College Analysis 総合マニュアル

－ ＯＲ１ －

目次

１．線形計画法

1.1　標準的な線形計画問題

事業や意思決定の数学モデルで、ある条件のもと最大の利得をもたらす変数値を探る問題を数理計画問題という。特に利得を表す式と条件を表す式が変数の 1 次式で表される場合を線形計画問題という。また、その問題を解く手法のことを線形計画法と呼ぶ。

例として、ある工場で２つの製品 1,2 を作っている場合を考える。その製品には 3 つの原料Ａ，Ｂ，Ｃを利用するとして、原料の供給量には上限がある。また、それぞれの製品を作る原料にも必要量があり、それらを表 1 のように示す。

表１　製品と原料

製品 / 原料	１（x1）	２（x2）	原料の供給量 (kg)
A	1	3	６０
B	3	4	１００
C	2	1	５０
製品１単位当りの利益（万円）	5	6	最大化

製品 1 を作るには原料Ａを 1kg、原料Ｂを 3kg、原料Ｃを 2kg 使う必要がある。製品 2 を作るには原料Ａを 3kg、原料Ｂを 4kg、原料Ｃを 1kg 使う必要がある。原料の供給量の上限はＡが 60kg、Ｂが 100kg、Ｃが 50kg である。製品を作ると製品 1 単位作るごとに、製品 1 では 5 万円、製品 2 では 6 万円の利益が出るものとする。最大の利益をあげるためには製品 1 と 2 をいくらずつ作ればよいか。

利益を表す数式を目的関数、条件を表す数式を制約条件とし、x_1 と x_2 をそれぞれ製品 1 と 2 の製造量としてこの問題を数式で表すと以下のようになる。

目的関数（objective function）

$$z = 5x_1 + 6x_2 \qquad \text{最大化}$$

制約条件（constraints）

$$x_1 + 3x_2 \le 60$$

$$3x_1 + 4x_2 \le 100$$

$$2x_1 + x_2 \le 50$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

College Analysis を用いてこの問題を解いてみることにする。ここでは問題を解くためのプログラムの使い方を簡単に説明し、詳細は 5 節で詳述する。メニュー［分析－ＯＲ－線形計画法」を選択すると、図 1 に示される分析実行画面が表示される。

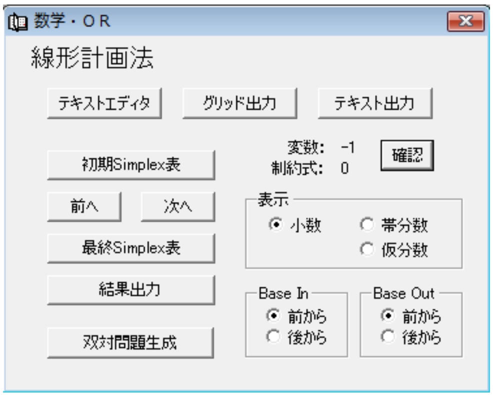


図１　線形計画法の実行画面

プログラムの実行には、グリッドに書かれた表 1 によく似た形式の（行の順番が少し異なる）データが必要であるが、「テキストエディタ」に式を書き込み、それをグリッドの形式に変換する方法もある。ここでは後者の方法を採用し、「テキストエディタ」ボタンをクリックして、以下のように式を書きこむ。上の数式から意味は理解できると思う。

z=5*x1+6*x2　max
x1+3*x2<=60
3*x1+4*x2<=100
2*x1+x2<=50
x1, x2>=0

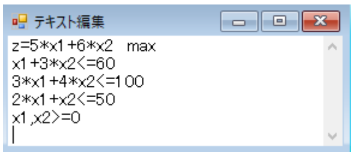


図２　テキスト入力

これを「グリッド出力」ボタンで変換すると、図 3 のようなデータになる。

図３　グリッドデータ

ここで、「結果出力」ボタンをクリックすると図 4 の計算結果が表示される。

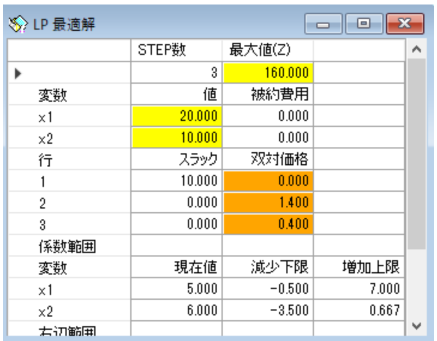


図４　計算結果

この中で最も重要なところは、黄色に網掛けされた部分で、目的関数の最大値と、それを実現する変数の値が表示されている。結果をまとめて表 2 に示す。

表２　最適解

x1	x2	Z
20	10	160

我々が上で扱った問題は、標準的な線形計画問題と呼ばれる。標準的な線形計画問題とは以下の条件を満たす線形計画問題をいう。

１）最大化問題である

２）右辺が非負（0 以上）

３）変数が非負（0 以上）

４）不等号の向きが「≦」

この線形計画問題を解くにはいくつかの方法があるが、最初に発見されて最も有名な方法がシンプレックス法である。特に標準的な問題では、1 段階シンプレックス法と呼ばれる手法が使われる。さらに、標準的な線形計画問題から外れた問題については、2 段階シンプレックス法という方法で解くことができることが知られている。また、この他にさらに効率的な方法も考案されている。

この標準的な問題の解法では、スラック変数と呼ばれる変数 x_3, x_4, x_5 を導入して、不等号を等号に変え、以下の問題を考える。この問題の解で最も簡単なものは右下である。

$$z = 5x_1 + 6x_2 \quad (z - 5x_1 - 6x_2 = 0)$$

$$\begin{aligned} x_1 + [3x_2] + x_3 \quad &= 60 \\ 3x_1 + 4x_2 \quad + x_4 \quad &= 100 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + x_5 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

解は

$$\begin{aligned} &x_1 = 0,\ x_2 = 0, \\ &x_3 = 60,\ x_4 = 100,\ x_5 = 50 \\ &\rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

この中で、全体の式の中に 1 回だけ現れる変数を基底変数と呼ぶ。その他の変数は非基底変数である。我々は非基底変数が 0 となる解を考えている。

さて、x_1, x_2 どちらの変数を正にしたら z を増加させるのに効率が良いか考える。答えは、係数が最大のもの x_2（左辺に移した場合は最小のもの）である可能性が高い。

次に x_2 はどこまで増やせるか考えてみよう。1 式は 60/3=20，2 式は 100/4=25，3 式は 50 であるが、20 より大きくすると $x_3 < 0$ となって条件を満たさない。そのため $x_2 \rightarrow 20$ とするが、同時に $x_3 \rightarrow 0$ ともなる。そこで、x_2 が基底変数、x_3 が非基底変数になるように、式を以下のように変形する。

1 式の x_2 の係数を 1 にする。

$$\frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 20$$

他の制約式から x_2 を消す。

$$\frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_3 + x_4 \quad = 20$$
$$\frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \quad + x_5 = 30$$

目的関数式から x_2 を消す。

$$z - 3x_1 + 2x_3 = 120$$

以上の操作をピボット操作というが、これによって結果は以下となる。

$$z = 3x_1 - 2x_3 + 120 \quad (z - 3x_1 + 2x_3 = 120)$$
$$1/3\,x_1 + x_2 + 1/3\,x_3 \qquad = 20$$
$$5/3\,x_1 \quad - 4/3\,x_3 + x_4 \quad = 20$$
$$5/3\,x_1 \quad - 1/3\,x_3 \quad + x_5 = 30$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

解は
$$x_1 = 0,\ x_3 = 0,$$
$$x_2 = 20,\ x_4 = 20,\ x_5 = 30$$
$$\rightarrow z = 120$$

これを見ると、x_2 を基底変数にしたことで、z の値は 120 に増えている。以後同様な操作を z の値が最大になるまで続ける。

問題１

以下の線形計画問題の最適解を求めよ。

目的関数　$z = x_1 + 2x_2 + x_3$　最大化

制約条件
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 600$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 300$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

最適解

x1	x2	x3	Z

問題２

製品１と２の製造のためには３つの原料Ａ，Ｂ，Ｃが必要である。各製品 1 単位製造するために必要な各原料の量（kg)、各原料の供給量の上限（kg）及び、各製品１単位生産するごとの利益（万円）は以下の表の通りである。原料の供給量の範囲内で、利益が最大となる各製品の生産量（単位）はいくらか。解答は少数で表せ。

	製品１	製品２	原料供給量上限
原料Ａ	1.5	3.2	60
原料Ｂ	3.4	4.3	100
原料Ｃ	2.1	1.4	50
利益（万円）	5.2	6.3	

目的関数

制約条件

最適解

製品１	製品２	利益

問題１解答

最適解

x1	x2	x3	Z
60	180	0	420

問題２解答

目的関数

z=5.2*x1+6.3*x2　max

制約条件（入力形式）

1.5*x1+3.2*x2<=60

3.4*x1+4.3*x2<=100

2.1*x1+1.4*x2<=50

x1,x2>=0

最適解

製品１	製品２	利益
17.564	9.368	150.351

1.2　等号制約の線形計画問題

標準的な線形計画問題には含まれない場合で、特に重要な問題が、制約式の不等号「≦」が等号になった、等号制約の線形計画問題である。以下に例を示す。

例

目的関数

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad \text{最大化}$$

制約条件

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 60$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 40$$

$$x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0$$

この問題では１段階シンプレックス法の手法は使えない。そのため考え出された手法が２段階シンプレックス法と呼ばれる手法で、文字通りシンプレックス法を２回適用して解を求める方法である。スラック変数と同様に、等号のある式には人為変数と呼ばれる変数を追

加し、目的関数をもう１つ追加して計算を実行する。ここではこの方法の詳細の説明は避けるが、これが標準的でない線形計画問題を解く鍵となる。

上の例を College Analysis で解いてみると、解法の途中から 2 段階目に移ることが分かる。1 段階目は変数をうまく整理するのにシンプレックス法が使われ、2 段階目からが標準的な問題で述べたシンプレックス法である。

2 段階シンプレックス法を用いた上の等号制約の線形計画問題の解は表 3 となる。

表 3　最適解

x1	x2	x3	Z
20	0	20	80

問題１（制約条件に等号と不等号の混じる例）

以下の線形計画問題を解け。

目的関数

$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$　　最大化

制約条件

$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 10$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

１）等号条件があるので、２段階法を用いて解くが、初期シンプレックス表を求めよ。

第１段階初期シンプレックス表

基底変数	x1	x2	x3	SL1	AR1	AR2	右辺
-w							
z							
SL1							
AR1							
AR2							

２）-w の行はどの基底変数の行とどの基底変数の行から作られているか。

基底変数［　　　　　　　］と基底変数［　　　　　　　］の行から作られた（符号は逆)。

３)第１段階から第２段階に移った最初のシンプレックス表を求めよ。基底変数も記入せよ。

基底変数	x1	x2	x3	SL1	右辺
z					

４）最適解を求めよ。

最適解

x1	x2	x3	Z

問題１解答

１）第１段階初期シンプレックス表

基底変数	x1	x2	x3	SL1	AR1	AR2	右辺
-w	-3	-3	1	0	0	0	-4
Z	-2	-3	-1	0	0	0	0
SL1	5	2	3	1	0	0	10
AR1	2	1	1	0	1	0	3
AR2	1	2	-2	0	0	1	1

２）-w の行はどの基底変数の行とどの基底変数の行から作られているか。

基底変数［ AR1 ］と基底変数［ AR2 ］の行から作られた（符号は逆）。

３）第１段階から第２段階に移った最初のシンプレックス表を求めよ。基底変数も記入せよ。

基底変数	x1	x2	x3	SL1	右辺
z	0	-2	0	0	3
SL1	0	-0.2	0	1	2.4
x3	0	-0.6	1	0	0.2
x2	1	0.8	0	0	1.4

４）最適解を求めよ。

x1	x2	x3	Z
0	1.75	1.25	6.5

1.3　その他の線形計画問題

我々はこれまで標準的な線形計画問題と等号制約の線形計画問題について見てきたが、ここではさらに一般化するにはどのようにすべきか考える。これは一見複雑そうな問題であるが、うまく工夫することで、すべてこれまで述べてきた２つの線形計画問題の解法によって解くことができるようになる。以下にその方法を簡単な例を用いて説明する。

１）最小化問題の場合

$z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$　最小化　の場合

$z' = -z = -2x_1 + x_2 - 3x_3$　最大化　として解く。

２）右辺が負の場合

$-3x_1 + x_2 - 2x_3 = -5$　の場合、$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$　として解く。

$-3x_1 + x_2 - 2x_3 \le -5$　の場合、$3x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 5$　として４）へ。

３）変数に非負条件がない場合

$x_1 \ge 0$　でない場合

$x_1 = x_1^+ - x_1^-$, $x_1^+ \ge 0, x_1^- \ge 0$　として変数を置き換えて解く。

４）不等号の向きが逆の場合

$3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 5$　の場合、

$3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_c = 5$　として、等号制約問題として解く。

以上のことを考えながら次の例題を解いてみる。結果を表 4 に示す。

例　以下の線形計画問題の最適解を求めよ。

$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$　　最大化

$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 20$

$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

表 4　最適解

x1	x2	x3	Z
3.571	4.643	0	21.071

問題

以下の線形計画問題から初期シンプレックス表と最適解を求めよ。

$z = x_1 - 2x_2$　　最大化

$2x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1 - x_2 = 4$

$x_1 \geq 0$

注）非負条件の付かない変数 x_2 について、グリッドでは変数名を x2! のように、後ろに! 記号が付く。

初期シンプレックス表

Step	基底変数	x1	x2+	x2-	xs4	xa5	xa6	右辺
0	-w							
	z							
	xa5							
	xa6							

最適解

x1	x2	Z

演習 1

以下の線形計画問題を解け。

目的関数

$z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$　　　　　最大化

制約条件

$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 10$

$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

最適解

x1	x2	x3	Z

演習２

以下の線形計画問題の最適解を求めよ。

目的関数　$z = 5x_1 - 2x_2$　最大化

制約条件

$2x_1 + 3x_2 \le 1$

$x_1 - x_2 = 5$

$x_1 \ge 0$

最適解

x1	x2	Z

問題解答

以下の線形計画問題から初期シンプレックス表と最適解を求めよ。

初期シンプレックス表

Step	基底変数	x1	x2+	x2-	xs4	xa5	xa6	右辺
0	-w	-3	0	0	1	0	0	-6
	Z	-1	2	-2	0	0	0	0
	xa5	2	1	-1	-1	1	0	2
	xa6	1	-1	1	0	0	1	4

最適解

x1	x2	Z
2	-2	6

演習１解答

以下の線形計画問題を解け。

x1	x2	x3	Z
1	1	1	10

演習２解答

以下の線形計画問題の最適解を求めよ。

x1	x2	Z
3.2	-1.8	19.6

1.4　双対問題

最大化（最小化）の線形計画問題にはそれと同じ最小化（最大化）の目的関数の値を与える、同じ係数を用いた問題が存在する。この問題を元の線形計画問題（主問題）の双対問題という。以下に主問題と双対問題の例を挙げる。

例　主問題と双対問題

主問題（双対問題）

$z = 5x_1 + 6x_2$　　　　最大化

$x_1 + 3x_2 \le 60$

$3x_1 + 4x_2 \le 100$

$2x_1 + x_2 \le 50$

$x_1, x_2 \ge 0$

双対問題（主問題）

$z' = 60y_1 + 100y_2 + 50y_3$　　　最小化

$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 5$

$3y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 6$

$y_1, y_2, y_3 \ge 0$

２つの問題はそれぞれ互いの双対問題になっている。主問題と双対問題では最大化問題と最小化問題が逆になり、制約条件の不等号の向きも変わる。主問題と双対問題の制約条件の係数は転置され、主問題の変数数は双対問題の制約条件数になる。また主問題の目的関数の係数は、双対問題では制約条件の右辺の値になる。

主問題と双対問題との関係を以下のように行列で表現することもできる。

主問題			双対問題	
$z={}^t\mathbf{c}\mathbf{x}$	最大化	$\Leftrightarrow$	$z'={}^t\mathbf{b}\mathbf{y}$	最小化
$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$，$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$			${}^t\mathbf{A}\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$，$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$	

双対問題に対して一般に以下の定理が成り立つ。

双対定理

主問題あるいは双対問題が最適解を持てば、他方も最適解を持ち、それらの最適目的関数値は一致する。

双対問題を議論する場合には、右辺の正値性を無視し、不等号を最大化問題の場合「≦」に、最小化問題のときには「≧」方向に向かせて考える。以下に具体的な双対問題の例を挙げておく。

１）

$z = 2x_1 + x_2$　最大化　　　　$z' = 4y_1 + 5y_2$　最小化

$$
\begin{array}{lcl}
2x_1 + 3x_2 \leq 4 & & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
x_1 + 4x_2 = 5 & \Leftrightarrow & 3y_1 + 4y_2 \geq 1 \\
x_1,\ x_2 \geq 0 & & y_1 \geq 0
\end{array}
$$

等号 $\Leftrightarrow$ 非負条件なし

等号の部分について、双対問題では非負条件が付かない。

２）

$$
\begin{array}{lcl}
z = 2x_1 + x_2 \quad \text{最大化} & & z' = 4y_1 + 5y_2 \quad \text{最小化} \\
2x_1 + 3x_2 \leq 4 & \Leftrightarrow & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\
x_1 + 4x_2 \leq 5 & & 3y_1 + 4y_2 = 1 \\
x_1 \geq 0 & & y_1,\ y_2 \geq 0
\end{array}
$$

非負条件なし $\Leftrightarrow$ 等号

３）

$$
\begin{array}{lcl}
z = 2x_1 + x_2 \quad \text{最大化} & & z' = 4y_1 - 5y_2 \quad \text{最小化} \\
2x_1 + 3x_2 \leq 4 & \Leftrightarrow & 2y_1 - y_2 \geq 2 \\
x_1 + 4x_2 \geq 5 & & 3y_1 - 4y_2 \geq 1 \\
x_1,\ x_2 \geq 0 & & y_1,\ y_2 \geq 0
\end{array}
$$

（$-x_1 - 4x_2 \leq -5$）右辺の正値性は双対問題を作る際には問わない。

1.5　プログラムの利用法

メニュー［分析－ＯＲ－線形計画法］を選択すると、図 1 のような分析実行画面が表示される。その際、変数と制約式の部分は「確認」ボタンによって記入される。これは、エディターの行数と列数から求められるので、データに空白行（列）があってはならない。

