している。

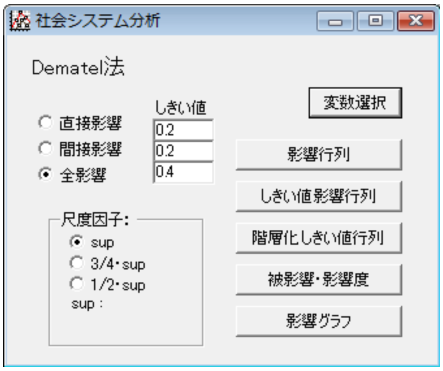
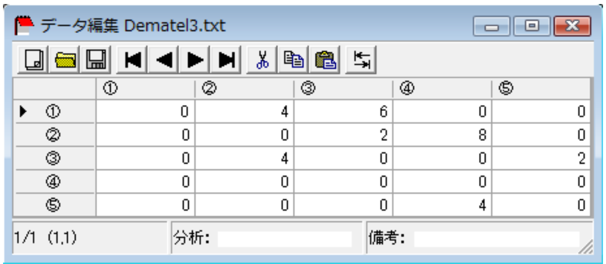


図 1 分析実行画面

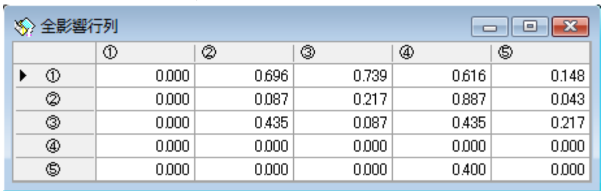

データ編集 Dematel3.txt

	①	②	③	④	⑤
①	0	4	6	0	0
②	0	0	2	8	0
③	0	4	0	0	2
④	0	0	0	0	0
⑤	0	0	0	4	0

1/1 (1,1)　分析:　備考:

図 2 クロスサポート行列

クロスサポート行列から求めた影響行列を図 3 に示す。


全影響行列

	①	②	③	④	⑤
①	0.000	0.696	0.739	0.616	0.148
②	0.000	0.087	0.217	0.887	0.043
③	0.000	0.435	0.087	0.435	0.217
④	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
⑤	0.000	0.000	0.000	0.400	0.000

図 3 影響行列

分析メニューで指定したしきい値に対するしきい値影響行列の表示画面を図 4 に示す。

全しきい値影響行列　しきい値（0.400）

	①	②	③	④	⑤
①	0.000	0.696	0.739	0.616	0.000
②	0.000	0.000	0.000	0.887	0.000
③	0.000	0.435	0.000	0.435	0.000
④	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
⑤	0.000	0.000	0.000	0.400	0.000

図 4　しきい値影響行列

しきい値影響行列の要素を階層順に並べた階層化しきい値影響行列（分析画面上では「階層化しきい値行列」と略記）の表示画面を図 5 に示す。理論のところでも述べたが、この要素の順番を求める際には ISM の手法を用いている。

階層化全影響行列　しきい値（0.400）

	①	⑤	③	②	④
①	0.000	0.000	0.739	0.696	0.616
⑤	0.000	0.000	0.000	0.000	0.400
③	0.000	0.000	0.000	0.435	0.435
②	0.000	0.000	0.000	0.000	0.887
④	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

図 5　階層化しきい値行列

各要素の影響される程度と影響の強さを表す被影響度と影響度の表示画面を図 6 に示す。それらの値を用いた散布図は図 7 に示す。この図では縦軸が被影響度、横軸が影響度である。

被全影響度・全...

	被影響度	影響度
①	0.000	0.439
②	0.243	0.247
③	0.208	0.234
④	0.467	0.000
⑤	0.082	0.080

図 6　被影響度・影響度

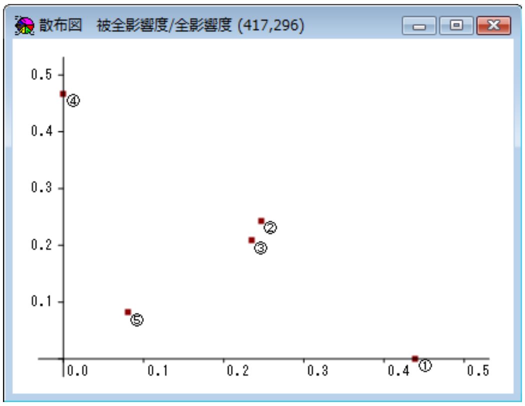


図 7 被影響度・影響度グラフ

８．KSIM

KSIM は経済システムや社会システムのように、はっきりと定義されないシステムの時間的な変化をシミュレートする手法である。取扱う変数は、数値的なものの場合もあれば、数値的に表されない好みや傾向といったものもあるが、基本的にはすべて主観的な量に変換して分析を行う。即ち全ての変数、例えば工業化の度合い等も、0 より大きく 1 より小さい数値で表す。

システムの i 番目の変数について時刻 t から $t+dt$ までの変化を以下で定義する。

$$x_i(t+dt) = x_i(t)^{p_i(t)}. \tag{1}$$

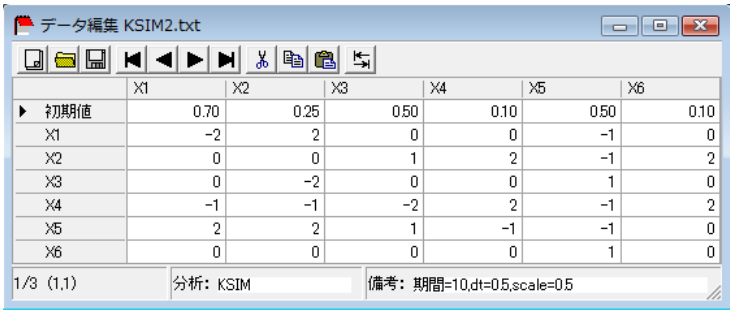
ここに $p_i(t)$ は影響力を与える因子で、以下で定義される。

$$p_i(t) = \frac{1+\dfrac{cdt}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\left|a_{ji}\right|-a_{ji}\right)x_j(t)}{1+\dfrac{cdt}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\left|a_{ji}\right|+a_{ji}\right)x_j(t)}. \tag{2}$$

行列 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ はインパクト行列と呼ばれ、変数 x_i から x_j への影響を表す。ここでは行方向が影響を与える側、列方向が影響を受ける側とし、慣例的に相互作用の強さは –3 から 3 程度の大きさの整数値で表される。dt は時間の刻み値、c は省かれることが多いが、インパクト行列の数値をある範囲に限定した場合の相互作用の絶対的な大きさを表すパラメータである。このパラメータを導入しておくと実際の時間単位のシミュレーションが可能となる。また、データとしては、時刻 0 での変数の初期値も必要である。初期値として全ての変数に対して 0 より大きく 1 より小さい範囲の値を設定すると、全ての時刻において、$0 < x_i(t) < 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ となる。

以上のことをもとに、分析画面と分析用の実際のデータをそれぞれ図 1 と図 2 に示す。

図 1　KSIM の分析画面



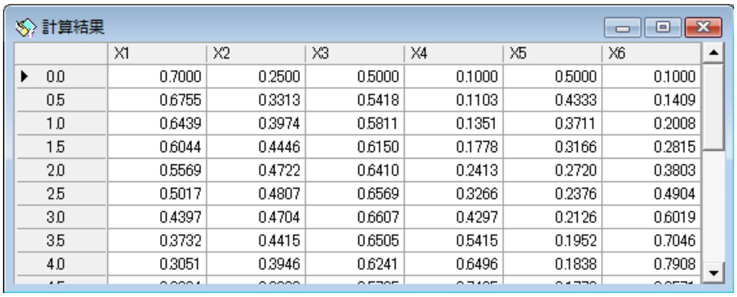
データ編集 KSIM2.txt

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
初期値	0.70	0.25	0.50	0.10	0.50	0.10
X1	-2	2	0	0	-1	0
X2	0	0	1	2	-1	2
X3	0	-2	0	0	1	0
X4	-1	-1	-2	2	-1	2
X5	2	2	1	-1	-1	0
X6	0	0	0	0	1	0

1/3 (1,1)　分析：KSIM　備考：期間=10,dt=0.5,scale=0.5

図 2　KSIM のデータ

ここに、「期間」は分析実行の期間、「dt」は分析の刻み値、「scale」は(2)式のパラメータ c を表す。「出力変数」は、上の例だと 1 番目と 3 番目から 6 番目を指定していることになる。「変数選択」をして、「実行」ボタンをクリックすると計算結果がグリッド表示とグラフ表示で出力される。グリッド表示では刻み値で与えられた値毎のデータが、グラフ表示では適当に計算結果の間を抜いた形で表示される。グラフの表示間隔を自分で指定したい場合は、「データ間隔」に適当な値を入力して実行する。実行結果は図 3 と図 4 のようになる。



計算結果

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
0.0	0.7000	0.2500	0.5000	0.1000	0.5000	0.1000
0.5	0.6755	0.3313	0.5418	0.1103	0.4333	0.1409
1.0	0.6439	0.3974	0.5811	0.1351	0.3711	0.2008
1.5	0.6044	0.4446	0.6150	0.1778	0.3166	0.2815
2.0	0.5569	0.4722	0.6410	0.2413	0.2720	0.3803
2.5	0.5017	0.4807	0.6569	0.3266	0.2376	0.4904
3.0	0.4397	0.4704	0.6607	0.4297	0.2126	0.6019
3.5	0.3732	0.4415	0.6505	0.5415	0.1952	0.7046
4.0	0.3051	0.3946	0.6241	0.6496	0.1838	0.7908