図 1　線形計画法の分析実行画面

データ入力は、直接グリッドエディタからでも、テキストエディタで一旦作成してグリッドエディタに移してもよい。グリッドエディタ内のデータ形式（線形計画法 5.txt）を図 2 に示す。

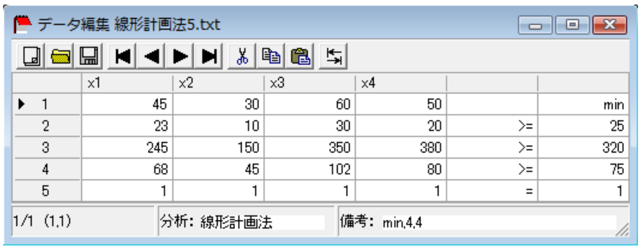


図２　線形計画法のデータ形式

表の最上部（0 行目）は変数名であり、最左部（0 列目）は行番号であるがこれがなくても特に問題はない。１行目は目的関数の係数である。最大化と最小化の区別は 1 行目最右部に、MAX または MIN の記号（大文字・小文字は区別しない）を入力して決定する。2 行目以降は制約式である。不等号・等号については BASIC で利用されるものを用いるが、不等号に等号が付いたものと付かないものは区別しない。分析の欄には線形計画法、備考の欄には最小化を表す記号と変数の数及び制約式の数を表すものが入力されているが、これらは覚書であって何も書かなくても差し支えない。

同じものをテキストエディタで作成する場合は図 3 のように入力する。

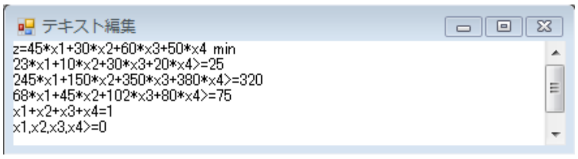


図３　線形計画法テキスト入力データ形式

このデータは「グリッド出力」ボタンによって、図 1 のようなグリッドデータとなる。

メニューの「初期 simplex 表」は、図 2 の線形計画問題から、標準的なシンプレックス表を作成するためのもので、以下の規則に従う。

１）最小化問題は目的関数に –1 を掛けて最大化問題に直す。

２）右辺が負の場合、両辺に -1 を掛けて不等号の向きは反対にする。

３）変数に非負の条件がない場合、変数を「変数名_1」と「変数名_2」の２つの非負変数に分け、元の変数をこれらの引き算で表す。

４）制約式の不等号が「<=」の場合、スラック変数を加える。

５）制約式の不等号が「>=」の場合、スラック変数を引き、人為変数を加える。

６）制約式が等号「=」の場合、人為変数を加える。

７）人為変数を加えた場合は、2 段解法の目的関数を加える。

後に例が示されるが、変数が非負かどうかを表すために、非負条件が付かない場合、代表的な線形計画法パッケージソフトウェア LINDO に習って変数名の最後に「!」記号を加えることにする。実行結果は、図 4 に示す。

第１段階シンプレックス表 STEP 0 (No. 0)

	x1	x2	x3	x4	SL1	SL2	SL3	AR1	AR2	AR3	AR4		
<-W>	-337	-206	-483	-481	1	1	1	0	0	0	0	=	-421
<-Z>	45	30	60	50	0	0	0	0	0	0	0	=	0
AR1	23	10	30	20	-1	0	0	1	0	0	0	=	25
AR2	245	150	350	380	0	-1	0	0	1	0	0	=	320
AR3	68	45	102	80	0	0	-1	0	0	1	0	=	75
AR4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	=	1

図４　初期シンプレックス表

ここにスラック変数には「SL 番号」、人為変数には「AR 番号」のように、自動的に変数名が付けられる。目的関数は Z で表し、2 段階法の場合は、第 1 段階の目的関数として W を導入する。ここでは、第 1 段階も第 2 段階も最小化問題であるので、最大化問題にするために W と Z 両方に−1 が掛かっている。最小化問題はそのままでも計算上特に問題はないが、ここでは統一性を重視した。

図 1 の実行画面で「次へ」ボタンをクリックすると、シンプレックス法の計算過程を 1 ステップ次に更新した画面が表示される。ピボット操作のステップは、初期を 0 として、2 段階法の場合も継続して数えている。続けて選択することによって、利用者は基底変数の移り変わり等を簡単に見ることが出来る。

解の存在しない場合や、無限大の解が存在する場合はメッセージにより知らせる。その際、利用者はシンプレックス表により、その理由を見ることが出来る。

「最終 Simplex 表」ボタンをクリックすると図 5 のような最終のシンプレックス表が表示される。

第２段階最終シンプレックス表 STEP 4 (No. 5)

	x1	x2	x3	x4	SL1	SL2	SL3		
<-Z>	0	6.507937	0	0	1.190476	0.063492	0	=	-52.142857
SL3	0	-25.380952	0	0	-2.642857	-0.147619	1	=	9.357143
x4	0	0.555556	0	1	0.083333	-0.005556	0	=	0.25
x3	0	-1.619048	1	0	-0.107143	-0.002381	0	=	0.392857
x1	1	2.063492	0	0	0.023810	0.007937	0	=	0.357143

図５　最終結果のシンプレックス表

「結果出力」ボタンをクリックすると図 6 のような線形計画問題の解が表示される。

LP 最適解

	STEP数	最小値(Z)	
	5	52.143	
変数	値	被約費用	
x1	0.357	0.000	
x2	0.000	6.508	
x3	0.393	0.000	
x4	0.250	0.000	
行	スラック	双対価格	
1	0.000	1.190	
2	0.000	0.063	
3	9.357	0.000	
4	0.000	2.063	
係数範囲			
変数	現在値	減少下限	増加上限
x1	45.000	-infinity	3.154
x2	30.000	-6.508	infinity
x3	60.000	-4.020	infinity
x4	50.000	-11.429	11.714
右辺範囲			
行	現在値	減少下限	増加上限
1	25.000	-3.541	3.000
2	320.000	-45.000	45.000
3	75.000	-infinity	9.357
4	1.000	-0.102	0.129

図６　最終結果の出力

最終結果の出力は、LINDO の出力に習った。以下にその定義を与える。

「最適解」は変数 $\mathbf{x}^o$ の最適値であり、「被約費用」は目的関数における $\mathbf{x}^o$ の係数である。「スラック」は制約式の左辺と右辺との差を表している。「双対価格」は双対問題の最適解でもあるが、制約式の右辺値の微小変化における目的関数の変化率としても解釈される。

感度分析において、基底変数の組が維持される目的関数の係数の範囲は「係数範囲」の部分に、また右辺係数の範囲は「右辺範囲」の部分に表示される。

主問題に対する双対問題は、図 1 の実行画面で「双対問題生成」を選択すると、グリッドエディタに表示される。双対問題はグリッドエディタにコピーして、主問題と同じように解くことが出来る。これによって実際の数値で、主問題と双対問題の関係を確認することが出来る。

図 7 や図 8（テキストエディタにコピーした形式）の中で、変数名 x2!, y2! のように後に感嘆符が付いた変数があるが、これは以前に説明したように、非負条件の付かない変数である。等号条件に対応する双対問題の変数がこれに相当する。

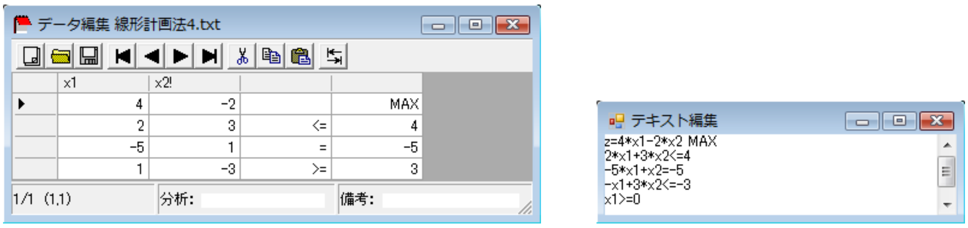


図 7　主問題

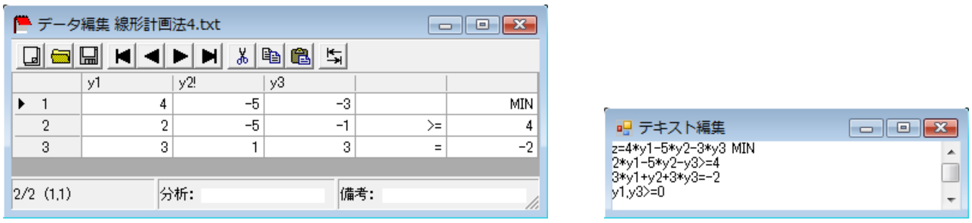


図 8　双対問題

1.6　シンプレックス法の考え方

１）標準的な線形計画問題

単体法／シンプレックス法（simplex method）

$z = 5x_1 + 6x_2$　　最大化

$x_1 + 3x_2 \le 60$

$3x_1 + 4x_2 \le 100$　　　　制約式を満たす解は見つけにくい

$2x_1 + x_2 \le 50$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

そこで、スラック変数（slack variable）x_3, x_4, x_5 を導入して以下の問題を考える。

Step 0

$z = 5x_1 + 6x_2$ （$z - 5x_1 - 6x_2 = 0$）

$$
\begin{aligned}
x_1 + [3x_2] + x_3 \quad &= 60 \\
3x_1 + 4x_2 \quad + x_4 \quad &= 100 \\
2x_1 + x_2 \quad\quad + x_5 &= 50 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0
\end{aligned}
$$

解は

$$
\begin{aligned}
&x_1 = 0,\ x_2 = 0, \\
&x_3 = 60,\ x_4 = 100,\ x_5 = 50 \\
&\rightarrow z = 0
\end{aligned}
$$

特徴

x_3, x_4, x_5　基底変数(basic variable)　　制約式の中に１回だけ現れる

x_1, x_2　非基底変数(non-basic variable)　値が 0

目的関数の式には非基底変数だけが現れる

x_1, x_2 どちらの変数を正にしたら z を増加させるのに効率が良いか？

答　係数が最大のもの　x_2（左辺に移した場合は最小のもの）

x_2 はどこまで増やせるか？

1 式 60/3=20，2 式 100/4=25，3 式 50

20 より大きくすると $x_3 < 0$ となる。

以上より、$x_2 \rightarrow 20$ とするが、同時に $x_3 \rightarrow 0$ ともなる。

式の変形（x_2 を基底変数に、x_3 を非基底変数にするように）

1 式の x_2 の係数を 1 にする。

$$\frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 20$$

他の制約式から x_2 を消す。

$$\frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_3 + x_4 \quad = 20$$
$$\frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \quad + x_5 = 30$$

目的関数式から x_2 を消す。

$$z - 3x_1 + 2x_3 = 120$$

以上の操作をピボット操作(pivot operation)という。

ピボット操作はサイクル(cycle)という名前で回数を数える。

Step 1

$$z = 3x_1 - 2x_3 + 120 \quad (z - 3x_1 + 2x_3 = 120)$$

$$\begin{aligned} &1/3\,x_1 + x_2 + 1/3\,x_3 = 20 \\ &[5/3\,x_1] \quad - 4/3\,x_3 + x_4 = 20 \\ &5/3\,x_1 \quad - 1/3\,x_3 \quad + x_5 = 30 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

解は

$$\begin{aligned} &x_1 = 0,\ x_3 = 0, \\ &x_2 = 20,\ x_4 = 20,\ x_5 = 30 \\ &\to z = 120 \end{aligned}$$

以後同様な操作を進める

Step 2

$$z = 2/5\,x_3 - 9/5\,x_4 + 156 \quad (z - 2/5\,x_3 + 9/5\,x_4 = 156)$$

$$\begin{aligned} &x_2 + 3/5\,x_3 - 1/5\,x_4 = 16 \\ &x_1 \quad - 4/5\,x_3 + 3/5\,x_4 = 12 \\ &x_3 \quad - x_4 + x_5 = 10 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

解は

$$\begin{aligned} &x_3 = 0,\ x_4 = 0, \\ &x_1 = 12,\ x_2 = 16,\ x_5 = 10 \\ &\to z = 156 \end{aligned}$$

Step 3

$$z = -7/5\,x_4 - 2/5\,x_5 + 160 \quad (z + 7/5\,x_4 + 2/5\,x_5 = 160)$$

$$\begin{aligned} &x_2 + 2/5\,x_4 - 3/5\,x_5 = 10 \\ &x_1 \quad - 1/5\,x_4 + 4/5\,x_5 = 20 \\ &x_3 \quad - x_4 \quad + x_5 = 10 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

解は

$$\begin{aligned} &x_4 = 0,\ x_5 = 0, \\ &x_1 = 20,\ x_2 = 10,\ x_3 = 10 \\ &\to z = 160 \end{aligned}$$

これは、x_4, x_5 を大きくしたら z の値は小さくなる。

$$\begin{aligned} &x_4 = 0,\ x_5 = 0, \\ &x_1 = 20,\ x_2 = 10,\ x_3 = 10 \end{aligned}$$

のとき　最大値　$z = 160$

２）シンプレックス表

回数	基底変数	x1	x2	x3	x4	x5	右辺
0	z	-5	-6	0	0	0	0
	x3	1	(3)	1	0	0	60
	x4	3	4	0	1	0	100
	x5	2	1	0	0	1	50
1	z	-3	0	2	0	0	120
	x2	1/3	1	1/3	0	0	20
	x4	(5/3)	0	-4/3	1	0	20
	x5	5/3	0	-1/3	0	1	30
2	z	0	0	-2/5	9/5	0	156
	x2	0	1	3/5	-1/5	0	16
	x1	1	0	-4/5	3/5	0	12
	x5	0	0	(1)	-1	1	10
3	z	0	0	0	7/5	2/5	160
	x2	0	1	0	2/5	-3/5	10
	x1	1	0	0	-1/5	4/5	20
	x3	0	0	1	-1	1	10

３）シンプレックス法の幾何学的意味

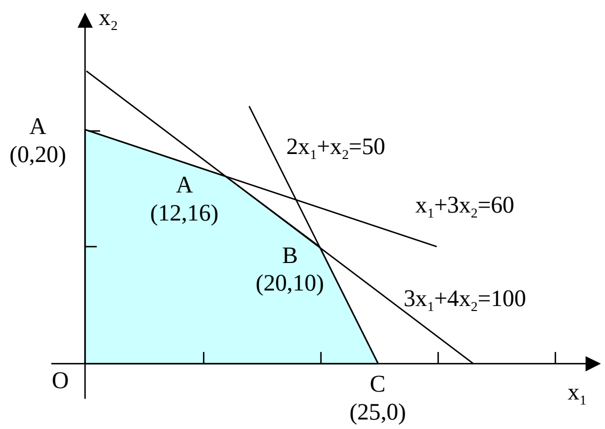


図　シンプレックス法の幾何学的意味

各ステップの x_1，x_2 の値をたどってみる。

Step 0 → Step 1 (Cycle 1)

$x_1 = 0, x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 20$　　点 O → 点 A

Step 1 → Step 2 (Cycle 2)

$x_1 = 0, x_2 = 20 \rightarrow x_1 = 12, x_2 = 16$　　点 A → 点 B

Step 2 → Step 3 (Cycle 3)

$x_1 = 12,\ x_2 = 16 \rightarrow x_1 = 20,\ x_2 = 10$　　　　点 B → 点 C

シンプレックス法は、各頂点をたどって、最適解に導く手法である。

４）等号制約の線形計画問題

例

目的関数

$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$　　　　最大化

制約条件

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 60$

$x_1 + 4x_2 + x_3 = 40$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$

シンプレックス法の適用（可能か？）

$z - 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$　　最大化

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 60$

$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 40$

これでは、初期可能解として、$x_4 = 60,\ x_5 = 40$ と出来ない。

そこで、別の初期可能解を見つける方法が必要になる。

初期可能解を見つけるために、元の問題から離れ、新たに以下の問題を考える。

$w = x_4 + x_5$　　　　最小化

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 60$

$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 40$

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$

これは、うまくゆけば、$x_4 = x_5 = 0$ の解が得られるが、２つの問題がある。

１）目的関数に変数 $x_4,\ x_5$ が含まれる。

２）最大化問題でない。

最初の問題解決のために、制約条件を用いて目的関数からこれらの変数を消す。

$$
\begin{array}{rl}
 & w - x_4 - x_5 = 0 \\
 & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 60 \\
+) & x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 40 \\
\hline
 & w + 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 100
\end{array}
$$

最小化

このままでも、簡単に問題は解けるが、標準的な線形計画問題に直すために、両辺に -1 を掛けて最大化問題にする。

$$-w-2x_1-6x_2-3x_3=-100 \qquad \text{最大化}$$

また、次の段階への移行のため、元々の目的関数も加えて、以下のように定式化される。

$$-w-2x_1-6x_2-3x_3=-100 \qquad \text{第１段階目的関数　最大化}$$
$$z-3x_1-2x_2-x_3=0 \qquad \text{第２段階目的関数}$$
$$x_1+2x_2+2x_3+x_4=60$$
$$x_1+4x_2+x_3+x_5=40$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0$$

シンプレックス表による計算

第１段階

Step	基底変数	x1	x2	x3	x4	x5	右辺
0	-w	-2	-6	-3	0	0	-100
	z	-3	-2	-1	0	0	0
	x4	1	2	2	1	0	60
	x5	1	[4]	1	0	1	40
1	-w	-1/2	0	-3/2	0	3/2	-40
	z	-5/2	0	-1/2	0	1/2	20
	x4	1/2	0	[3/2]	1	-1/2	40
	x2	1/4	1	1/4	0	1/4	10
2	-w	0	0	0	1	1	0
	z	-7/3	0	0	1/3	1/3	100/3
	x3	1/3	0	1	2/3	-1/3	80/3
	x2	1/6	1	0	-1/6	1/3	10/3

ここで、$x_4=x_5=0$ であり、これら２つの変数を取り除いても、基底形式は保たれている。そこで、さらに計算を進める。

第２段階

Step	基底変数	x1	x2	x3	右辺
2	z	-7/3	0	0	100/3
	x3	1/3	0	1	80/3
	x2	1/6	1	0	10/3

3	z	0	14	0	80
	x3	0	-2	1	20
	x1	1	6	0	20

最適解　$x_1 = 20, x_2 = 20, x_3 = 0$　のとき　$z = 80$

５）一般的な線形計画問題

再考：標準的な線形計画問題とは？

$z = 5x_1 + 6x_2$　　最大化

$x_1 + 3x_2 \le 60$

$3x_1 + 4x_2 \le 100$

$2x_1 + x_2 \le 50$

$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$

１）最大化問題である

２）制約条件の右辺が非負（０以上）

３）制約条件の変数が非負（０以上）

４）不等号の向きが「≦」

これまで標準的な線形計画問題と等号制約の線形計画問題について見てきたが、ここではさらに一般化するにはどうすべきか考えてみよう。これは一見複雑そうに見えるが、うまく工夫することで、これまで学んできた２つの解法によって解くことが可能である。ここではその方法を、例を使って説明する。