図 3　KSIM の実行画面（グリッド）

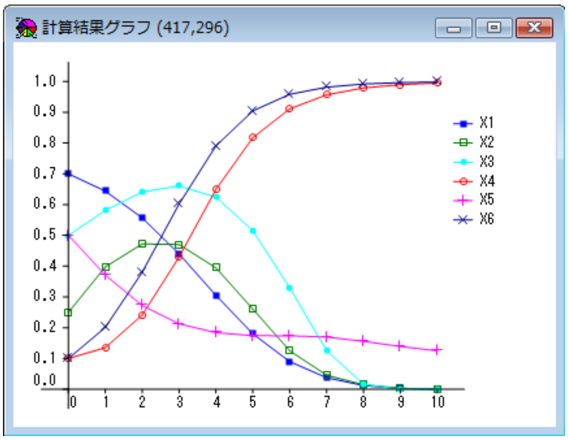


図 4　KSIM の実行画面（グラフ）

９．産業連関分析

この論文では、表示の簡単化のために以下の表式を用いる。

- 任意の列または行ベクトル $\mathbf{C}$ の各要素を対角成分として作られる対角行列を $diag(\mathbf{C})$ 、その逆行列を $diag^{-1}(\mathbf{C})$ と表すことにする。
- 行列 $\mathbf{A}(m \times n_a)$ と $\mathbf{B}(m \times n_b)$ を列方向に並べて作られる m 行 $n_a + n_b$ 列の行列を $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ と表すことにする。
- 行列 $\mathbf{A}$ の行和をとって得られる列ベクトルを $\Sigma\mathbf{A}$ 、列和をとって得られる行ベクトルを $\Sigma'\mathbf{A}$ とする。
- 行列の成分は括弧付きで添え字を付けて表すか、イタリック文字に添え字を付けて表すかどちらかにする。即ち、行列 $\mathbf{X}$ の (i,j) 成分は $(\mathbf{X})_{ij} = X_{ij} = x_{ij}$ である。

産業連関分析は、国民経済の構造を生産技術的な連結関係で表す重要な手法である。産業構造は、投入と産出、輸出を含む最終需要、輸入、粗付加価値等を用いて、以下の産業連関表で記述される。

表 1 競争輸入型産業連関表

	中間需要	最終需要	輸出	輸入	合計
中間投入	$\mathbf{X}(n \times n)$	$\mathbf{F}(n \times d)$	$\mathbf{E}(n \times e)$	$-\mathbf{M}(n \times p)$	$\mathbf{T}(n \times 1)$
粗付加価値	$\mathbf{V}(r \times n)$				
合計	${}^t\mathbf{T}(1 \times n)$				

表 2 非競争輸入型産業連関表

	中間需要	最終需要	輸出	輸入	合計
中間投入 国内	$\mathbf{X}^d(n \times n)$	$\mathbf{F}^d(n \times d)$	$\mathbf{E}(n \times e)$	$\mathbf{0}\,(n \times p)$	$\mathbf{T}(n \times 1)$
中間投入 輸入	$\mathbf{X}^i(n \times n)$	$\mathbf{F}^i(n \times d)$	$\mathbf{0}(n \times e)$	$-\mathbf{M}(n \times p)$	$\mathbf{0}\,(n \times 1)$
粗付加価値	$\mathbf{V}(r \times n)$				
合計	${}^t\mathbf{T}(1 \times n)$				

ここに、それぞれの項目枠内は行列形式で表されており、行列の行数と列数は、$\mathbf{X}(n \times n)$ の形で右側の括弧の中に記述されている。即ち産業は n 部門、最終需要が d 部門、輸出が e 部門、輸入が p 部門、粗付加価値が r 部門あることになる。列ベクトル $\mathbf{T}$ は産業毎の国内での総産出量を表す。また、${}^t\mathbf{T}$ は $\mathbf{T}$ の転置行列である。輸入は通常１部門として列ベクトルで表すことが多いと思われるが、ここでは複数部門として部門合計を求められるようにしている。

表１と表２では産業連関表の重要な２つの形式を表示したが、この他に一部の主要な輸入品についてのみ非競争輸入扱いにした競争・非競争混合輸入型もある。混合輸入型については、一般的取扱いが困難であるので、指標の計算はすべて競争輸入型に直して行なうことにした。競争輸入型の場合、これらの表式間には以下のような関係がある。

$$\Sigma\mathbf{X} + \Sigma\mathbf{F} + \Sigma\mathbf{E} - \Sigma\mathbf{M} = \Sigma'\mathbf{X} + \Sigma'\mathbf{V} = \mathbf{T}.$$

図１に産業連関分析の分析メニューを示す。

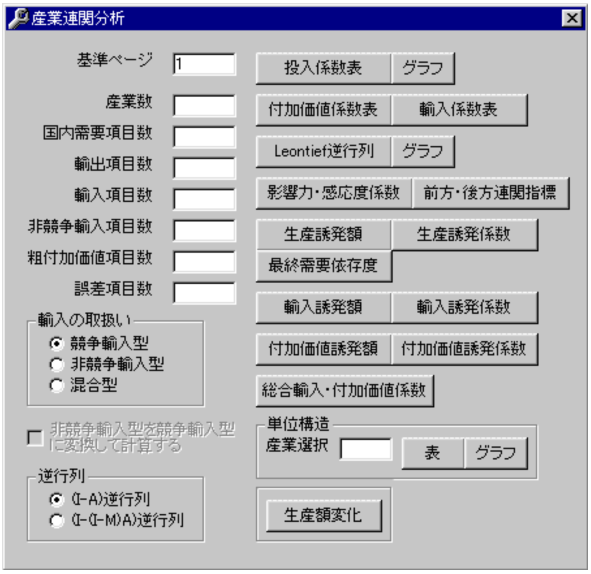
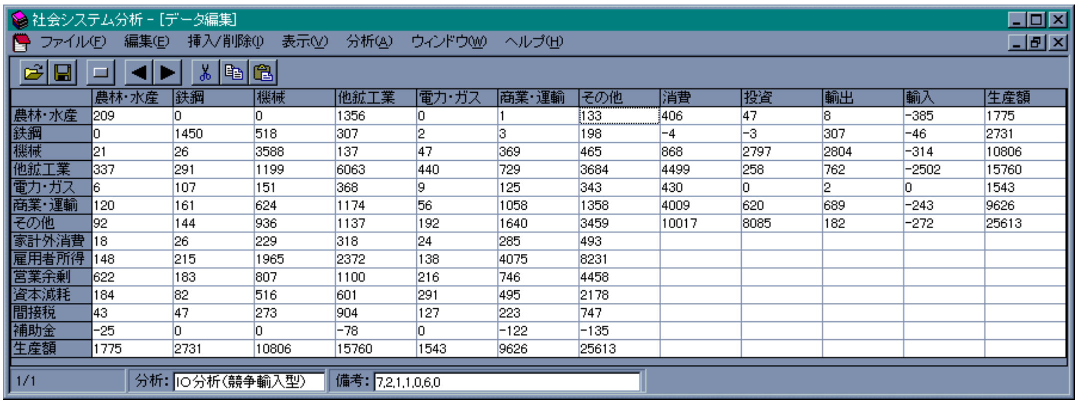


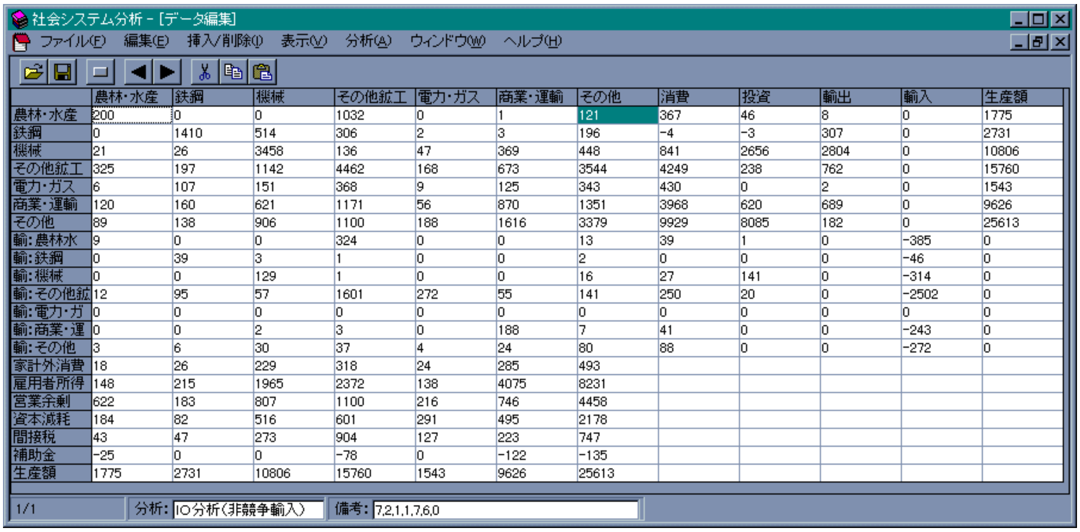
図１ 産業連関分析分析メニュー

図２と図３に競争輸入型と非競争輸入型の具体的なデータ画面を示す。



	農林・水産	鉄鋼	機械	他鉱工業	電力・ガス	商業・運輸	その他	消費	投資	輸出	輸入	生産額
農林・水産	209	0	0	1356	0	1	133	406	47	8	-385	1775
鉄鋼	0	1450	518	307	2	3	198	-4	-3	307	-46	2731
機械	21	26	3588	137	47	369	465	868	2797	2804	-314	10806
他鉱工業	337	291	1199	6063	440	729	3684	4499	258	762	-2502	15760
電力・ガス	6	107	151	368	9	125	343	430	0	2	0	1543
商業・運輸	120	161	624	1174	56	1058	1358	4009	620	689	-243	9626
その他	92	144	936	1137	192	1640	3459	10017	8085	182	-272	25613
家計外消費	18	26	229	318	24	285	493					
雇用者所得	148	215	1965	2372	138	4075	8231					
営業余剰	622	183	807	1100	216	746	4458					
資本減耗	184	82	516	601	291	495	2178					
間接税	43	47	273	904	127	223	747					
補助金	-25	0	0	-78	0	-122	-135					
生産額	1775	2731	10806	15760	1543	9626	25613					

図２ 競争輸入型産業連関表のデータ



	農林・水産	鉄鋼	機械	その他鉱工	電力・ガス	商業・運輸	その他	消費	投資	輸出	輸入	生産額
農林・水産	200	0	0	1032	0	1	121	367	46	8	0	1775
鉄鋼	0	1410	514	306	2	3	196	-4	-3	307	0	2731
機械	21	26	3458	136	47	369	448	841	2656	2804	0	10806
その他鉱工	325	197	1142	4462	168	673	3544	4249	238	762	0	15760
電力・ガス	6	107	151	368	9	125	343	430	0	2	0	1543
商業・運輸	120	160	621	1171	56	870	1351	3968	620	689	0	9626
その他	89	138	906	1100	188	1616	3379	9929	8085	182	0	25613
輸:農林水	9	0	0	324	0	0	13	39	1	0	-385	0
輸:鉄鋼	0	39	3	1	0	0	2	0	0	0	-46	0
輸:機械	0	0	129	1	0	0	16	27	141	0	-314	0
輸:その他鉱	12	95	57	1601	272	55	141	250	20	0	-2502	0
輸:電力・ガ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
輸:商業・運	0	0	2	3	0	188	7	41	0	0	-243	0
輸:その他	3	6	30	37	4	24	80	88	0	0	-272	0
家計外消費	18	26	229	318	24	285	493					
雇用者所得	148	215	1965	2372	138	4075	8231					
営業余剰	622	183	807	1100	216	746	4458					
資本減耗	184	82	516	601	291	495	2178					
間接税	43	47	273	904	127	223	747					
補助金	-25	0	0	-78	0	-122	-135					
生産額	1775	2731	10806	15760	1543	9626	25613					