１）最小化問題の場合

$z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$　最小化　の場合

$z' = -z = -2x_1 + x_2 - 3x_3$　最大化　として解く。

最小化問題は目的関数の符号を変えれば最大化問題になる。

２）右辺が負の場合

$-3x_1 + x_2 - 2x_3 = -5$　の場合、$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$　として解く。

$-3x_1 + x_2 - 2x_3 \le -5$　の場合、$3x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 5$　として４）へ。

右辺が負の場合も全体の符号を変えると、右辺は正になる。但し、不等号の向きが変わるが、その時は４）で考える。

３）変数に非負条件がない場合

$x_1 \ge 0$　でない場合

$x_1 = x_1^+ - x_1^-,\ x_1^+ \ge 0, x_1^- \ge 0$　として変数を置き換えて解く。

変数に非負条件がない場合は、「非負の変数－非負の変数」というように、変数を２つ

に分けて考える。これによって変数の数は増えるが、非負の条件はそのまま使えるようになる。

４）不等号の向きが逆の場合

$3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 5$　の場合、

$3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_c = 5$　として、等号制約問題として解く。

２）からの場合も含めて、引き算のスラック変数を入れることで等号制約の問題に変更することができる。

これで標準問題のすべての制約を取り除くことができた。

1.7　線形計画法の理論

線形計画法は、一般に (2), (3) 式の制約条件のもとで、(1) 式の目的関数を最大化（最小化）する問題を解決するための手法である。

目的関数　$z={}^t\mathbf{c}^o\mathbf{x}^o$　最大化（最小化）,　(1)

制約条件　$\mathbf{A}_1\mathbf{x}^o \le \mathbf{b}_1$,　(2a)

$\mathbf{A}_2\mathbf{x}^o \ge \mathbf{b}_2$,　(2b)

$\mathbf{A}_3\mathbf{x}^o = \mathbf{b}_3$,　(2c)

$\mathbf{x}^o \ge \mathbf{0}$.　(3)

ここに、$\mathbf{x}^o(n_0 \times 1)$ は（3)式によって各要素が非負に制限された変数行列であり、$\mathbf{c}^o(n_0 \times 1)$, $\mathbf{b}_i(m_i \times 1) \ge \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_i(m_i \times n)$ は係数行列である。

制約条件が (2a) だけの場合は、スラック変数を加え、容易に初期実行可能基底解が与えられるので、すぐにピボット操作による計算が実行出来るが、(2b) または (2c) を含む場合は、一般に実行可能基底解を得るために、２段階法を適用する。即ち、スラック変数 $\mathbf{x}_1^s(m_1 \times 1) \ge \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_2^s(m_2 \times 1) \ge \mathbf{0}$ と人為変数 $\mathbf{x}_2^a(m_2 \times 1) \ge \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_3^a(m_3 \times 1) \ge \mathbf{0}$ を加え、(2)式を変形する。

$\mathbf{A}_1\mathbf{x}^o + \mathbf{x}_1^s = \mathbf{b}_1$,　(4a)

$\mathbf{A}_2\mathbf{x}^o - \mathbf{x}_2^s + \mathbf{x}_2^a = \mathbf{b}_2$,　(4b)

$\mathbf{A}_3\mathbf{x}^o + \mathbf{x}_3^a = \mathbf{b}_3$.　(4c)

第 1 段階の目的関数は、

$w={}^t\mathbf{e}_2\mathbf{x}_2^a+{}^t\mathbf{e}_3\mathbf{x}_3^a$　最小化 ,　(5)

のように書ける。ここに、$\mathbf{e}_i(m_i \times 1)$ は、全ての成分が 1 の行列である。

(5)式は基底形式でないので、(4b), (4c)式を加え、基底形式に変形する。

第 1 段階目的関数　$w+{}^t\mathbf{dx}={}^t\mathbf{eb}$,　w ：最小化　(6)

第 2 段階目的関数　$z-{}^t\mathbf{cx}=0$,　z ：最大化（最小化）　(7)

制約条件　$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$,　$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$.　(8)

ここに、記号については以下にまとめる。

$$\mathbf{x}(n\times 1)=\begin{pmatrix}\mathbf{x}^o\\ \mathbf{x}_1^s\\ \mathbf{x}_2^s\\ \mathbf{x}_2^a\\ \mathbf{x}_3^a\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}(n\times 1)=\begin{pmatrix}\mathbf{c}^o\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},\quad \mathbf{d}(n\times 1)=\begin{pmatrix}{}^t\mathbf{A}_2\mathbf{e}_2+{}^t\mathbf{A}_3\mathbf{e}_3\\ \mathbf{0}\\ -\mathbf{e}_2\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}(m\times n)=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}(m\times 1)=\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\\ \mathbf{b}_3\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}(m\times 1)=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix},$$

$n=n_0+m_1+2m_2+m_3$,　$m=m_1+m_2+m_3$.　(9)

ピボット操作を繰り返し、第１段階で最適解が存在すれば、$\mathbf{x}_2^a = \mathbf{0}$，$\mathbf{x}_3^a = \mathbf{0}$，$w = 0$ の解を得る。このとき、その最適解についての基底行列を $\mathbf{B}_1$ 、それに対応する係数 $\mathbf{c}$ と $\mathbf{d}$ の基底部分を $\mathbf{c}_{B_1}$，$\mathbf{d}_{B_1}$ とすると、(6)~(8)式は以下となる。

第１段階目的関数　　$w + ({}^t\mathbf{d} - {}^t\mathbf{d}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = {}^t\mathbf{e}\mathbf{b} - {}^t\mathbf{d}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}\ (=0)$,　　(10)

第２段階目的関数　　$z - ({}^t\mathbf{c} - {}^t\mathbf{c}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = {}^t\mathbf{c}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}$,　　(11)

制約条件　　$\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}$,　$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.　　(12)

第 1 段階の最適解は第２段階の初期可能基底解になっている。そこで、人為変数を消去して次元を縮小し、新たに、以下の問題を考える。

目的関数　　$z - {}^t\mathbf{c}^{(1)}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{c}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}$,　　z ：最大化（最小化）　　(13)

制約条件　　$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)}$,　$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.　　(14)

記号については改めて以下にまとめる。

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{A}\ ,\quad \mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}\ ,\quad {}^t\mathbf{c}^{(1)} = {}^t\mathbf{c} - {}^t\mathbf{c}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{A},$$

$$\mathbf{A}(m\times n) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\ ,\quad \mathbf{x}(n\times 1) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^o \\ \mathbf{x}_1^s \\ \mathbf{x}_2^s \end{pmatrix},\quad \mathbf{c}(n\times 1) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^o \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$n = n_0 + m_1 + m_2,\quad m = m_1 + m_2 + m_3. \qquad (15)$$

(13), (14)の問題に対して、最適解が存在する場合には、ピボット操作を行った後、最終的に以下の式を得る。

目的関数　　$z - {}^t\mathbf{c}^{(2)}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{c}_{B_1}\mathbf{b}^{(1)} + {}^t\mathbf{c}_{B_2}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)}$,　　(16)

制約条件　　$\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)}$,　　(17)

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{A}^{(1)},\quad \mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b}^{(1)}\ ,\quad {}^t\mathbf{c}^{(2)} = {}^t\mathbf{c}^{(1)} - {}^t\mathbf{c}_{B_2}^{(1)}\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{A}^{(1)}, \qquad (18)$$

ここに、$\mathbf{B}_2$ は $\mathbf{A}^{(1)}$ についての基底行列である。

これらの式は、最終的な基底変数に対応する基底行列 $\mathbf{B}\ (= \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)$ を用いると、以下のように書けることにも注意しておく必要がある。

目的関数　　$z - {}^t\hat{\mathbf{c}}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$,　　(19)

制約条件　　$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$,　　(20)

$${}^t\hat{\mathbf{c}} \equiv {}^t\mathbf{c}^{(2)} = {}^t\mathbf{c} - {}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A},\quad \hat{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}. \qquad (21)$$

これより基底変数 $\mathbf{x}_B$ と非基底変数 $\mathbf{x}_N$ に対して、最適解は、$\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$，$\hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$　となる。その際、目的関数は　$\hat{z} = {}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$　となる。

線形計画問題 (1)~(3) に対して、一般性を失わず、制約式右辺の非負性 $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ を除き、また変数の非負性 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ も一部取り除いて、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}(m_1\times n_1) & \mathbf{A}_{12}(m_1\times n_2) \\ \mathbf{A}_{21}(m_2\times n_1) & \mathbf{A}_{22}(m_2\times n_2) \end{pmatrix},\quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1(m_1\times 1) \\ \mathbf{b}_2(m_2\times 1) \end{pmatrix},\quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1(n_1\times 1) \\ \mathbf{c}_2(n_2\times 1) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1(n_1\times 1)\\ \mathbf{x}_2(n_2\times 1)\end{pmatrix},\ \ \mathbf{y}=\begin{pmatrix}\mathbf{y}_1(m_1\times 1)\\ \mathbf{y}_2(m_2\times 1)\end{pmatrix}, \tag{22}$$

の記号を用いると、主問題と双対問題はお互いに以下のように表現することが出来る。

主問題（双対問題）		双対問題（主問題）
$z={}^t\mathbf{cx}$　最大化,		$z'={}^t\mathbf{by}$　最小化,
$\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1+\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2\le\mathbf{b}_1$,	$\Leftrightarrow$	${}^t\mathbf{A}_{11}\mathbf{y}_1+{}^t\mathbf{A}_{21}\mathbf{y}_2\ge\mathbf{c}_1$,
$\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1+\mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_1=\mathbf{b}_2$,		${}^t\mathbf{A}_{12}\mathbf{y}_1+{}^t\mathbf{A}_{22}\mathbf{y}_2=\mathbf{c}_2$,
$\mathbf{x}_1\ge\mathbf{0}$.		$\mathbf{y}_1\ge\mathbf{0}$.　(23)

これらの問題の間には､最適解 $\Leftrightarrow$ 最適解, 無限解 $\Rightarrow$ 不能, 不能 $\Rightarrow$ 無限解または不能, の関係が存在するが、最適解の場合、双方の目的関数の値は等しくなる。

$$\hat{z}={}^t\mathbf{c}_B\hat{\mathbf{x}}_B={}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}={}^t\hat{\mathbf{y}}\mathbf{b}=\hat{z}'. \tag{24}$$

ここに、変数 $\mathbf{y}$ の最適解 $\hat{\mathbf{y}}={}^t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}_B$ は双対価格と呼ばれる。

次に、パラメータの変化に対する最適解の安定性を吟味する感度分析について考える。目的関数の係数の微小変化によって､最適解の係数は ${}^t\hat{\mathbf{c}}+{}^t\Delta\hat{\mathbf{c}}={}^t\hat{\mathbf{c}}+{}^t\Delta\mathbf{c}-{}^t\Delta\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ のように変化する。最大化の場合これが非正（最小化では非負）のままだと基底変数の組が維持される。即ち、非基底変数の係数について ${}^t\hat{\mathbf{c}}_R+{}^t\Delta\mathbf{c}_R-{}^t\Delta\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}\le\mathbf{0}$（最小化では非負）を満たしていなければならない。ここに、$\mathbf{R}$ は行列 $\mathbf{A}$ の非基底部分とする。この関係より、係数変化の範囲として以下の条件を得る。但し、最小化の場合は不等号の向きが逆になることに注意する。

$$\begin{aligned}
&\Delta\mathbf{c}_R\le-\hat{\mathbf{c}}_R, &&\\
&(\Delta\mathbf{c}_B)_i\ge(\hat{\mathbf{c}}_R)_j\big/(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R})_{ij}, &&\text{for }(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R})_{ij}>0,\\
&(\Delta\mathbf{c}_B)_i\le(\hat{\mathbf{c}}_R)_j\big/(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R})_{ij}, &&\text{for }(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R})_{ij}<0,\\
&\quad\text{制限なし} &&\text{for }(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R})_{ij}=0.
\end{aligned}\tag{25}$$

次に、係数 $\mathbf{b}$ の変化に対して、基底変数の組が変化しない範囲は基底変数の最適解が非負を維持する範囲 $\hat{\mathbf{x}}_B+\Delta\hat{\mathbf{x}}_B=\hat{\mathbf{x}}_B+\mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b}\ge\mathbf{0}$ である。これより以下の条件を得る。

$$\begin{aligned}
&(\Delta\mathbf{b})_i\ge-(\hat{\mathbf{x}}_B)_j\big/(\mathbf{B}^{-1})_{ji}, &&\text{for }(\mathbf{B}^{-1})_{ij}>0,\\
&(\Delta\mathbf{b})_i\le-(\hat{\mathbf{x}}_B)_j\big/(\mathbf{B}^{-1})_{ji}, &&\text{for }(\mathbf{B}^{-1})_{ij}<0,\\
&\quad\text{制限なし} &&\text{for }(\mathbf{B}^{-1})_{ij}=0.
\end{aligned}\tag{26}$$

線形計画法とクーン・タッカーの条件について

標準的な線形計画問題の解とクーン・タッカーの最適性の条件について調べてみる。標準的な線形計画問題は以下のように与えられる。

目的関数　$z={}^t\mathbf{px}$　最大化

制約条件　$\mathbf{Ax}\le\mathbf{b}$,　$\mathbf{x}\ge\mathbf{0}$

また、この問題の双対問題は変数を $\boldsymbol{\lambda}$ とすると、以下のように与えられる。

目的関数　$z' = {}^t\mathbf{b}\boldsymbol{\lambda}$　最小化
制約条件　${}^t\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{p}$，$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$

これを、ラグランジュ定数を付けた問題ととらえると以下となる。

$$V(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = {}^t\mathbf{p}\mathbf{x} + {}^t\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$$

$$= {}^t\boldsymbol{\lambda}\mathbf{b} + ({}^t\mathbf{p} - {}^t\boldsymbol{\lambda}\mathbf{A})\mathbf{x} = {}^t\left[{}^t\mathbf{b}\boldsymbol{\lambda} + {}^t\mathbf{x}(\mathbf{p} - {}^t\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda})\right]$$

最適解 $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ が鞍点とすると、

$$V(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}_0) \leq V(\mathbf{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0) \leq V(\mathbf{x}_0,\boldsymbol{\lambda})$$

クーン・タッカーの最適性の条件は、

$${}^t\boldsymbol{\lambda}_0(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0) = 0, \qquad ({}^t\mathbf{p} - {}^t\boldsymbol{\lambda}_0\mathbf{A})\mathbf{x}_0 = 0$$

ここで、主問題の解 $\mathbf{x}_0$ を最適解、双対問題の解 $\boldsymbol{\lambda}_0$ を双対価格、$\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$ をスラック値、${}^t\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{p}$ を被約費用と呼ぶ。

この関係が実際に成り立っていることを、例を用いて調べよう。

線形計画主問題
目的関数　z=5*x1+6*x2　MAX
制約条件　x1+3*x2<=60
3*x1+4*x2<=100
2*x1+x2<=50
x1,x2>=0

双対問題
目的関数　z=60*y1+100*y2+50*y3 MIN
制約条件　y1+3*y2+2*y3>=5
3*y1+4*y2+y3>=6
y1,y2,y3>=0

解

	STEP数	最大値(Z)	
▶	3	160.000	
変数	値	被約費用	
x1	20.000	0.000	
x2	10.000	0.000	
行	スラック	双対価格	
1	10.000	0.000	
2	0.000	1.400	
3	0.000	0.400	
係数範囲			
変数	現在値	減少下限	増加上限
x1	5.000	-0.500	7.000
x2	6.000	-3.500	0.667
右辺範囲			
行	現在値	減少下限	増加上限
1	60.000	-10.000	infinity
2	100.000	-25.000	10.000
3	50.000	-10.000	16.667

	STEP数	最小値(Z)	
▶	3	160.000	
変数	値	被約費用	
y1	0.000	10.000	
y2	1.400	0.000	
y3	0.400	0.000	
行	スラック	双対価格	
1	0.000	20.000	
2	0.000	10.000	
係数範囲			
変数	現在値	減少下限	増加上限
y1	60.000	-10.000	infinity
y2	100.000	-25.000	10.000
y3	50.000	-10.000	16.667
右辺範囲			
行	現在値	減少下限	増加上限
1	5.000	-0.500	7.000
2	6.000	-3.500	0.667

図１　線形計画問題の解

これを見ると

双対価格×スラック＝${}^t\boldsymbol{\lambda}_0(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0) = 0$
最適解×被約費用＝${}^t\mathbf{x}_0(\mathbf{p} - {}^t\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}_0) = 0$

の関係のクーン・タッカーの最適性の条件が成り立っていることがよく分かる。

1.8　線形計画法の輸送問題への応用

　これ以降の節では線形計画問題の応用について考える。最初は輸送問題への応用である。

例

この例は工場１から工場３で生産した商品を販売会社１から販売会社４に配送する問題である。

表１　単位商品当りの輸送コストと輸送量

	会社１	会社２	会社３	会社４	生産高
工場１	(7) x_{11}	(3) x_{12}	(2) x_{13}	(10) x_{14}	18
工場２	(9) x_{21}	(3) x_{22}	(6) x_{23}	(8) x_{24}	22
工場３	(8) x_{31}	(7) x_{32}	(8) x_{33}	(6) x_{34}	26
需要	12	20	16	18	66

表１の( ) 内の数字を単位商品当りの輸送コストとして、生産高と需要との関係を満たしながら、総輸送コストを最小にする輸送量 x_{ij} を求める。

線形計画法による定式化

　工場 i から会社 j への単位商品当りの輸送コストを c_{ij} 、

　工場 i の生産高を a_i 、会社 j の需要を b_j とすると、以下の線形計画問題となる。

　目的関数　　　$z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$　最小化

　制約条件　　　$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i$,　$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j$,　$x_{ij} \geq 0$