図 3 非競争輸入型産業連関表のデータ

これらは参考文献の巻末に記載されている例をこのプログラムに合うように入力したものである。

分析を実行するために必要な入力項目は、「産業数」、「国内需要項目数」、「輸出項目数」、「輸入項目数」、「非競争輸入項目数」、「粗付加価値項目数」である。図 2 のデータの「産業数」は 7、「消費・投資項目数」は 2、「輸出項目数」は 1、「輸入項目数」は 1、「粗付加価値項目数」は 6 である。

「非競争輸入項目数」は非競争輸入型及び混合輸入型の産業連関表の場合用いるもので、粗付加価値方向に輸入項目がある場合の項目数である。競争輸入型の場合これは 0 になる。また、「誤差項目数」は輸入項目の右隣りに配置される項目であるが、産業連関表はあくまで行と列の合計が一致することが原則であるので通常この項目は 0 である。特別な事情のある場合のみ利用することもありえると考えて設けている。取扱いについては今後の経験の中から決めて行きたい。

項目「基準ページ」は複数年次（複数ページ）の産業連関表を入力している場合、どのページを利用するかということを指定する項目である。データが、競争輸入型であるか、非競争輸入型であるか、混合輸入型であるかは、「輸入の取扱い」のオプションボタンで選択する。レオンチェフ逆行列の形式は考えるバランスモデルによって変わってくる。ここではよく利用される 2 つの形式を「逆行列」のオプションボタンで選択する。非競争輸入型や混合輸入型のデータを競争輸入型に変えて計算するためのチェックボックスも用意されている。特に混合輸入型の場合、このプログラムでは競争輸入型で計算する以外の方式は作成していない。その他の入力データやコマンドボタンについては、分析の解説と共に説明する。

産業の生産技術構造は競争輸入型、非競争輸入型それぞれ、以下の投入係数行列を用いて表され

るが、今後表式の最初に a), b) を付けて、それぞれ競争輸入型、非競争輸入型とする。

a) $\mathbf{A}=(a_{ij})=(X_{ij}/T_j)=\mathbf{X}diag^{-1}(\mathbf{T})$ （競争輸入型）

b) $\mathbf{A}^d=(a_{ij}^d)=(X^d{}_{ij}/T_j)=\mathbf{X}^d diag^{-1}(\mathbf{T})$ （非競争輸入型）.　(1)

図１の分析メニューでは「投入係数表」のコマンドボタンをクリックすることにより求められる。結果は表形式で与えられるが、求まった表のセル幅、桁数合わせや文字の配置は結果の表示画面の中で設定する。また、グラフも右隣の「グラフ」のコマンドボタンで、３次元立体棒グラフとして表示される。グラフの簡単な設定は、結果グラフ表示フォームの中で行うことが出来る。表示関係のこれらの機能についても、必要なものを追加して行かなければならない。

図１の「付加価値係数」 $\tilde{\mathbf{V}}$ は、競争輸入型も非競争輸入型も以下で表す。

$$\tilde{\mathbf{V}}=\mathbf{V}diag^{-1}(\mathbf{T}). \tag{2}$$

付加価値の全ての項目の和をとった付加価値係数ベクトル $\tilde{\mathbf{V}}_0$ も以下のように計算出来る。

$$\tilde{\mathbf{V}}_0=(\Sigma'\mathbf{V})diag^{-1}(\mathbf{T}). \tag{3}$$

「輸入係数」 $\tilde{\mathbf{M}}$ は「輸入／国内投入」の意味を持っており、輸入の扱いに応じて以下のようになる。

a) $\tilde{\mathbf{M}}=diag^{-1}(\mathbf{AT}+\Sigma\mathbf{F})\Sigma\mathbf{M}$

b) $\tilde{\mathbf{M}}=diag^{-1}(\mathbf{A}^d\mathbf{T}+\Sigma\mathbf{F}^d+\Sigma\mathbf{M})\Sigma\mathbf{M}$.　(4)

次に、Leontief 逆行列により生産の波及構造を調べるが、輸入の取り扱いによりバランス式が異なり、それによって逆行列の表式が異なってくる。特に競争輸入型の場合に注意すると、バランス式は以下のようになる。

a) $\mathbf{T}=\mathbf{AT}+\Sigma\mathbf{F}+\Sigma\mathbf{E}-\Sigma\mathbf{M}$
$\quad=\mathbf{AT}+\Sigma\mathbf{F}+\Sigma\mathbf{E}-\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{AT}+\Sigma\mathbf{F})$
$\quad=(\mathbf{I}-\overline{\mathbf{M}})\mathbf{AT}+(\mathbf{I}-\overline{\mathbf{M}})\Sigma\mathbf{F}+\Sigma\mathbf{E}$

b) $\mathbf{T}=\mathbf{A}^d\mathbf{T}+\Sigma\mathbf{F}^d+\Sigma\mathbf{E}$.　(5)

ここに $\overline{\mathbf{M}}$ は輸入係数ベクトルの成分を対角成分として得られた正方行列で、$\overline{\mathbf{M}}=diag(\tilde{\mathbf{M}})$ である。

これより、国内総生産を求めると、以下のようになる。

a) $\mathbf{T}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}(\Sigma\mathbf{F}+\Sigma\mathbf{E}-\Sigma\mathbf{M})$
$\quad=[\mathbf{I}-(\mathbf{I}-\overline{\mathbf{M}})\mathbf{A}]^{-1}[(\mathbf{I}-\overline{\mathbf{M}})\Sigma\mathbf{F}+\Sigma\mathbf{E}]$

b) $\mathbf{T}=(\mathbf{I}-\mathbf{A}^d)^{-1}(\Sigma\mathbf{F}^d+\Sigma\mathbf{E})$.　(6)

これより Leontief 逆行列は、競争輸入型の場合は２通り、非競争輸入型の場合は１通り考えることにする。

a) $\mathbf{B}=(b_{ij})=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ または、$\mathbf{B}=(b_{ij})=[\mathbf{I}-(\mathbf{I}-\overline{\mathbf{M}})\mathbf{A}]^{-1}$

b) $\mathbf{B}=(b_{ij})=(\mathbf{I}-\mathbf{A}^d)^{-1}$.　(7)

図 1 のメニューでは「Leontief 逆行列」のボタンをクリックする際に、「輸入の取扱い」と「逆行列」のオプションボタンの選択によって、これらを選択出来るようになっている。

メニュー中の「影響力・感応度係数」ボタンのクリックによって、産業別の影響力係数 $n\Sigma^t\mathbf{B}/\Sigma'\Sigma\mathbf{B}$ と感応度係数 $n\Sigma\mathbf{B}/\Sigma'\Sigma\mathbf{B}$ を表示する。ここに $\mathbf{B}$ は (2.7) のそれぞれの表式を用いる。また、同様の指標として、前方連関指標 $\Sigma\mathbf{B}$ と後方連関指標 $\Sigma^t\mathbf{B}$ も「前方・後方連関指標」ボタンのクリックによって求めることが出来る。

さて、最終需要項目別の生産誘発額 $\mathbf{T}'$ は、「生産誘発額」ボタンをクリックすることにより求めることが出来る。式 (6), (7) より、容易にその計算式の意味が理解出来るであろう。

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ \mathbf{T}'(n\times(d+e)) = [\mathbf{I}-(\mathbf{I}-\overline{\mathbf{M}})\mathbf{A}]^{-1}[(\mathbf{I}-\overline{\mathbf{M}})\mathbf{F}\oplus\mathbf{E}] \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = \mathbf{B}[(\mathbf{I}-\overline{\mathbf{M}})\mathbf{F}\oplus\mathbf{E}] \\
&\text{b)}\ \mathbf{T}'(n\times(d+e)) = (\mathbf{I}-\mathbf{A}^d)^{-1}(\mathbf{F}^d\oplus\mathbf{E}) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = \mathbf{B}(\mathbf{F}^d\oplus\mathbf{E})\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

最終需要の各項目別産業合計に対する生産誘発額の割合を表す生産誘発係数 $\tilde{\mathbf{T}}'$ は、(8)より以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ \tilde{\mathbf{T}}' = \mathbf{B}\Gamma\mathbf{F}\,diag^{-1}(\Sigma'\mathbf{F})\oplus\mathbf{BE}\,diag^{-1}(\Sigma'\mathbf{E}) \\
&\text{b)}\ \tilde{\mathbf{T}}' = \mathbf{BF}^d\,diag^{-1}(\Sigma'\mathbf{F}^d)\oplus\mathbf{BE}\,diag^{-1}(\Sigma'\mathbf{E})\,.
\end{aligned} \tag{9}$$

ここに、$\Gamma = \mathbf{I}-\overline{\mathbf{M}}$ である。全需要による生産誘発係数ベクトル $\tilde{\mathbf{T}}'_0$ は、以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ \tilde{\mathbf{T}}'_0 = \mathbf{B}(\Gamma\Sigma\mathbf{F}+\Sigma\mathbf{E})/\Sigma'(\Sigma\mathbf{F}+\Sigma\mathbf{E}) \\
&\text{b)}\ \tilde{\mathbf{T}}'_0 = \mathbf{B}(\Sigma\mathbf{F}^d+\Sigma\mathbf{E})/\Sigma'(\Sigma\mathbf{F}^d+\Sigma\mathbf{E})\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