　具体的なテキストでの入力では図１のような形になる。

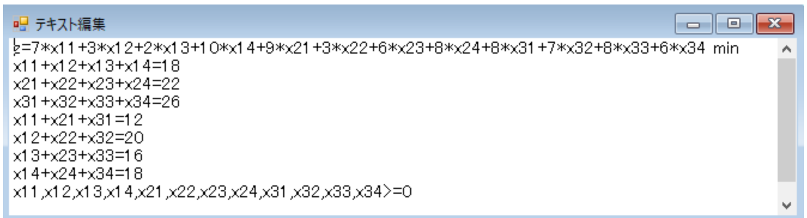
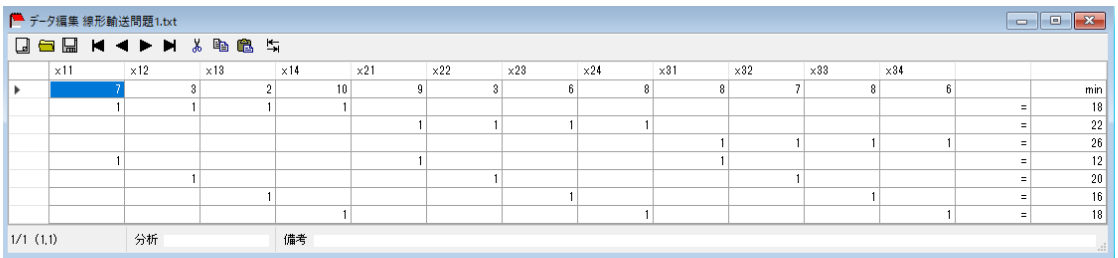


図１　線形輸送問題

輸送計画の場合、テキストで打ち込むよりグリッドに直接打ち込む方が楽である。その書式を図２に示す。



x11	x12	x13	x14	x21	x22	x23	x24	x31	x32	x33	x34		
7	3	2	10	9	3	6	8	8	7	8	6		min
1	1	1	1									=	18
				1	1	1	1					=	22
								1	1	1	1	=	26
1				1				1				=	12
	1				1				1			=	20
		1				1				1		=	16
			1				1				1	=	18

図２　線形輸送問題の直接グリッド入力（線形輸送問題 1.txt）

解答は表２のようになる。

表２　輸送問題の解

	会社１	会社２	会社３	会社４
工場１	2	0	16	0
工場２	2	20	0	0
工場３	8	0	0	18

最適輸送費用［ 296 ］千円

輸送問題の解法には独特の方法もあるが、ここでは線形計画法を基にした解法を考えている。

問題１

３つの工場で生産した商品を３つの販売会社に輸送する。そのときの製品１単位当りの運送費用（括弧の付いた値，千円)、各工場の生産高（商品単位)、各会社への納入量（商品単位）は以下の表の通りである。全体の運送費用を最も安くするためには、各工場から各会社への輸送量をいくらにすればよいか。またそのときの輸送費用はいくらか。

	会社１	会社２	会社３	生産高
工場１	(4)	(4)	(5)	15
工場２	(3)	(4)	(5)	14
工場３	(6)	(5)	(4)	13
納入量	12	14	16	42

解答

	会社１	会社２	会社３
工場１			
工場２			
工場３			

輸送費用［　　　　　　　］千円

問題２

上の問題で、工場３から会社３への輸送量は 8 単位を超えないものとすると、各工場から各会社への輸送量はどうなるか。またそのときの輸送費用はいくらか。

解答

	会社１	会社２	会社３
工場１			
工場２			
工場３			

輸送費用［　　　　　　　］千円

演習１

３つの工場で生産した商品を４つの販売会社に配送する問題で、単位商品当たりの輸送コストと輸送量が以下の表のように与えられているとき、各工場から各会社への最適な輸送量を求めよ。

	会社１	会社２	会社３	会社４	生産高
工場１	(4) x_{11}	(6) x_{12}	(3) x_{13}	(9) x_{14}	270
工場２	(6) x_{21}	(4) x_{22}	(8) x_{23}	(5) x_{24}	350
工場３	(4) x_{31}	(7) x_{32}	(9) x_{33}	(5) x_{34}	200
需要	230	300	180	110	820

１）最適な輸送量を求めよ。

	会社１	会社２	会社３	会社４
工場１				
工場２				
工場３				

２）最適な輸送量のときの費用を求めよ。

最適輸送費用［　　　　　　　　］

３）事故によって工場１から会社１への輸送ができなくなった。荷物は他の経路に回すことになったが、そのときの最適な輸送量を求めよ。

	会社１	会社２	会社３	会社４
工場１				
工場２				
工場３				

４）３）の場合の費用を求めよ。

最適輸送費用［　　　　　　］

問題１解答

	会社１	会社２	会社３
工場１	0	12	3
工場２	12	2	0
工場３	0	0	13

輸送費用［ 159 ］千円

問題２解答

	会社１	会社２	会社３
工場１	0	7	8
工場２	12	2	0

工場３	0	5	8

輸送費用［ 169 ］千円

演習１解答

１） 最適な輸送量を求めよ。

	会社１	会社２	会社３	会社４
工場１	90	0	180	0
工場２	0	300	0	50
工場３	140	0	0	60

２） 最適な輸送量のときの費用を求めよ。　最適輸送費用［ 3210 ］

３）事故によって工場１から会社１への輸送ができなくなった。荷物は他の経路に回すことになったが、そのときの最適な輸送量を求めよ。

	会社１	会社２	会社３	会社４
工場１	0	90	180	0
工場２	30	210	0	110
工場３	200	0	0	0

４） ３）の場合の費用を求めよ。　最適輸送費用［ 3450 ］

1.9　線形計画法のゲーム理論への応用

この節では混合ゼロ和二人ゲームへの応用を考えてみよう。プレイヤー2 人が１つの利得行列を使って戦略を決めるゲームであり、1 回の打ち手で勝負を決める場合を純粋戦略の問題、多くの（原理的には無限回）打ち手で勝負を決める場合を混合戦略の問題という。線形計画法は後者の混合戦略の問題に利用されるが、少しゼロ和二人ゲームを理解するために、純粋戦略の問題から簡単に解説する。

1）純粋戦略ゼロ和２人ゲーム

純粋戦略（純戦略）ゲームとは１回の打ち手で勝負を決めるゲームのことである。ゲームの利得は、プレイヤー１の戦略とプレイヤー２の戦略により、プレイヤー１が得る利得を表す利得行列によって表される。プレイヤー１の利得は、零和ゲームなので、そのままプレイヤー２の損失になる。

以下の例を見てもらいたい。プレイヤー１は３つの戦略を持っていて、プレイヤー２は４つの戦略を持っているとし、その戦略間の利得行列は以下で与えられるものとする。これはプレイヤー１の利得を表すものであるが、プレイヤー２にとっては損失を表す。そのため、プレイヤー１はこの中でできるだけ大きな値を得るように戦略を考え、プレイヤー２はできるだけ小さな値を得るように戦略を考る。

プレイヤー２

$$
\text{プレイヤー１}\quad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} &
\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

プレイヤー１の戦略ごとの利得は相手に応じて行 1 から行 3 で与えられる。また、プレイヤー２の戦略ごとの損失は列 1 から列 4 で与えられる。2 人のプレイヤーが満足できる解はあるのだろうか。

解法

最初に、プレイヤー１が相手（プレイヤー２）の戦略によって自分が最も得をする戦略を考える。プレイヤー２が戦略１を取った場合、プレイヤー１は戦略１をとると利得が 4 で最も得をする。同様にプレイヤー２が戦略 2 をとった場合、プレイヤー１は戦略 1 をとると利得が 3 で最も得をする。これを以下のように行列に印を付けて表してみる。

プレイヤー２

$$
\text{プレイヤー１}\quad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} &
\begin{pmatrix} {}^{1}4 & {}^{1}3 & 3 & {}^{1}2 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & {}^{1}4 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

利得の左側に付けた 1 の記号はプレイヤー１が選ぶべき戦略を表している。各列の最大値がそれに相当する。ここでは印は各列１つずつであるが、２つ以上同じ値の場合もある。

次にプレイヤー１がそれぞれの戦略をとった場合､プレイヤー２がとるべき戦略は各行の中で最も小さい値である。これは数字がプレイヤー２の損失になっているからである。これを以下のように行列に印を付けていく。

プレイヤー２

$$
\text{プレイヤー１}\quad
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
{}^{1}4 & {}^{1}3 & 3 & {}^{1}2^{2} \\
3 & 1 & -3^{2} & -2 \\
0 & -2^{2} & {}^{1}4 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

ここでは数字を値の左右に付けたが､手で書く場合は○や△で囲むのもよいだろう｡ここで､1 行 4 列に 2 つの印が付いているが、この値は 2 人のプレイヤーが納得する利得で、ゲームの値と呼ばれる。また、この戦略の組み合わせは純粋戦略の均衡解と呼ばれる。均衡解は 2 つ以上ある場合もあるし、ない場合もある。

純粋戦略均衡解［$\boxed{\text{あり}}$・なし］　　戦略［１，４］　　ゲームの値［　２　］

均衡解が存在しない場合

以下の利得行列で純粋戦略の問題を解いてみてもらいたい。

プレイヤー２

$$
\text{プレイヤー１}\quad
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
{}^{1}5 & 2 & -2^{2} \\
2 & 1^{2} & 3 \\
-1^{2} & {}^{1}3 & {}^{1}6
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

印が重なるところがないので純粋戦略の均衡解はないことになる。

純粋戦略均衡解［あり・$\boxed{\text{なし}}$］　　戦略［　　，　　］　　ゲームの値［　　　］

均衡解という言葉が出たが、ここで分かり易い定義を書いておく。

<u>均衡解とは相手が戦略を変えなければ、自分が戦略を変える動機を持たない（戦略を変えても得をしない）解のことである。</u>

均衡解が存在しない場合、不満があるプレイヤーが戦略を変えたら､別のプレイヤーに不満が生じ、戦略を変えたくなる。これがいつまでたっても続く。このような場合には、純粋戦略問題としては解がなく、混合戦略問題による解法が必要になる。

問題１

利得行列が以下のように与えられる純粋戦略零和２人ゲームの解を求めよ。

利得行列 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

純粋戦略均衡解［あり・なし］　戦略［　，　］　ゲームの値［　］

問題２

利得行列が以下のように与えられる純粋戦略零和２人ゲームの解を求めよ。

利得行列 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

純粋戦略均衡解［あり・なし］　戦略［　，　］　ゲームの値［　］

問題３

利得行列が以下のように与えられる純粋戦略零和２人ゲームの解を求めよ。

利得行列 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

純粋戦略均衡解［あり・なし］　戦略［　，　］　ゲームの値［　］

問題１解答

$$\begin{pmatrix} {}^{1}3^{2} & {}^{1}4 \\ 2 & 1^{2} \end{pmatrix}$$

純粋戦略均衡解［$\boxed{\text{あり}}$・なし］　戦略［１，１］　ゲームの値［　３　］

問題２解答

$$\begin{pmatrix} 4 & 2^{2} & 3 \\ 3^{2} & {}^{1}7 & {}^{1}6 \\ {}^{1}5 & 3 & 2^{2} \end{pmatrix}$$

純粋戦略均衡解［あり・$\boxed{\text{なし}}$］　戦略［　，　］　ゲームの値［　］

問題３解答

$$\begin{pmatrix} {}^{1}3 & {}^{1}-1^{2} & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3^{2} & -2 \\ -1 & -3^{2} & {}^{1}4 & {}^{1}2 \end{pmatrix}$$

純粋戦略均衡解［$\boxed{\text{あり}}$・なし］　戦略［１，２］　ゲームの値［　-1　］

2）混合戦略零和２人ゲーム

均衡点がない場合、１回の打ち手で勝負は決まらないが、二人のプレイヤーが出す手を確率的に決めて、多数回（無限回）勝負を行うと二人とも満足の得られる解が求められることが知られている。ここではその打ち手の確率を求める方法を説明する。

例

以下の利得行列で混合戦略ゼロ和二人ゲームを行った際に二人のプレイヤーの出すべき手の確率を求めよ。但し、これは均衡点を持たない利得行列である。

利得行列 $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

プレイヤー１は確率 p_1 で戦略１、確率 p_2 で戦略２を選択するとする。そのときの利得の期待値を求める。

プレイヤー２が戦略１のとき

プレイヤー１の利得の期待値　$5p_1 + 2p_2$

プレイヤー２が戦略２のとき

プレイヤー１の利得の期待値　$p_1 + 3p_2$

これらがある数 u より大きいとして、u を最大化する線形計画法を考える。

目的関数

$z = u$　最大化

制約式

$5p_1 + 2p_2 - u \geq 0$

$p_1 + 3p_2 - u \geq 0$

$p_1 + p_2 = 1$

$p_1, p_2 \geq 0$

ここで、制約式の３番目と４番目の式は p_1 と p_2 が確率であることから与えられる。

これまでプレイヤー２については、何も述べて来なかったが、実はプレイヤー２の解はプレイヤー１の線形計画問題の双対価格になっている。実際、プレイヤー1 の線形計画問題の双対問題を作ってみると以下となる（多少変形が必要だが、各自やってみてもらいたい）。

目的関数

$z' = v$　最小化

制約式

$5q_1 + q_2 - v \leq 0$

$2q_1 + 3q_2 - v \leq 0$

$q_1 + q_2 = 1$

$q_1, q_2 \geq 0$

これは、まさしくプレイヤー２の線形計画問題となっている。
以上のことから、解は以下となる。

プレイヤー１（プレイヤー１の利得は目的関数値）

利得	p1	p2
2.6	0.2	0.8

プレイヤー２（双対価格のところを見る。）

損失	q1	q2
2.6	0.4	0.6

問題１

プレイヤー１の利得行列が以下のように与えられる混合戦略零和２人ゲームの解を求めよ。

利得行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

目的関数

制約式（相手の戦略によらず一定の利得 u は確保）

解

プレイヤー１

利得	p1	p2

プレイヤー２

損失	q1	q2

問題２

プレイヤー１の利得行列が以下のように与えられる混合戦略零和２人ゲームの解を求めよ。

利得行列 $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

解

プレイヤー１

利得	p1	p2	p3

プレイヤー２（双対価格・利得と損失は目的関数値に同じ）

損失	q1	q2	q3

問題１解答

目的関数

z=u　max

制約式（相手の戦略によらず一定の利得 u は確保）

5*p1+2*p2-u>=0
p1+3*p2-u>=0
p1+p2=1
p1,p2>=0

プレイヤー１

利得	p1	p2
1.5	0.5	0.5

プレイヤー２

損失	q1	q2
1.5	0.5	0.5

問題２解答

プレイヤー１

利得	p1	p2	p3
2.107	0.464	0.214	0.321

プレイヤー２（双対価格・利得と損失は目的関数値に同じ）

損失	q1	q2	q3
2.107	0.393	0.250	0.357

このソフトでは非零和非協力ゲームの場合についてもプログラムを作成している。これについては章を変えて議論する。

２．多目的線形計画法

2.1　多目的線形計画法とは

線形計画法は、１つの目的関数について最適な解を求めるが、現実にはいくつかの量をできるだけ良い値（最良化妥協解）にするような解決法を求められる場合も多い。このような問題に対して、適用されるのが多目的線形計画法である。

例として、ある工場で２つの製品 1,2 を作っている場合を考える。その製品には 3 つの原料Ａ，Ｂ，Ｃを利用するとして、原料の供給量には上限がある。また、それぞれの製品を作る原料にも必要量があり、それらを表１のように示す。

表１　製品と原料

原料＼製品	1	2	原料の供給量（kg）
A	1	3	６０
B	3	4	１００
C	2	1	５０
製品１単位当りの利益（万円）	5	6	最大化
広告効果	2	3	最大化

製品 1 を作るには原料Ａを 1kg、原料Ｂを 3kg、原料Ｃを 2kg 使う必要がある。製品 2 を作るには原料Ａを 3kg、原料Ｂを 4kg、原料Ｃを 1kg 使う必要がある。原料の供給量の上限はＡが 60kg、Ｂが 100kg、Ｃが 50kg である。製品を作ると製品 1 単位作るごとに、製品 1 では 5 万円、製品 2 では 6 万円の利益が出るものとする。また、この製品を作ることで、会社の技術力を訴えることにもなり、製品を作るごとに、製品 1 では 2、製品 2 では 3 の広告効果があるものとする。しかし、最大の利益を上げることと最高の広告効果を上げることは同じではなく、双方ある程度の妥協は必要である。最も効率的な製品の生産量はいくらか。

利益を表す数式を目的関数１、広告効果を表す数式を目的関数２、条件を表す数式を制約条件とし、x_1 と x_2 をそれぞれ製品 1 と 2 の製造量として、この問題を数式で表すと以下のようになる。

問題の定式化

目的関数（objective function）

$z_1 = 5x_1 + 6x_2$　　利益の最大化

$z_2 = 2x_1 + 3x_2$　　広告効果の最大化

制約条件（constraints）

$$x_1 + 3x_2 \le 60$$

$$3x_1 + 4x_2 \le 100$$

$$2x_1 + x_2 \le 50$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

ここではこの問題について順を追って解を求めてみる。まずこの問題を１つずつの線形計画問題として考える。２つの目的関数に対する最適解を求めると表 2 のようになる。

表２　各目的関数についての最適解

	x_1	x_2	Z
目的関数１	20	10	160
目的関数２	12	16	72

2 つの最適解は目的関数によって、x_1 と x_2 の値が異なっている。ある目的関数の最適解の場合、他の目的関数の値はいくらになるか調べてみる。これをペイオフ表という。表 3 にその結果を示す。

表３　ペイオフ表

	x_1	x_2	z_1	z_2
目的関数１	20	10	$\boxed{160}$	70
目的関数２	12	16	156	$\boxed{72}$

2 つの最適解で目的関数の値に隔たりがあるので、変数値 x_1 と x_2 を取った場合の最適解との隔たりの割合（１－充足率）を考えてみる。その１－充足率の合計をできるだけ小さくした変数値を最良化妥協解と呼ぶが、これを新たな線形計画問題として解を求める。

新しい線形計画問題の目的関数を以下に示す。制約条件に付いては 2 つの目的関数の最適値を求める際に用いたものと同じである。

目的関数

$$z = \frac{160-(5x_1+6x_2)}{160} + \frac{72-(2x_1+3x_2)}{72} = 2 - 0.059028\,x_1 - 0.079167\,x_2 \quad \text{最小化}$$

この問題の最良化妥協解を表 4 に示す。

表４　最良化妥協解

x_1	x_2	z
12	16	0.025

これが多目的線形計画法の解であるが、この解がどの程度の充足率を与えるか示しておく必要がある。この解を用いた最良化充足率を表 5 に示す。

表５　最良化充足率

	最大/最小	最適化値	妥協値	充足率
目的関数１	最大化	160	156	0.975
目的関数２	最大化	72	72	1

場合によって、目的関数の重要性に違いがあり、ウェイトをかける場合もある。例えばウェイトを２：１とすると最良化妥協解と最良化充足率は表 6 及び表 7 のように変わる。

表６　ウェイトをかけた最良化妥協解

x_1	x_2	z
20	10	0.0278

表７　ウェイトをかけた最良化充足率

	最大/最小	最適化値	妥協値	充足率
目的関数１	最大化	160	160	1
目的関数２	最大化	72	70	0.972

2.2　プログラムの利用法

ここではプログラムの具体的な実行例について説明する。図 1 に多目的線形計画法の分析実行画面を示す。

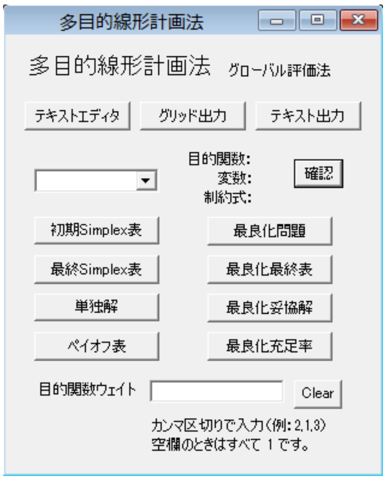


図 1　多目的線形計画法の分析実行画面

線形計画問題の式を表すデータは基本的に表形式で入力するが、必要に応じてテキスト形式でも入力できる。メニューの「テキストエディタ」ボタンでテキスト入力用のエディターが表示され、式をそこに書き込むことができる。「グリッド出力」ボタンはテキスト形式を表形式に変換し、「テキスト出力」ボタンは表形式をテキスト形式に変換する役割を持つ。表形式のデータの例を図 2 に示す。

図 2　表形式データ画面

また、テキスト形式のデータの例を図 3 に示す。

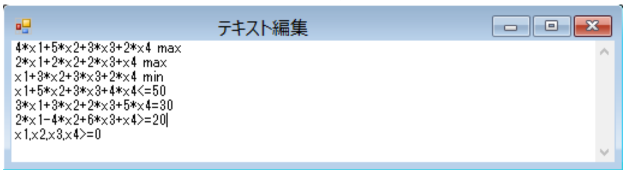


図 3　テキスト形式データ画面

上のデータから各目的関数についての単独解を求めるには、まず左上のコンボボックスで目的関数を選択し、「初期 Simplex 表」、「最終 Simplex 表」、「単独解」ボタンを利用する。これらの表示画面をそれぞれ図 4、図 5、図 6 に示す。これらは線形計画法における出力形式に等しい。

第 1 段階シンプレックス表 STEP 0 (No. 0)

	x1	x2	x3	x4	SL1	SL2	AR1	AR2		
<-W>	-5	1	-8	-6	0	1	0	0	=	-50
<Z>	-4	-5	-3	-2	0	0	0	0	=	0
SL1	1	5	3	4	1	0	0	0	=	50
AR1	3	3	2	5	0	0	1	0	=	30
AR2	2	-4	6	1	0	-1	0	1	=	20

図 4　目的関数 1 の初期 Simplex 表画面

第 2 段階最終シンプレックス表 STEP 3 (No. 4)

	x1	x2	x3	x4	SL1	SL2		
<Z>	0.769231	0	0	6.038462	0	0.038462	=	47.692308
SL1	-3.769231	0	0	-4.038462	1	-0.038462	=	2.307692
x2	0.538462	1	0	1.076923	0	0.076923	=	5.384615
x3	0.692308	0	1	0.884615	0	-0.115385	=	6.923077

図 5　目的関数 1 の最終 Simplex 表画面

最終結果

```
LP 最適解   TOTAL STEP 4    最大値  47.6923

変数          値       被約費用
 x1       0.0000       0.7692
 x2       5.3846       0.0000
 x3       6.9231       0.0000
 x4       0.0000       6.0385

 行      スラック      双対価格
  1       2.3077       0.0000
  2       0.0000       1.6154
  3       0.0000       0.0385

係数範囲
変数        現在値      増加上限      減少下限
 x1       4.0000       0.7692     -infinity
 x2       5.0000     infinity       -0.5000
 x3       3.0000       0.3333       -1.1111
 x4       2.0000       6.0385     -infinity
```

図 6　目的関数 1 の単独解画面

それぞれの単独解で他の目的関数がどのような値になるのかを表すものがペイオフ表である。メニューの「ペイオフ表」ボタンをクリックすると図 7 のようなペイオフ表の画面が表示される。

ペイオフ表

	x1	x2	x3	x4	Z1	Z2	Z3
目的関数 1	0	5.385	6.923	0	47.692	24.615	36.923
目的関数 2	0	0	15	0	45	30	45
目的関数 3	10	0	0	0	40	20	10

図 7　ペイオフ表画面

例えばここで行名が目的関数 1 の行は目的関数 1 の単独解を使った 3 つの目的関数の値を表しており、逆に列名が Z1 の列は 3 つの目的関数の最適解を使った目的関数 1 の値を表している。

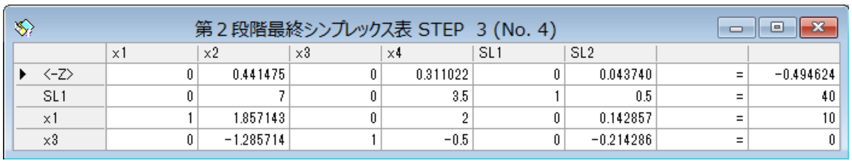
これらの単独解を使った最良化問題のデータは「最良化問題」ボタンをクリックして図 8 のように得られる。

最良化問題

x1	x2	x3	x4	定数項	
-0.050538	0.128495	0.170430	0.124731	1	MIN
1	5	3	4	<=	50
3	3	2	5	=	30
2	-4	6	1	>=	20

図 8　最良化問題画面

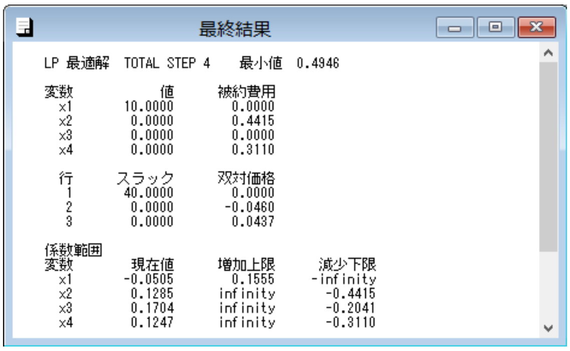
この最良化問題の解は、「最良化最終表」ボタンと「最良化妥協解」ボタンによって得られる。それらを図 9 と図 10 に示す。この最良化妥協解による各目的関数の充足率はメニューの「最良化充足率」ボタンで求めることができる。その例を図 11 に示す。



第２段階最終シンプレックス表 STEP 3 (No. 4)

	x1	x2	x3	x4	SL1	SL2		
<-Z>	0	0.441475	0	0.311022	0	0.043740	=	-0.494624
SL1	0	7	0	3.5	1	0.5	=	40
x1	1	1.857143	0	2	0	0.142857	=	10
x3	0	-1.285714	1	-0.5	0	-0.214286	=	0

図９　最良化問題最終シンプレックス表画面



最終結果

LP 最適解　TOTAL STEP 4　　最小値　0.4946

変数	値	被約費用
x1	10.0000	0.0000
x2	0.0000	0.4415
x3	0.0000	0.0000
x4	0.0000	0.3110

行	スラック	双対価格
1	40.0000	0.0000
2	0.0000	-0.0460
3	0.0000	0.0437

係数範囲

変数	現在値	増加上限	減少下限
x1	-0.0505	0.1555	-infinity
x2	0.1285	infinity	-0.4415
x3	0.1704	infinity	-0.2041
x4	0.1247	infinity	-0.3110

図 10　最良化妥協解画面

最良化充足率

	最大/最小	最適化値	妥協値	充足率
目的関数 1	最大化	47.692	40	0.839
目的関数 2	最大化	30	20	0.667
目的関数 3	最小化	10	10	1

図 11　最良化妥協解と充足率画面

問題

以下の多目的線形計画問題について問いに答えよ。

目的関数

$z_1 = 8x_1 + 20x_2 + 24x_3 + 48x_4$　　最大化

$z_2 = 5x_2 + 10x_3 + 6x_4$　　最大化

制約条件

$3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \le 150$

$10x_1 + 16x_3 \le 250$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 120$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

１）各目的関数についての最適値

	x_1	x_2	x_3	x_4	z
目的関数１					
目的関数２					

２）ペイオフ表を求めよ。

	x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2
目的関数１						
目的関数２						

３）各目的関数のウェイトを１にした最良化問題の目的関数を求めよ。

z ＝［　　　　　　　］x1＋［　　　　　　　］x2＋［　　　　　　　］x3

＋［　　　　　　　］x4＋［　　　　　　　］

４）制約条件は前と同じか。［同じ・違う］

５）上の目的関数の解（最良化妥協解）を求めよ。

x_1	x_2	x_3	x_4	z

６）最良化妥協解についての各目的関数の充足率を求めよ。

	最適化値	妥協値	充足率
目的関数１			
目的関数２			

演習

原料の供給量の範囲内で、利益、広告効果、安定供給性ができるだけ大きくなるように製品の生産量を求めたい。多目的線形計画法を用いて以下の問いに答えよ。

製品 / 原料	1	2	3	原料の供給量(kg)
A	1	3	2	１６０
B	2	4	5	２００
C	2	1	1	８０
製品単位当利益	4	6	8	
広告効果	7	3	2	
安定供給性	1	3	3	

１）この多目的線形計画問題の目的関数を max/min を付けて示せ。

目的関数１：z_1＝

目的関数２：z_2＝

目的関数３：z_3＝

２）制約条件を示せ。

３）各目的関数についての最適値を示せ。

	x_1	x_2	x_3	Z
目的関数１				
目的関数２				
目的関数３				

４）ペイオフ表を求めよ。

	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	z_3
目的関数１						
目的関数２						
目的関数３						

５）最良化問題の目的関数を求めよ。

z ＝［　　　　　　］x1＋［　　　　　　］x2＋［　　　　　　］x3

＋［　　　　　　］

６）目的関数は最大化か最小化か。［最大化・最小化］

制約条件は前と同じか。［同じ・違う］

７）上の目的関数の解（最良化妥協解）を求めよ。

x_1	x_2	x_3	z

８）最良化妥協解についての各目的関数の充足率を求めよ。

	最適化値	妥協値	充足率
目的関数１			
目的関数２			
目的関数３			

９）利益を重んじるため目的関数に５：１：１のウェイトを置きたい。最良化問題の目的関数はどんな形か、以下に示せ。

$$z = \quad \times\left(\frac{-(\qquad\qquad)}{\qquad}\right) + \quad \times\left(\frac{-(\qquad\qquad)}{\qquad}\right)$$

$$+ \quad \times\left(\frac{-(\qquad\qquad)}{\qquad}\right)$$

10）最良化問題の目的関数は最終的にどうなるか。パソコンによる答えを書け。

z ＝［　　　　　　］x1＋［　　　　　　］x2＋［　　　　　　］x3

＋［　　　　　　］

11）10）の目的関数の解（最良化妥協解）を求めよ。

x_1	x_2	x_3	z

12）10）の最良化妥協解についての各目的関数の充足率を求めよ。

	最適化値	妥協値	充足率
目的関数１			
目的関数２			
目的関数３			

問題解答

以下の多目的線形計画問題について問いに答えよ。

１）各目的関数についての最適値

	x_1	x_2	x_3	x_4	z
目的関数１	0	0	15.625	34.792	2045
目的関数２	0	10.268	15.625	27.946	375.268

２）ペイオフ表を求めよ。

	x_1	x_2	x_3	x_4	z_1	z_2
目的関数１	0	0	15.625	34.792	2045	365
目的関数２	0	10.268	15.625	27.946	1921.786	375.268

３）各目的関数のウェイトを１にした最良化問題の目的関数を求めよ。

z ＝［ -0.003912 ］x1＋［ -0.023104 ］x2＋［ -0.038384 ］x3
＋［ -0.039460 ］x4＋［ 2 ］

４）制約条件は前と同じか。［$\boxed{\text{同じ}}$・違う］

５）上の目的関数の解（最良化妥協解）を求めよ。

x_1	x_2	x_3	x_4	Z
0	0	15.625	34.792	0.027

６）最良化妥協解についての各目的関数の充足率を求めよ。

	最適化値	妥協値	充足率
目的関数１	2045	2045	1
目的関数２	375.268	365	0.973

演習解答

１）この多目的線形計画問題の目的関数を max/min を付けて示せ。

目的関数１：$z_1=4x_1+6x_2+8x_3$　max

目的関数２：$z_2=7x_1+3x_2+2x_3$　max

目的関数３：$z_3=x_1+3x_2+3x_3$　max

２）制約条件を示せ。

$x_1+3x_2+2x_3 \leqq 160$

$2x_1+4x_2+5x_3 \leqq 200$

$2x_1+x_2+x_3 \leqq 80$

$x_1,x_2,x_3 \geqq 0$

３）各目的関数についての最適値を示せ。

	x_1	x_2	x_3	Z
目的関数１	25	0	30	340
目的関数２	40	0	0	280
目的関数３	0	50	0	150

４）ペイオフ表を求めよ。

	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	z_3
目的関数１	25	0	30	340	235	115
目的関数２	40	0	0	160	280	40
目的関数３	0	50	0	300	150	150

５）最良化問題の目的関数を求めよ。

z ＝［ -0.043431 ］x1＋［ -0.048361 ］x2＋［ -0.050672 ］x3＋［ 3 ］

６）目的関数は最大化か最小化か。［最大化・$\boxed{\text{最小化}}$］

制約条件は前と同じか。［$\boxed{\text{同じ}}$・違う］

７）上の目的関数の解（最良化妥協解）を求めよ。

x_1	x_2	x_3	z
20	40	0	0.1969

８）最良化妥協解についての各目的関数の充足率を求めよ。

	最適化値	妥協値	充足率
目的関数１	340	320	0.941
目的関数２	280	260	0.929
目的関数３	150	140	0.933

９）利益を重んじるため目的関数に５：１：１のウェイトを置きたい。最良化問題の目的関数はどんな形か、以下に示せ。

$$z = 5 \times \left(\frac{340 - (4x_1 + 6x_2 + 8x_3)}{340} \right) + 1 \times \left(\frac{280 - (7x_1 + 3x_2 + 2x_3)}{280} \right)$$

$$+1 \times \left(\frac{150 - (x_1 + 3x_2 + 3x_3)}{150} \right)$$

10）最良化問題の目的関数は最終的にどうなるか。パソコンによる答えを書け。

z ＝［ -0.090490 ］x1＋［ -0.118950 ］x2＋［ -0.144790 ］x3＋［ 7 ］

11）10）の目的関数の解（最良化妥協解）を求めよ。

x_1	x_2	x_3	z
25	0	30	0.3940

12）10）の最良化妥協解についての各目的関数の充足率を求めよ。

	最適化値	妥協値	充足率
目的関数１	340	340	1
目的関数２	280	235	0.839
目的関数３	150	115	0.767

2.3　多目的線形計画法の理論

線形計画法は与えられた線形の制約条件のもとで、線形の目的関数を最大化（最小化）する問題を解決するための手法であり、一般に以下の形で書くことができる[5)]。

目的関数　　　$z={}^t\mathbf{c}\mathbf{x}$　最大化（最小化）

制約条件　　　$\mathbf{A}_1\mathbf{x} \le \mathbf{b}_1$，$\mathbf{A}_2\mathbf{x} \ge \mathbf{b}_2$，$\mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$，$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$

ここに、$\mathbf{x}(n \times 1)$ は各要素が非負に制限された変数行列であり、$\mathbf{c}(n \times 1)$，$\mathbf{b}_i(m_i \times 1) \ge \mathbf{0}$，$\mathbf{A}_i(m_i \times n)$ （$i = 1,2,3$）は係数行列である。

この問題は生産計画や輸送計画など様々な分野で利用されているが、現実には目的関数が唯一であるようなケースはむしろ珍しく、いくつかの目的関数をある程度最適化するような解を求めることが多い。このような問題に答えるのが多目的線形計画法である。多目的線形計画法では線形計画法の制約条件はそのままで、目的関数の数を２つ以上考える。ここではこの問題に対するグローバル評価法と呼ばれる解法を説明する[4)]。

今我々は以下の多目的線形計画問題を考える。

目的関数　　　$z^a={}^t\mathbf{c}^a\mathbf{x}$ （$a = 1,2,\cdots,p$）　最大化（最小化）

制約条件　　　$\mathbf{A}_1\mathbf{x} \le \mathbf{b}_1$，$\mathbf{A}_2\mathbf{x} \ge \mathbf{b}_2$，$\mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$，$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$

最初にまず目的関数 a の最適解を考えて、その解を用いた z^a の最適値を z^{a*} とする。目的関数 a について、ある解 $\mathbf{x}$ の充足率 r^a を以下のように定義する。

$$r^a = 1 - \left| (z^{a*} - {}^t\mathbf{c}^a \mathbf{x}) / z^{a*} \right|$$

ここで最適解の目的関数の値が 0 に近い場合、充足率が負になる場合があるので気を付ける。目的関数の値は目的関数に定数項を加えれば自由に変更できるが、これによって充足率の値も変わってくるのでこの方法にも問題がある。今後充足率の定義についても検討しなければならない。

我々は各目的関数の１－充足率の値の合計を新しい目的関数にして、上の制約条件で線形計画問題を考える。

目的関数　$z = \sum_{a=1}^{p} (1 - r^a)$　最小化

制約条件　$\mathbf{A}_1\mathbf{x} \le \mathbf{b}_1$，$\mathbf{A}_2\mathbf{x} \ge \mathbf{b}_2$，$\mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$，$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$

またこの目的関数にウェイト w^a （$a = 1,2,\cdots,p$）を付けてもよい。

目的関数　$z = \sum_{a=1}^{p} (1 - w^a r^a)$　最小化

制約条件　$\mathbf{A}_1\mathbf{x} \le \mathbf{b}_1$，$\mathbf{A}_2\mathbf{x} \ge \mathbf{b}_2$，$\mathbf{A}_3\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$，$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$