これらの結果は「生産誘発係数」ボタンにより、表示することが出来る。

また、特に競争輸入型の場合、輸入 $\Sigma\mathbf{M}$ は(2.7)から求まる $\mathbf{B}-\mathbf{I}=\Gamma\mathbf{AB}$ の表式及び Γ の定義から、(11)のように書き換えることが出来る。

$$\begin{aligned}
\Sigma\mathbf{M} &= -(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{T}+\Sigma\mathbf{F}+\Sigma\mathbf{E} \\
&= -(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}(\Gamma\Sigma\mathbf{F}+\Sigma\mathbf{E})+\Sigma\mathbf{F}+\Sigma\mathbf{E} \\
&= \overline{\mathbf{M}}\Gamma^{-1}\mathbf{B}\Gamma\Sigma\mathbf{F}+\overline{\mathbf{M}}\mathbf{AB}\Sigma\mathbf{E}\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

これより各最終需要項目による輸入誘発額 $\mathbf{M}'$ として以下を得る。

$$\mathbf{M}' = \overline{\mathbf{M}}\Gamma^{-1}\mathbf{B}\Gamma\mathbf{F}\oplus\overline{\mathbf{M}}\mathbf{ABE}\,. \tag{12}$$

これは「輸入誘発額」ボタンにより求めることが出来る。

輸入誘発額の最終需要に対する割合として定義される輸入誘発係数 $\tilde{\mathbf{M}}'$ は、以下のように与えられる。

$$\tilde{\mathbf{M}}' = \overline{\mathbf{M}}\Gamma^{-1}\mathbf{B}\Gamma\mathbf{F}\,diag^{-1}(\Sigma'\mathbf{F})\oplus\overline{\mathbf{M}}\mathbf{ABE}\,diag^{-1}(\Sigma'\mathbf{E})\,. \tag{13}$$

同様にして全需要項目による輸入誘発係数 $\tilde{\mathbf{M}}'_0$ は以下で与えられる。

$$\widetilde{\mathbf{M}}'_0 = \overline{\mathbf{M}}(\Gamma\mathbf{B}\Gamma^{-1}\Sigma\mathbf{F} + \mathbf{AB}\Sigma\mathbf{E})\big/\Sigma'(\Sigma\mathbf{F} + \Sigma\mathbf{E})\,. \tag{14}$$

これらは「輸入誘発係数」ボタンにより求めることが出来る。

付加価値係数の(3)式より、付加価値は以下のように与えられ、

$$\Sigma^t\mathbf{V} = {}^t\widetilde{\mathbf{V}}_0 diag(\mathbf{T}) = diag(\widetilde{\mathbf{V}}_0)\mathbf{T}\,, \tag{15}$$

産出額の式より、これは競争輸入型と非競争輸入型に分けて、以下のように書き換えられる。

a) $\Sigma^t\mathbf{V} = diag(\widetilde{\mathbf{V}}_0)\mathbf{B}(\Gamma\Sigma\mathbf{F} + \Sigma\mathbf{E})$

b) $\Sigma^t\mathbf{V} = diag(\widetilde{\mathbf{V}}_0)\mathbf{B}(\Sigma\mathbf{F}^d + \Sigma\mathbf{E})$. (16)

これより､それぞれの最終需要項目が付加価値を誘発する額を表す､付加価値誘発額ベクトル $\mathbf{V}'$ は以下の式で与えられる。

a) $\mathbf{V}' = diag(\widetilde{\mathbf{V}}_0)\mathbf{B}(\Gamma\mathbf{F} \oplus \mathbf{E})$

b) $\mathbf{V}' = diag(\widetilde{\mathbf{V}}_0)\mathbf{B}(\mathbf{F}^d \oplus \mathbf{E})$ (17)

これは「付加価値誘発額」ボタンにより求められる。

付加価値誘発額の最終需要に対する割合として定義される付加価値誘発係数 $\widetilde{\mathbf{V}}'$ は、以下のように定義される。

a) $\widetilde{\mathbf{V}}' = diag(\widetilde{\mathbf{V}}_0)\mathbf{B}[\Gamma\mathbf{F}diag^{-1}(\Sigma'\mathbf{F}) \oplus \mathbf{E}diag^{-1}(\Sigma'\mathbf{E})]$

b) $\widetilde{\mathbf{V}}' = diag(\widetilde{\mathbf{V}}_0)\mathbf{B}[\mathbf{F}^d diag^{-1}(\Sigma'\mathbf{F}^d) \oplus \mathbf{E}diag^{-1}(\Sigma'\mathbf{E})]$. (18)

また、全付加価値項目による付加価値誘発係数は、以下で与えられる。

a) $\widetilde{\mathbf{V}}' = diag(\widetilde{\mathbf{V}}_0)\mathbf{B}(\Gamma\Sigma\mathbf{F} + \Sigma\mathbf{E})\big/\Sigma'(\Sigma\mathbf{F} + \Sigma\mathbf{E})$

b) $\widetilde{\mathbf{V}}' = diag(\widetilde{\mathbf{V}}_0)\mathbf{B}(\Sigma\mathbf{F}^d + \Sigma\mathbf{E})\big/\Sigma'(\Sigma\mathbf{F}^d + \Sigma\mathbf{E})$. (19)