これらの線形計画問題を最良化問題と呼び、その最適解 $\mathbf{x}^*$ を最良化妥協解と呼ぶ。

３．ＤＥＡ

3.1　DEA とは

通常、事業体（企業など）の生産や経営の効率は「産出÷投入」の形で考えられる。しかし、産出や投入に何を用いるべきかはあいまいであるし、複数の項目を用いた場合でも、どの項目に重点を置くべきか疑問が残る。

DEA は各事業体の得意な項目に重点を置いて効率を計るように考えられた手法である。例として、店舗 A から I の効率性をモデル化して考えてみる。店舗の効率性の計算には投入の変数として従業員数と売場面積を、産出の変数としては売上を考える。これらが表 1（DEA1.txt）のように与えられているものとする。

表 1　店舗の効率性（投入：従業員数，売場面積　産出：売上）

店舗	A	B	C	D	E	F	G	H	I
従業員数	20	42	20	26	20	15	45	55	42
売場面積	300	360	50	260	800	120	600	500	350
売上	20	24	10	26	40	12	30	40	28

効率化を求めるとき、様々な方法が考えられるが、店舗によっては従業員数を減らして効率化を進めている場合や売場面積で工夫を進めている場合がある。これらの特徴を考慮した効率化測定法の 1 つが図 1 のような効率的フロンティアというものを利用した方法である。

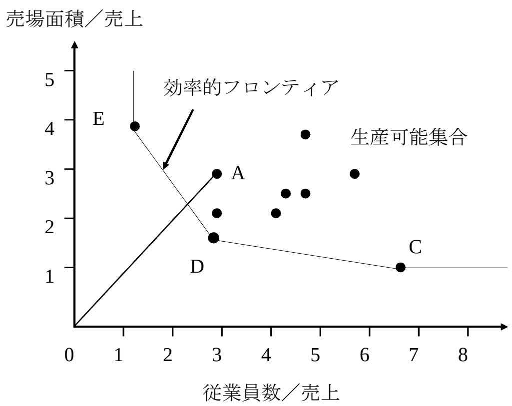


図 1　効率測定法

図 1 は、横軸を従業員数／売上、縦軸を売場面積／売上として、各店舗をその中にプロットしたものである。効率的な店舗は投入が小さく産出が大きい店舗であるので、原点に近い位置の店舗は他に比べてより効率的である。ここで、原点に近い店舗をいくつか選んで線分で結んでみると、その線分より原点側に店舗が存在しないように選ぶことができる。但し、一番端の店舗については、軸と平行な半直線を引く。これらの線分を効率的フロンティアと呼び、効率的な店舗の限界とする。各店舗の効率は原点と店舗を結ぶ直線を考え、原点と店舗を結ぶ線分が効率的フロンティアに交わるまでの距離を原点からその店舗までの距離で割ったものと定義する。これによって最大の効率は 1 になり、効率 1 の店舗は効率的フロンティア上に並ぶ。

図 1 の場合、効率的な（効率値 1 の）店舗は C, D, E であり、店舗 A の効率値を決める

店舗は D と E である。これらを店舗 A の優位集合と呼ぶ。

DEA は線形計画法を応用した効率測定法である。1 節で述べた問題について理論を考えてみる。まず、産出変数と投入変数の線形結合を考える。その係数をu及びv_1, v_2とする。その線形結合を用いて、産出÷投入を目的関数とした以下の分数計画問題を考える。添え字の o は observation を表し、効率を測定する事業体を表す。

分数計画問題

x_1 ＝従業員数，x_2 ＝売場面積，y ＝売上

目的関数　$r = \dfrac{uy_o}{v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o}}$　最大化

制約条件　$\dfrac{uy_j}{v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j}} \leq 1 \ (j = 1,2,\cdots,n)$

$u, v_1, v_2 \geq 0$

この目的関数の値rを事業体 o の効率と定義する。制約条件は他の事業体の効率が 1 以下になることを表している。この制約の元で目的関数を最大化する係数u及びv_1, v_2を求める。効率を最大にするように選ぶため、効率を上げるために重視される変数の部分にはそれに応じた係数が対応する。但し、効率 1 の場合には、解は 1 つとは限らない。

これは分数計画法であるが、これを線形計画法に書き換える。これには入力モデル及び出力モデルと呼ばれる 2 つの方法が考えられるが、例えば入力モデルでは以下のようにする。

線形計画問題

目的関数　$z = uy_o$　最大化

制約条件　$v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} = 1$

$uy_j - v_1 x_{1j} - v_2 x_{2j} \leq 0 \ (j = 1,2,\cdots,n)$

$u, v_1, v_2 \geq 0$

この手法を用いて表 1 の例の効率を求めた答が表 2 である。

表 2　表 1 の効率と解

	効率値	優位集合
A	0.857	D(0.549),E(0.143)
B	0.632	C(0.253),D(0.826)
C	1.000	C(1.000)
D	1.000	D(1.000)
E	1.000	E(1.000)
F	0.923	C(0.185),D(0.391)
G	0.600	D(0.923),E(0.150)
H	0.774	C(0.258),D(1.439)
I	0.750	C(0.350),D(0.942)

効率値は最適化された z の値で、優位集合の括弧の中の数字は優位集合への近さを表す値で

ある。大きな値ほど近いとみなされる。

DEA には効率値の測り方に関して、いくつかのモデルが考えられている。これまで述べて来た方法は CCR モデルと呼ばれる。ここでは簡単のため、1 入力、1 出力の場合の様々なモデルの効率的フロンティアで囲まれた、生産可能集合（網掛け部分）と呼ばれる領域を図 3 に示し、特徴をまとめておく。

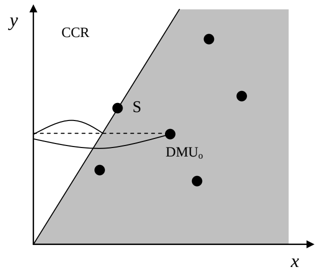


図 3a　CCR モデル

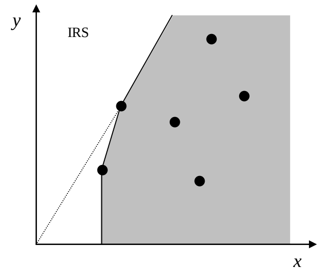


図 3b　IRS モデル

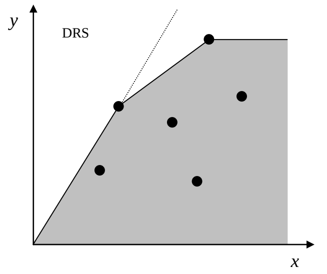


図 3c　DRS モデル

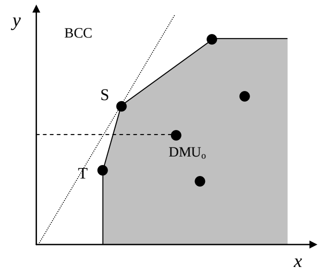


図 3d　BCC モデル

CCR モデル　規模の収穫一定を仮定したモデル
（入出力が同比率で拡大すると効率は同じ）

IRS モデル　規模の収穫増加を仮定したモデル
（入出力が同比率で拡大すると効率は下がる）

DRS モデル　規模の収穫減少を仮定したモデル
（入出力が同比率で拡大すると効率は上がる）

BCC モデル　規模の小さいときは IRS、大きいときは DRS

入力モデルと同様に出力モデルも考えられ、CCRO のように後ろに O（オー）を付けて表される。これは、制約条件で出力側を 1 に固定したモデルである。

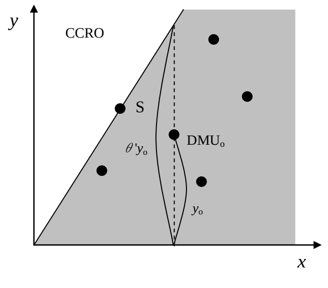


図 4　CCRO モデル

出力モデルは図 4 のように効率を縦に測定する。入力モデルと出力モデルの効率は同じである。

3.2　プログラムの利用法

実際のプログラム実行画面は図 1 に示される。

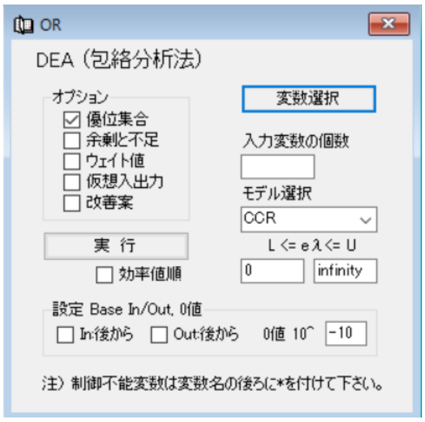
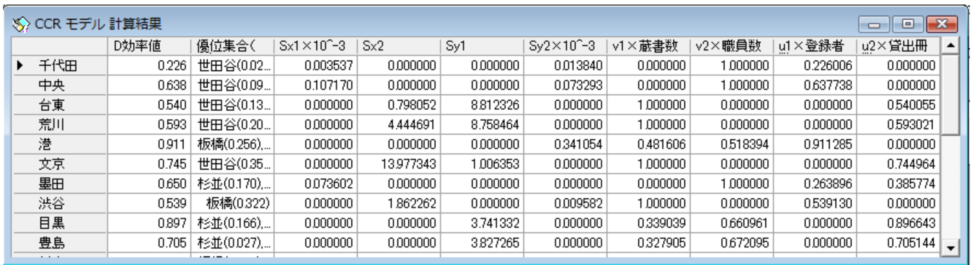


図 1　DEA 実行画面

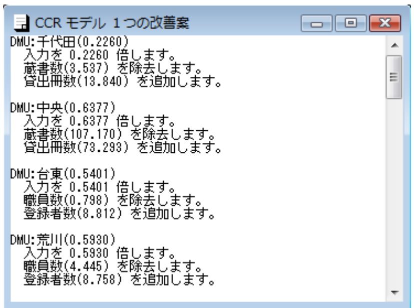
利用されるデータは、通常の統計分析のデータと同じ、フィールドとレコードによって表される形式のものである。「変数選択」により、どの変数を使用するかを指定し、入力変数の個数を入力する。但し、変数選択の順番は、入力変数を先に、出力変数を後に選ばなければならない。出力変数の個数は、全部の変数の数から入力変数の数を引いたものとして認識される。ここでは DEA3.txt を用いて説明する。

モデルとしては、CCR, BCC, IRS, DRS, GRS モデルとそれぞれの出力モデル CCRO, BCCO, IRSO, DRSO, GRSO モデルが用意されている。「実行」ボタンをクリックすると分析結果が表示されるが、表示のオプションとして、優位集合の表示、余剰と不足（スラック変数の値）、ウェイト値（**v**, **u** の値）、仮想入出力（その解で、どの変数を評価したかを表す指標）、改善案がある。図 2 にウェイト値を除く変数を指定した場合の出力結果の例を示す。改善案については別のテキスト画面に 1 つの提言が示される。図 3 にその例を示す。


CCR モデル 計算結果

	D効率値	優位集合(	Sx1×10^-3	Sx2	Sy1	Sy2×10^-3	v1×蔵書数	v2×職員数	u1×登録者	u2×貸出冊
千代田	0.226	世田谷(0.02…	0.003537	0.000000	0.000000	0.013840	0.000000	1.000000	0.226006	0.000000
中央	0.638	世田谷(0.09…	0.107170	0.000000	0.000000	0.073293	0.000000	1.000000	0.637738	0.000000
台東	0.540	世田谷(0.13…	0.000000	0.798052	8.812326	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.540055
荒川	0.593	世田谷(0.20…	0.000000	4.444691	8.758464	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.593021
港	0.911	板橋(0.256),…	0.000000	0.000000	0.000000	0.341054	0.481606	0.518394	0.911285	0.000000
文京	0.745	世田谷(0.35…	0.000000	13.977343	1.006353	0.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.744964
墨田	0.650	杉並(0.170),…	0.073602	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000	0.263896	0.385774
渋谷	0.539	板橋(0.322)	0.000000	1.862262	0.000000	0.009582	1.000000	0.000000	0.539130	0.000000
目黒	0.897	杉並(0.166),…	0.000000	0.000000	3.741332	0.000000	0.339039	0.660961	0.000000	0.896643
豊島	0.705	杉並(0.027),…	0.000000	0.000000	3.827265	0.000000	0.327905	0.672095	0.000000	0.705144

図 2　結果表示


CCR モデル 1つの改善案

DMU:千代田(0.2260)
　入力を 0.2260 倍します。
　蔵書数(3.537) を除去します。
　貸出冊数(13.840) を追加します。

DMU:中央(0.6377)
　入力を 0.6377 倍します。
　蔵書数(107.170) を除去します。
　貸出冊数(73.293) を追加します。

DMU:台東(0.5401)
　入力を 0.5401 倍します。
　職員数(0.798) を除去します。
　登録者数(8.812) を追加します。

DMU:荒川(0.5930)
　入力を 0.5930 倍します。
　職員数(4.445) を除去します。
　登録者数(8.758) を追加します。

図 3　改善案の提示

我々は、計算誤差が問題になり、解が得られなくなる場合を想定して、新たに「設定」のグループボックスを設けた。シンプレックス法では同じ数値の係数値やレコード選択値の場合、次の変数またはレコードの選択に自由度があるが、我々はデフォルトとして前から順番に選んでいる。この順番を後ろからに変更するのが、「In:後から」と「Out:後から」のチェックボックスである。また、ある係数値が 0 かどうかは、計算誤差のため明確には分からない。そこで実際の計算では 0 値にある幅を持たせて判定する。この幅が「0 値」の数値である。通常は「10^-10」が設定されているが、これを小さくすると解が求めにくくなるし、大きくすると解が最適ではなくなる可能性がある。解が求まり、その解が正しい値となるよう設定には十分注意する必要がある。

問題 1

DEA2.txt はあるグループの店舗についてのデータである。入力を従業員数と売場面積、出力を売上と会員数として（CCR モデル）で各店舗の効率性を調べ、それらの効率値とその優位集合（数値も含めて）を求めよ。

店舗	A	B	C	D	E	F	G	H
従業員数	20	42	20	26	20	15	45	55
売場面積	300	360	50	260	800	120	600	500
売上	20	24	10	26	40	12	30	40
会員数	522	734	340	433	525	350	826	913

解答

	効率値	優位集合
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		

問題２

DEA3.txt は東京都各区の図書館のデータである。このデータを用いて、入力を蔵書数（千冊）と職員数（人）、出力を登録者数（人）と貸出冊数（千冊）として各図書館の効率をDEA を用いて検討し、いくつかの図書館について効率値と有意集合を答えよ。

	効率値	優位集合
千代田		
中央		
台東		
荒川		
港		
文京		
墨田		
渋谷		

問題３

DEA2.txt はあるグループの店舗についてのデータである。入力を従業員数と売場面積、出力を売上と会員数として CCR, IRS, DRS, BCC の各モデルで各店舗の効率性を調べ、それらの効率値を求めよ。

店舗	A	B	C	D	E	F	G	H
従業員数	20	42	20	26	20	15	45	55
売場面積	300	360	50	260	800	120	600	500
売上	20	24	10	26	40	12	30	40
会員数	522	734	340	433	525	350	826	913

解答

効率値	CCR	IRS	DRS	BCC
A				
B				
C				
D				
E				
F				
G				
H				

問題４

DEA3.txt は東京都各区の図書館のデータである。このデータを用いて、入力を蔵書数（千冊）と職員数（人）、出力を登録者数（人）と貸出冊数（千冊）として各図書館の効率をDEA を用いて検討し、以下の問いに答えよ。

１）CCR モデルを用いて港区、文京区の効率値とそれらの優位集合を求めよ。

	効率値	優位集合
港区		
文京区		

２）BCC モデルを用いて港区、文京区の効率値とそれらの優位集合を求めよ。

	効率値	優位集合
港区		
文京区		

３）入力と出力を同じ比率で大きくすると以下のモデルで効率はどうなるか。

CCR	一定・上がる・下がる・どちらともいえない
IRS	一定・上がる・下がる・どちらともいえない
DRS	一定・上がる・下がる・どちらともいえない
BCC	一定・上がる・下がる・どちらともいえない

４）BCC モデルは規模が小さいとき［IRS・DRS］モデルに似て、規模が大きくなると［IRS・DRS］モデルに似てくる。

<u>以後は CCR モデルを用いて質問に答えよ。</u>

５）千代田区で余分な入力は［蔵書数・職員数］で、不足している出力は［登録者数・貸出冊数］である。

６）千代田区の入力では［蔵書数・職員数］が主に評価され、出力では［登録者数・貸出冊数］が主に評価されている。

７）千代田区を効率的にする案として、まず入力を［　　　　　］倍にする。その後、蔵書数を［　　　　　］千冊減らし、貸出冊数を［　　　　　］千冊増やす。

８）この案を実行すると、蔵書数は［　　　　　］千冊、貸出冊数は［　　　　　］千冊となる。

<u>以後は CCRO モデルを用いて質問に答えよ。</u>

９）CCR モデルと比べて効率に差があるか。［ある・ない］

10）千代田区を効率的にする案として、まず出力を［　　　　　］倍にする。その後蔵書数を［　　　　　］千冊減らし、貸し出し冊数を［　　　　　］千冊増やす。

問題１解答

	効率値	優位集合
A	1.000	A(1.000)
B	0.742	A(0.127), F(1.907)
C	1.000	C(1.000)
D	1.000	D(1.000)
E	0.933	A(1.400)
F	1.000	F(1.000)
G	0.721	A(1.237), F(0.515)
H	0.813	A(0.063), D(0.768), F(1.565)

問題２解答

	効率値	優位集合
千代田	0.226	世田谷(0.029)
中央	0.638	世田谷(0.095)
台東	0.540	世田谷(0.132)
荒川	0.593	世田谷(0.207)
港	0.911	板橋(0.256)，世田谷(0.162)
文京	0.745	世田谷(0.351)
墨田	0.650	杉並(0.170)，世田谷(0.162)
渋谷	0.539	板橋(0.322)

問題３解答

効率値	CCR	IRS	DRS	BCC
A	1.000	1.000	1.000	1.000
B	0.742	0.742	1.000	1.000
C	1.000	1.000	1.000	1.000
D	1.000	1.000	1.000	1.000
E	0.933	0.933	1.000	1.000
F	1.000	1.000	1.000	1.000
G	0.721	0.721	1.000	1.000
H	0.813	0.813	1.000	1.000

問題４

DEA3.txt は東京都各区の図書館のデータである。このデータを用いて、入力を蔵書数（千冊）と職員数（人）、出力を登録者数（人）と貸出冊数（千冊）として各図書館の効率をDEA を用いて検討し、以下の問いに答えよ。

１）CCR モデルを用いて港区、文京区の効率値とそれらの優位集合を求めよ。

	効率値	優位集合
港区	0.911	板橋，世田谷
文京区	0.745	世田谷

２）BCC モデルを用いて港区、文京区の効率値とそれらの優位集合を求めよ。

	効率値	優位集合
港区	1.000	港
文京区	0.885	江東，世田谷

３）入力と出力を同じ比率で大きくすると以下のモデルで効率はどうなるか。

CCR	$\boxed{\text{一定}}$・上がる・下がる・どちらともいえない
IRS	一定・上がる・$\boxed{\text{下がる}}$・どちらともいえない
DRS	一定・$\boxed{\text{上がる}}$・下がる・どちらともいえない
BCC	一定・上がる・下がる・$\boxed{\text{どちらともいえない}}$

４）BCC モデルは規模が小さいとき［$\boxed{\text{IRS}}$・DRS］モデルに似て、規模が大きくなると［IRS・$\boxed{\text{DRS}}$］モデルに似てくる。

以後は CCR モデルを用いて質問に答えよ。

５）千代田区で余分な入力は［$\boxed{\text{蔵書数}}$・職員数］で、不足している出力は［登録者数・$\boxed{\text{貸出冊数}}$］である。

６）千代田区の入力では［蔵書数・$\boxed{\text{職員数}}$］が主に評価され、出力では［$\boxed{\text{登録者数}}$・貸出冊数］が主に評価されている。

７）千代田区を効率的にする案として、まず入力を［ 0.2260 ］倍にする。その後、蔵書数を［ 3.537 ］千冊減らし、貸出冊数を［ 13.840 ］千冊増やす。

８）この案を実行すると、蔵書数は［ 33.4192 ］千冊、貸出冊数は［ 119.161 ］千冊となる。

以後は CCRO モデルを用いて質問に答えよ。

９）CCR モデルと比べて効率に差があるか。［ある・$\boxed{\text{ない}}$］

10）千代田区を効率的にする案として、まず出力を［ 4.425 ］倍にする。その後蔵書数を［ 15.650 ］千冊減らし、貸し出し冊数を［ 61.237 ］千冊増やす。

3.3　DEA の理論

DEA（Data Envelopment Analysis）は事業体に関して、得意な分野を評価するという姿勢で、その効率性を求める手法である。ここでは効率性を検討する各事業体を DMU（Decision Making Unit）と呼び、効率は r 個の入力変数の線形結合と s 個の出力変数の線形結合の比として表わされる。今、DMU の全数を n として、DMU$_i$（i 番目の DMU）の入力と出力をそれぞれ、

$$ {}^t\mathbf{x}_i = (x_{i1} \quad x_{i2} \quad \cdots \quad x_{ir}),\ {}^t\mathbf{y}_i = (y_{i1} \quad y_{i2} \quad \cdots \quad y_{is}), $$

入力と出力に掛かるパラメータをそれぞれ、

$$ {}^t\mathbf{v} = (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_r),\ {}^t\mathbf{u} = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_s), $$

として、その効率を $\theta_i = {}^t\mathbf{u}\mathbf{y}_i / {}^t\mathbf{v}\mathbf{x}_i$ で与える。但し、効率性を計算している DMU を o として、$0 \le \theta_i \le 1$ の範囲で θ_o を最大化するようにパラメータ $\mathbf{v}$，$\mathbf{u}$ を決定する。それ故、効率性を計算する DMU 毎にパラメータの値も変わってくる。このパラメータの決定方法が、最初に述べた得意な分野を評価する姿勢を表わしている。さて、ここまで述べたことを分数計画問題として以下のようにまとめておく。

分数計画問題

目的関数　$z = {}^t\mathbf{u}\mathbf{y}_o / {}^t\mathbf{v}\mathbf{x}_o$　最大化

制約式　${}^t\mathbf{u}\mathbf{y}_i / {}^t\mathbf{v}\mathbf{x}_i \le 1 \quad (i = 1, \cdots, n)$，$\mathbf{u} \ge \mathbf{0}$，$\mathbf{v} \ge \mathbf{0}$

この分数計画問題は、以下の線形計画問題として考えることができる。

線形計画問題（主問題）

目的関数　$z={}^t\mathbf{u}\mathbf{y}_o$　最大化

制約式　${}^t\mathbf{v}\mathbf{x}_o=1$，$-{}^t\mathbf{v}\mathbf{X}+{}^t\mathbf{u}\mathbf{Y}\le\mathbf{0}$，$\mathbf{u}\ge\mathbf{0}$，$\mathbf{v}\ge\mathbf{0}$

但し、$\mathbf{X}=(\mathbf{x}_1\quad\mathbf{x}_2\quad\cdots\quad\mathbf{x}_n)$，$\mathbf{Y}=(\mathbf{y}_1\quad\mathbf{y}_2\quad\cdots\quad\mathbf{y}_n)$ である。

この線形計画問題は通常以下の双対問題から解が求められる。

線形計画問題（双対問題）

目的関数　$z'=\theta$　最小化

制約式　$\theta\mathbf{x}_o-\mathbf{X}\boldsymbol{\lambda}\ge\mathbf{0}$，$-\mathbf{y}_o+\mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda}\ge\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\lambda}\ge\mathbf{0}$

ここに、双対問題の変数を、θ と ${}^t\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1\quad\lambda_2\quad\cdots\quad\lambda_n)$ で与えた。ところでこの双対問題において、$\theta=1$，$\lambda_o=1$，$\lambda_i=0$（$i\ne o$）は制約式を満たすので解は必ず存在することが分り、このことから必ず $\theta\le1$ となる。

さて、以下のような集合 P を考える。

$$P=\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\,|\,\mathbf{x}-\mathbf{X}\boldsymbol{\lambda}\ge\mathbf{0},-\mathbf{y}+\mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda}\ge\mathbf{0},\boldsymbol{\lambda}\ge\mathbf{0}\}$$

今、効率を測定する DMU の入力と出力 $\mathbf{x}_o$，$\mathbf{y}_o$ について、$(\theta\mathbf{x}_o,\mathbf{y}_o)\in P$ であれば、双対問題の制約式を満たすことが分かる。$\mathbf{x}_o$ を $\theta\mathbf{x}_o$ として、集合 P の境界まで縮めたときの倍率 θ^* が最小の目的関数値となっている。この集合を生産可能集合と呼ぶ。

θ を最小化する最適解でも余剰の自由度は残る。そこで余剰 $\mathbf{s}_x=\theta^*\mathbf{x}_o-\mathbf{X}\boldsymbol{\lambda}$ 及び、$\mathbf{s}_y=-\mathbf{y}_o+\mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda}$ の成分の合計が最大となるように再度線形計画問題を解く。

線形計画問題（余剰の最大化）

目的関数　$w={}^t\mathbf{e}_x\mathbf{s}_x+{}^t\mathbf{e}_y\mathbf{s}_y$　最大化

制約式　$\mathbf{s}_x=\theta^*\mathbf{x}_o-\mathbf{X}\boldsymbol{\lambda}$，$\mathbf{s}_y=-\mathbf{y}_o+\mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{\lambda}\ge\mathbf{0}$，$\mathbf{s}_x\ge\mathbf{0}$，$\mathbf{s}_y\ge\mathbf{0}$

ここに、${}^t\mathbf{e}_x=(1\quad1\quad\cdots\quad1)$［$r$ 成分］, ${}^t\mathbf{e}_y=(1\quad1\quad\cdots\quad1)$［$s$ 成分］である。この解 $\boldsymbol{\lambda}^*,\mathbf{s}_x^*,\mathbf{s}_y^*$ を最大スラック解と呼ぶ。$\theta^*=1$，$\mathbf{s}_x^*=\mathbf{0}$，$\mathbf{s}_y^*=\mathbf{0}$ のとき、観測している DMUo を効率的であるといい、これ以外のとき非効率的であるという。

DMUo の改善点を求めるために、入力の過剰量と出力の不足量 $\Delta\mathbf{x}$，$\Delta\mathbf{y}$ を求める。

$$\Delta\mathbf{x}=\mathbf{x}_o-\mathbf{X}\boldsymbol{\lambda}^*=(1-\theta^*)\mathbf{x}_o+\mathbf{s}_x^*$$

$$\Delta\mathbf{y}=-\mathbf{y}_o+\mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda}^*=\mathbf{s}_y^*$$

これによって効率性改善の示唆を得ることができる。

対象となる DMU の特徴と改善点を考える際に、似た DMU で自分より優れたものを知ることは意味がある。DMUo が非効率的であるとき、以下の E_o を DMUo に対する優位集合という。

$$E_o=\{j\,|\,\lambda_j^*>0,\ j=1,\cdots,n\}$$

優位集合に属する活動は効率的であることが知られている。

生産可能集合を直感的に理解するために 1 入力、1 出力の場合を図で表わしてみる。この場合、生産可能集合は以下となる。

$$P = \{(x, y) \mid x \geq x_1\lambda_1 + \cdots + x_n\lambda_n,\ y \leq y_1\lambda_1 + \cdots + y_n\lambda_n,\ \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}\}$$

この範囲を図で表わすと、図 1 の網掛けの部分になる。また、DMU_o の効率 θ^* は図 1 に示した x 座標の値を用いて、$\theta^* = x'/x$ で与えられる。

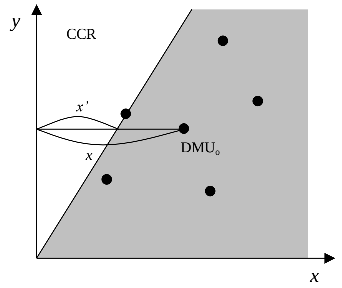


図 1　CCR モデルの生産可能集合

様々な基本的なモデルはこの生産可能集合に以下の条件を付けて得られる。

$L \leq {}^t\mathbf{e}\boldsymbol{\lambda} \leq U$　　（$0 \leq L \leq 1, U \geq 1$）

CCR モデル（$L = 0, U = \infty$）

元々の生産可能集合による効率決定モデルを CCR モデルと呼ぶ。これは生産規模によって効率に優劣が生じない、規模の収穫が一定のモデルである。

BCC モデル（$L = 1, U = 1$）

生産可能集合に ${}^t\mathbf{e}\boldsymbol{\lambda} = 1$ の条件を付けたものが BCC モデルである。この生産可能集合は図 2 で表わされる。

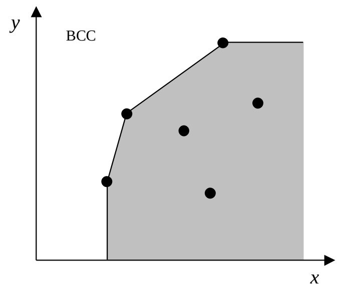


図 2　BCC モデルの生産可能集合

IRS モデル（$L = 1, U = \infty$）

生産可能集合に ${}^t\mathbf{e}\boldsymbol{\lambda} \geq 1$ の条件を付けたものが IRS（Increasing Returns to Scale）モデルで、規模の収穫が増加することを想定したモデルである。この生産可能集合は図 3 で表わされる。

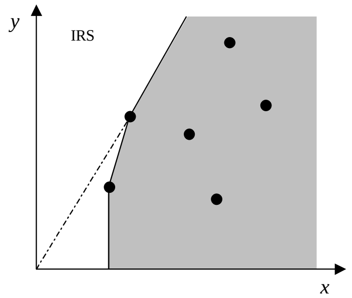


図 3　IRS モデルの生産可能集合

DRS モデル（$L=0, U=1$）

生産可能集合に$^t\mathbf{e}\boldsymbol{\lambda}\le 1$の条件を付けたものが DRS（Decreasing Returns to Scale）モデルで、規模の収穫が減少することを想定したモデルである。この生産可能集合は図 4 で表わされる。

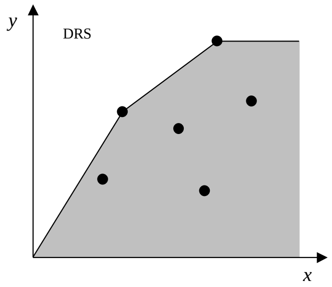


図 4　DRS モデルの生産可能集合

GRS モデル（$0\le L\le 1, U\ge 1$）

下限と上限に上記の範囲で任意の値を取ったものを GRS（General Returns to Scale）モデルという。これは一般的なモデルで、利用者がLとUの値を与える。

モデル毎に、効率の測り方として、図 5 のようにy軸を用いた方法も考えられる。これは出力型モデルと呼ばれ、それぞれのモデル名の後に O という文字を付け、例えば CCRO モデルのように表わす。

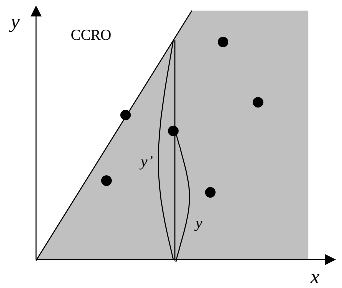


図 5　CCRO モデルの生産可能集合

CCRO モデルの場合、線形計画問題は以下のように与えられる。

線形計画問題（主問題）

目的関数　$z={}^t\mathbf{v}\mathbf{x}_o$　最小化

制約式　$^t\mathbf{u}\mathbf{y}_o=1$，$-{}^t\mathbf{v}\mathbf{X}+{}^t\mathbf{u}\mathbf{Y}\le\mathbf{0}$，$\mathbf{u}\ge\mathbf{0}$，$\mathbf{v}\ge\mathbf{0}$

線形計画問題（双対問題）

目的関数　$z'=\eta$　最大化

制約式　$\mathbf{x}_o-\mathbf{X}\boldsymbol{\lambda}\ge\mathbf{0}$，$-\eta\mathbf{y}_o+\mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda}\ge\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\lambda}\ge\mathbf{0}$

出力型モデルの効率は$1/\eta$で与えられる。特に CCRO モデルの場合に限り、効率は CCR モデルと一致する。他のモデルでは双対問題に$\boldsymbol{\lambda}$についての制約が付く。

DEA の解釈と制御不能変数

新しく制御不能変数を導入した場合の DEA についてプログラムを作成したので、理論的

な背景を再度説明しておく。

制御不能変数を含まないモデル

　刀根先生のDEAの教科書ではなかなか分かりづらいところを２入力１出力の問題で考えてみる。

CCRモデルでは、問題は以下の通りである。

目的関数

$$z=\frac{u_1 y_{o1}}{v_1 x_{o1}+v_2 x_{o2}} \qquad \text{最大化}$$

制約条件

$$\frac{u_1 y_{i1}}{v_1 x_{i1}+v_2 x_{i2}} \le 1$$

$$u_1, v_1, v_2 \ge 0$$

これに $v_1 x_{o1}+v_2 x_{o2}=1$ の条件を付けて（入力モデル）、以下の線形計画問題に書き換える。

目的関数

$$z=u_1 y_{o1} \qquad \text{最大化}$$

制約条件

$$v_1 x_{o1}+v_2 x_{o2}=1$$

$$-v_1 x_{i1}-v_2 x_{i2}+u_1 y_{i1} \le 0 \quad (i=1,\cdots,n)$$

$$u_1, v_1, v_2 \ge 0$$

これを線形計画問題の主問題として、双対問題を作成する。

目的関数

$$z'=\theta \qquad \text{最小化}$$

制約条件

$$\theta x_{oj}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_{kj} \ge 0$$

$$-y_{01}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_{k1} \ge 0, \qquad \lambda_j \ge 0$$

　刀根の図に合わせるために、この問題の制約条件の上から２つを以下のように書き換える。

目的関数

$$z'=\theta \qquad \text{最小化}$$

制約条件

$$\theta x_{oj}/y_{o1}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \left(y_{k1}/y_{o1}\right)\left(x_{kj}/y_{k1}\right) \ge 0$$

$$-1+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \left(y_{k1}/y_{o1}\right) \ge 0, \qquad \lambda_j \ge 0$$

新しく $\lambda'_k \equiv \lambda_k \left(y_{k1}/y_{o1}\right)$ ，$x'_{kj} \equiv x_{kj}/y_{k1}$ とおくと、上の式は以下のようになる。

目的関数

$$z' = \theta \qquad \text{最小化}$$

制約条件

$$\theta x'_{oj} - \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k \, x'_{kj} \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda'_k \geq 1, \qquad \lambda'_j \geq 0$$

この式から、CCR モデルでは図 6 のような効率的フロンティアが示される。

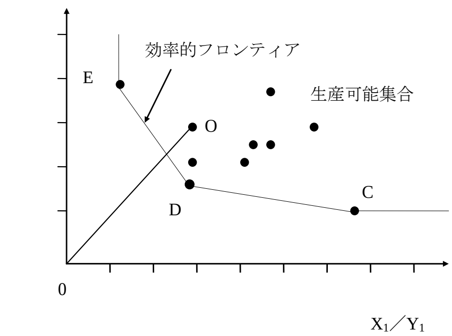


図 6　制御不能変数を含まない CCR モデル

では、BCC モデルではどうなのだろうか。BCC モデルの線形計画問題は以下のようになる。

目的関数

$$z' = \theta \qquad \text{最小化}$$

制約条件

$$\theta x_{oj} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{kj} \geq 0$$

$$-y_{01} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_{k1} \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, \qquad \lambda_j \geq 0$$

これに先ほどの変換を行うと以下のようになる。

目的関数

$$z' = \theta \qquad \text{最小化}$$

制約条件

$$\theta x'_{oj} - \sum_{k=0}^{n} \lambda'_k \, x'_{kj} \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda'_k \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda'_k \left(y_{o1} / y_{k1} \right) = 1, \qquad \lambda'_j \geq 0$$

３番目の条件 $\sum_{k=1}^{n}\lambda'_k\left(y_{o1}/y_{k1}\right)=1$ から、効率的フロンティアは、単純に要素を結んだものではなくなり、要素ごとに異なったものになる。

制御不能変数を含むモデル

2 変数のうち 1 変数（変数 2）が制御不能変数であった場合、問題は以下のようになる。
目的関数

$$z'=\theta \qquad \text{最小化}$$

制約条件

$$\theta x_{o1}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_{k1}\geq 0$$

$$x_{o2}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_{k2}=0$$

$$-y_{01}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_{k1}\geq 0, \qquad \lambda_j\geq 0$$