これは「付加価値係数」ボタンにより求められる。

競争輸入型の場合全輸入額と全付加価値額は、以下の形で与えられるが、

$$\Sigma'\Sigma\mathbf{M} = \Sigma'\overline{\mathbf{M}}\Gamma^{-1}\mathbf{B}\Gamma\Sigma\mathbf{F} + \Sigma'\overline{\mathbf{M}}\mathbf{AB}\Sigma\mathbf{E} \tag{20}$$

$$\Sigma'\Sigma^t\mathbf{V} = \Sigma' diag(\widetilde{\mathbf{V}}_0)\mathbf{B}\Gamma\Sigma\mathbf{F} + \Sigma' diag(\widetilde{\mathbf{V}}_0)\mathbf{B}\Sigma\mathbf{E}\,, \tag{21}$$

総合輸入係数・総合付加価値係数はこれらの輸入額・付加価値額の合計の、$\Sigma\mathbf{F}$ 及び、$\Sigma\mathbf{E}$ に係る係数ベクトルをそれぞれ、消費・投資に係る係数、輸出に係る係数と呼んだものである。また、最終需要合計に係る係数は、最終需要合計に占める各産業別の消費・投資と輸出の割合を掛けて、それぞれの係数を足して、$\Sigma'\overline{\mathbf{M}}\Gamma^{-1}\mathbf{B}\Gamma\mathbf{W}_f + \Sigma'\overline{\mathbf{M}}\mathbf{ABW}_e$ のように定義する。ここに、$\mathbf{W}_f = diag(\Sigma\mathbf{F})/\Sigma'(\Sigma\mathbf{F} + \Sigma\mathbf{E})$, $\mathbf{W}_e = diag(\Sigma\mathbf{E})/\Sigma'(\Sigma\mathbf{F} + \Sigma\mathbf{E})$ である。これらは、行ベクトルであるので、表示に際しては転置を取ったものを用いる。

産業 i の需要を 1 単位だけ満たすための各産業の投入産出関係は、unit structure と呼ばれる。ここで、$\mathbf{e}_i = {}^t(0,0,\cdots,1,\cdots,0)$ は第 i 成分のみ 1 でその他は 0 の縦ベクトルとすると、競争輸入型の(2.6)の関係式 $\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\Sigma\mathbf{F} + \Sigma\mathbf{E} - \Sigma\mathbf{M})$ で、$(\Sigma\mathbf{F} + \Sigma\mathbf{E} - \Sigma\mathbf{M})$ の代わりに $\mathbf{e}_i$ を用いて、これ

を(1)から求まる関係式 $\mathbf{X}=\mathbf{A}diag(\mathbf{T})$ の中に代入して、unit structure $\mathbf{U}_i$ が以下のように求められる。

$$\mathbf{U}_i=\mathbf{A}diag((\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{e}_i)\,. \tag{22}$$

これは、図 1 の「単位構造」フレームで「産業選択」のテキストボックスに産業番号を書き込み、「表」か「グラフ」のボタンをクリックすることによって求められる。

投入係数の変化の問題を扱うには、RAS 法がよく用いられる。RAS 法では、$\mathbf{A}$ から $\mathbf{A}'$ への投入係数の変化を $\mathbf{A}'=\hat{\mathbf{R}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{S}}$ のように、代替変化乗数ベクトル $\mathbf{R}$ と加工度変化乗数ベクトル $\mathbf{S}$ を用いて記述する。ここに、$\hat{\mathbf{R}}=diag(\mathbf{R})$，$\hat{\mathbf{S}}=diag(\mathbf{S})$ である。RAS 法を用いた分析には、基準時点と比較時点の 2 時点の産業連関表と 2 時点間の年数が必要であり、これらのデータをテキストボックスに入力した後、「代替・加工度変化」ボタンをクリックする。結果は 1 年間当たりのそれぞれのベクトルの値が表示される。直接 2 時点間の差が見たい場合には、2 時点間の年数を 1 にすればよい。また、比較時点の投入係数行列に、1 年間の代替変化乗数ベクトルと加工度変化乗数ベクトルより作られる対角行列を複数回掛けて、将来の予測をすることも出来る。これは、予測年次のテキストボックスに何年後かの値を入れて、「予測投入係数表」のボタンをクリックすることによって求めることが出来る。（RAS 法については、新しいバージョンで削除している）

新しいバージョンでは 3 次元棒グラフを 3 D ビューアを用いたものに変えている。図 4 は Leontief 逆行列の棒グラフ表示である。

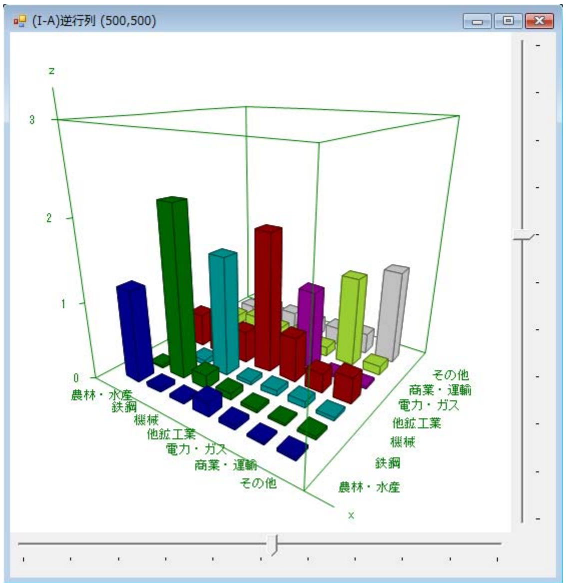


図 4 レオンチェフ逆行列