さらに、先ほどの変換を用いると、問題は以下のように変換される。

$$z'=\theta \qquad \text{最小化}$$

制約条件

$$\theta x'_{o1}-\sum_{k=1}^{n}\lambda'_k x'_{k1}\geq 0$$

$$x'_{o2}-\sum_{k=1}^{n}\lambda'_k x'_{k2}=0$$

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda'_k\geq 1, \qquad \lambda'_j\geq 0$$

2 番目の制約条件から、この最小化問題は生産可能集合中、$x'_2=x'_{2o}$ の平面の中の問題になる。以上より、効率の測定は図 7 のようになる。

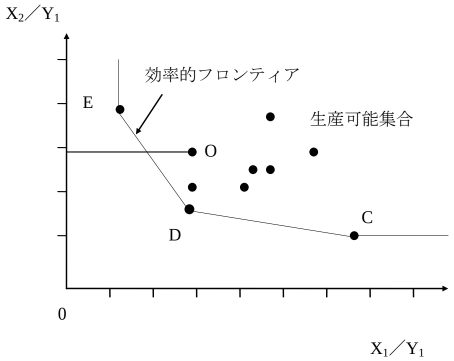
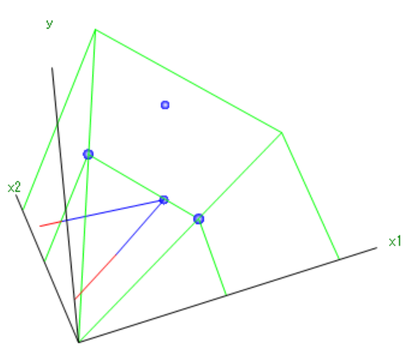


図 7 制御不能変数を含む CCR モデル

BCC モデルは、先ほどと同じく、効率的フロンティアが描けないため、この図で表現することは難しい。

CCR モデルと BCC モデルの３次元表現

最後に CCR モデルと BCC モデルについて、制御不能変数を含まない場合と含む場合の３次元グラフを考えてみる。図８と図９は、それぞれ College Analysis の３Ｄモデルビューアで作った CCR モデルと BCC モデルである。一番上の要素が効率的かどうかが大きな違いである。



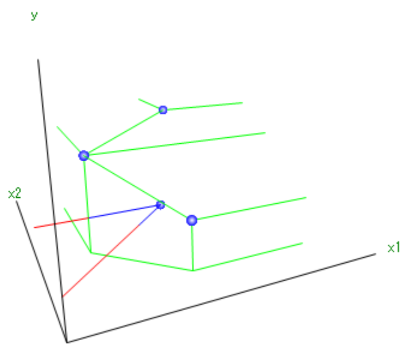


図８　CCR モデル　　図９　BCC モデル

測定している要素から伸びた線が効率を測る線で、全体の長さと赤い部分の比で測定する。

４．待ち行列シミュレータ

4.1　待ち行列とは

待ち行列とは、JR の緑の窓口やキャッシュディスペンサーの前の行列や、込み合ったネットのアクセス待ちなど、サービスを受けるためのすべての待ち状態をいう。発端は、電話が普及し始めた時代の電話交換機の混雑を表す数学モデルが A.E.Erlang によって作られたことによる。我々は待ち行列モデルを直観的に図 1 のモデルによって表す。

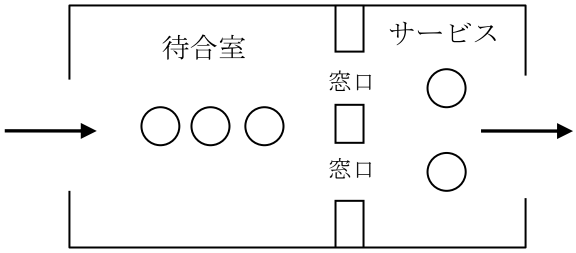


図 1　待ち行列の概念図

待ち行列のシステムには、窓口とそれに対応するサービス、及び待合室が存在する。待合室には容量（人数）制限がある場合とない場合があり、窓口には 1 列に並んで空いたところへ進む方法と複数列で並ぶ方法とがある。図 1 で待合室にいる人数を待ち数、サービスまで含めてシステム内にいる人数を滞在数という。

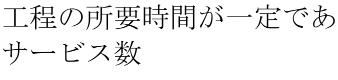
待ち行列のシミュレーションに必要なデータとしては、上で述べたデータの他に、単位時間当たりの客の到着数の分布とサービス数の分布である。例えば全くランダムに到着し、サービスが終わる場合は平均到着数 λ 及び平均サービス数 μ のポアソン分布と言われる。同じ状況で、到着時間間隔、サービス時間に注目すると、平均到着時間間隔 $1/\lambda$、平均サービス時間 $1/\mu$ の指数分布と表現される。主に到着に関しては、前者の表現が使われ、サービスに関しては後者の表現が使われることが多い。

待ち行列で求めたい主な結果としては、客の平均待ち時間、待ち行列の平均的な長さ、窓口の稼働率、ある一定時間以上待つ確率等があげられる。

4.2　サービス時間の分布

ここではサービスの形態に応じてよく使われるサービス時間の分布についてまとめておく。到着時間についても同じ記号で表す。

1）確定分布



工程の所要時間が一定である

サービス数	μ	（単位時間当りのサービス件数）
サービス時間	$1/\mu$	

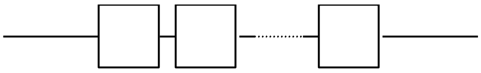
2）指数分布（到着人数に着目するとポアッソン分布）

平均サービス数　μ　（単位時間当りの平均サービス件数）

平均サービス時間　$1/\mu$

密度関数　$f(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad t \geq 0$

3）n 次のアーラン分布



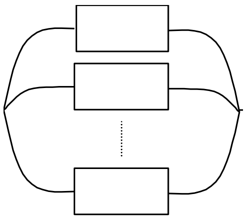
１工程の平均サービス数　$n\mu$

１工程の平均サービス時間　$1/n\mu$

全体の平均サービス時間　$1/\mu$　（次数が高いほどゆらぎは小さい）

密度関数　$f(t) = (n\mu)^n t^{n-1} e^{-n\mu t} / (n-1)! \qquad t \geq 0$

4）n 次の超指数分布



１工程の平均サービス数　μ_i

１工程の平均サービス時間　$1/\mu_i$

工程を選ぶ確率　r_i

全体の平均サービス時間　$\sum_{i=1}^{n} r_i / \mu_i$

密度関数　$f(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i \mu_i e^{-\mu_i t} \qquad t \geq 0$

我々のプログラムにはアーラン分布まで取り入れている。

4.3　ケンドール（Kendall）の記号

待ち行列を特徴付け、表現するために、ケンドールの記号と呼ばれる表記法がよく利用される。これは以下の書式に従う。

A/B/s [(r)]

それぞれの文字または数字の意味は以下の通りである。

A, B：　到着とサービス時間間隔の分布を表す文字

D：確定分布　M：指数分布（ポアソン分布）　E_k：k 次アーラン分布

H：超指数分布　G：一般の分布

s：　サービス窓口数を表す数字

r：　　待合室に入れる人数（待ち行列の長さの制限）を表す数字
　　$r = \infty$（長さに制限がない）の場合、省略できる。

例としては以下のような表示となる。

M/M/1　　指数到着、指数サービス、窓口１つ（行列に制限なし）
D/M/2 (5)　確定到着、指数サービス、窓口２つ、行列５人まで

4.4　M/M/1 待ち行列

最も基本的な M/M/1 の待ち行列の定常状態について、理論的に求められた公式を列挙しておく。ここで定常的とは、待ち行列の初期状態から時間が経過して、平均的な行列の長さや待ち時間などが一定になった状態をいう。もちろん定常的にならない場合もある。平均到着数と平均サービス数については、以下のように仮定しておく。

平均到着数　　λ　　（平均到着時間間隔　$1/\lambda$）
平均サービス数　　μ　　（平均サービス時間　$1/\mu$）

主な理論値は、$\rho = \lambda/\mu$ とすると以下のようになる。

滞在数が n である確率	$P_n = \rho^n (1-\rho)$
待ち数平均	$L_q = \rho^2 / (1-\rho)$
待ち時間平均	$W_q = L_q / \lambda$
滞在数平均	$L = \rho / (1-\rho)$
滞在時間平均	$W = L/\lambda$
滞在数分散	$\sigma_L^2 = \rho / (1-\rho)^2$
窓口空き確率	$P_e = P_0 = 1-\rho$
窓口稼動率	$P_f = \sum_{i=1}^{\infty} P_i = \rho$

サービスまで t より長く待つ確率　　$P(t) = \rho e^{-(1-\rho)\mu t}$

これら以外の待ち行列についての理論はあるが、8 節で詳述する。

ここでは定常的でない待ち行列の理論については触れず、プログラムの利用法を学んだ後に、シミュレーションによって調べることとする。

問題　上の理論から Excel を用いて以下の問いに答えよ。

1 時間に平均 3 人到着し、4 人サービスが終了するシステムがある。M/M/1（∞）を仮定して以下の値を上の理論から求めよ。

１）システム内に誰もいない確率（滞在数 0）　　[　　　　　]
２）サービスを受けている人だけがいる確率　　[　　　　　]
３）システム内に 5 人いる確率　　[　　　　　]
４）待っている人がいない確率（滞在数 0 か 1）　　[　　　　　]
５）滞在数の平均　　[　　　　　]

6）待ち数の平均　　　　　　　　[　　　　　　]
7）滞在時間の平均　　　　　　　[　　　　　　]
8）待ち時間の平均　　　　　　　[　　　　　　]

問題解答

1）システム内に誰もいない確率（滞在数 0）　　[0.25]
2）サービスを受けている人だけがいる確率　　[0.1875]
3）システム内に 5 人いる確率　　　　　　　　[0.0593]
4）待っている人がいない確率（滞在数 0 か 1）　[0.4375]
5）滞在数の平均　　　　　　　　[3]
6）待ち数の平均　　　　　　　　[2.25]
7）滞在時間の平均　　　　　　　[1]
8）待ち時間の平均　　　　　　　[0.75]

4.5　プログラムの利用法

1）定常的な待ち行列

シミュレータは、時間を細かく分割し、この時間間隔での待ち行列の変化を数値的に追うものである。メニュー画面を図 1 に示す。

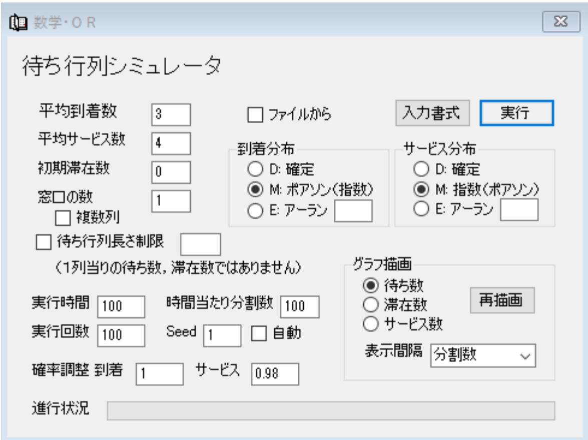


図 1　待ち行列分析メニュー画面

入力する条件は、単位時間あたりの客の到着数、サービス数、到着分布とサービス分布、初期行列の長さ、サービス窓口の数、行列長さの制限、実行時間、実行回数、単位時間の分割数である。到着分布とサービス分布は、確定分布、ポアソン（指数）分布、アーラン分布から選択できるようにした。確定分布では客の到着時間間隔やサービス時間は一定であるのに対して、それ以外の分布では現象は確率的に起こる。

複数窓口の場合、窓口への並び方は、全体の窓口に対し 1 列に並び、サービスはそこから振り分けて行う場合と窓口 1 つずつにそれぞれ並ぶ場合を考えている。後者の場合新しく来た人は最も短い列の後ろに並ぶものとする。また、待ち人数の制限がある場合は窓口 1 つ当たりの制限人数で与える。

「ファイルから」の入力でなく、実行メニューの入力を使う場合、「実行」ボタンをクリ

ックして表示される計算結果を図 2 に示す。これは定常的なシミュレーションとみなされ、計算できるところでは理論値が表示されている。

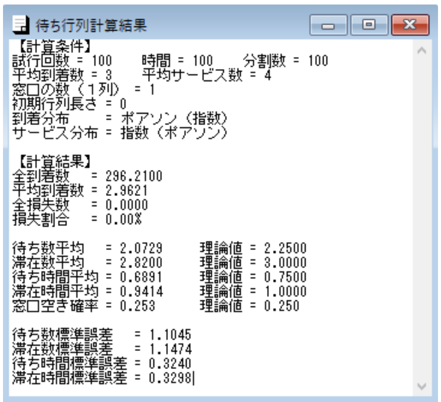


図 2　待ち行列結果表示画面

待ち行列のグラフ表示については、グラフの種類として、待ち数、滞在数、サービス数の 3 種類から選択できる。また、表示間隔も変更することができる。

M/M/1(∞) で、平均到着数 3、平均サービス数 4、初期滞在数 0、単位時間当たり分割数 100、表示時間間隔を分割数の場合（デフォルト）の待ち数の平均的推移についてのグラフを図 4 に示す。

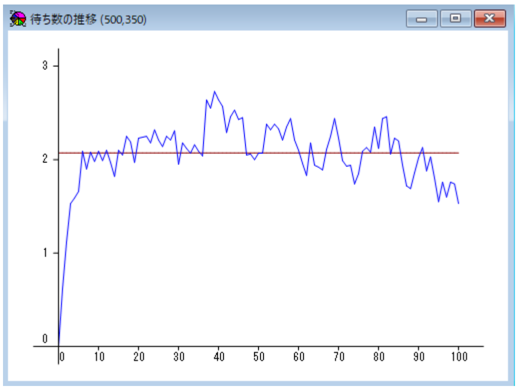


図 4　待ち行列グラフ表示画面 1

また、D/D/1(∞) で、平均到着数 3、平均サービス数 4、初期滞在数 11、単位時間当たり分割数 12、実行時間 10、表示間隔 1 の場合の待ち数の推移は図 5 のようになる。

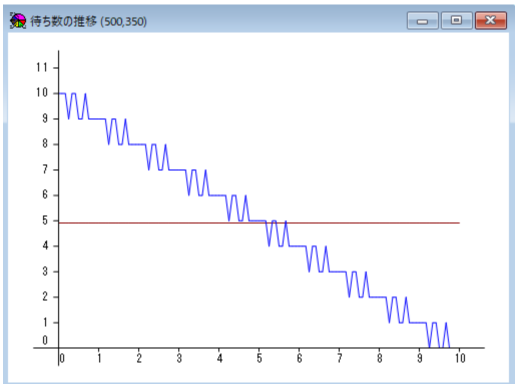


図 5　待ち行列グラフ表示画面 2

問題

以下の待ち行列は定常的であるか。定常的ならば、平均待ち数と平均待ち時間をシミュレーション実行結果から求めよ。但し、乱数は Seed を 1、実行時間や分割数などはデフォルト（変更しないまま）とせよ。

１）M/M/1，到着数 4，サービス数 5
　定常的で［ある・ない］，平均待ち数［　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　］
２）M/M/1，到着数 5，サービス数 4
　定常的で［ある・ない］，平均待ち数［　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　］
３）M/M/2，到着数 6，サービス数 4，窓口に全体で 1 列に並ぶ場合
　定常的で［ある・ない］，平均待ち数［　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　］
４）M/M/2，到着数 6，サービス数 4，窓口ごとに複数列で並ぶ場合
　定常的で［ある・ない］，平均待ち数［　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　］
５）複数窓口の場合、どちらが効率は良いか。
　［1 列に並ぶ場合・複数列で並ぶ場合］
６）M/M/1，到着数 3，サービス数 4　　　平均待ち数［　　　　　］
７）M/D/1，到着数 3，サービス数 4　　　平均待ち数［　　　　　］
８）$M/E_2/1$，到着数 3，サービス数 4　　　平均待ち数［　　　　　］
９）上の３つの待ち行列の記号を平均待ち数が少ない順に並べて書け。
　［　　　　　］［　　　　　］［　　　　　］
10）M/M/1(5)，到着数 3，サービス数 4（待ち人数が 5 人までの場合）
　平均待ち数［　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　］
11）上の場合、行列に並ばすに帰ってしまった人は全体の何%か。　　［　　　　　］%
12）M/M/1，到着数 3，サービス数 4，最初にシステム内に 10 人並んでいる場合
　定常的で［ある・ない］，平均待ち数［　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　］
13）前問の場合、システムが定常状態になるのにおよそ何単位時間かかるか。
　約［　　　　］単位時間

演習

設定は上の問題と同じとし、単位時間を 1 分として、単位に気を付け、シミュレーション結果を示せ。

１）M/M/1，平均到着時間間隔 20 秒，平均サービス時間 15 秒
　平均待ち数［　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　］秒
２）M/M/1，平均到着時間間隔 40 秒，平均サービス時間 24 秒
　平均待ち数［　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　］秒
３）M/M/1，平均到着時間間隔 2 分，平均サービス時間 1 分 40 秒
　平均待ち数［　　　　　］，平均待ち時間［　　　　　］分

問題解答

１）M/M/1，到着数 4，サービス数 5
　　定常的で［$\boxed{\text{ある}}$・ない］，平均待ち数［ 3.180 ］，平均待ち時間［ 0.790 ］
２）M/M/1，到着数 5，サービス数 4
　　定常的で［ある・$\boxed{\text{ない}}$］，平均待ち数［　　　　］，平均待ち時間［　　　　］
３）M/M/2，到着数 6，サービス数 4，窓口に全体で 1 列に並ぶ場合
　　定常的で［$\boxed{\text{ある}}$・ない］，平均待ち数［ 1.999 ］，平均待ち時間［ 0.331 ］
４）M/M/2，到着数 6，サービス数 4，窓口ごとに複数列で並ぶ場合
　　定常的で［$\boxed{\text{ある}}$・ない］，平均待ち数［ 2.221 ］，平均待ち時間［ 0.368 ］
５）複数窓口の場合、どちらが効率は良いか。
　　［$\boxed{\text{1 列に並ぶ場合}}$・複数列で並ぶ場合］
６）M/M/1，到着数 3，サービス数 4　　平均待ち数［ 2.073 ］
７）M/D/1，到着数 3，サービス数 4　　平均待ち数［ 1.064 ］
８）M/E_2/1，到着数 3，サービス数 4　　平均待ち数［ 1.624 ］
９）上の３つの待ち行列の記号を平均待ち数が少ない順に並べて書け。
　　［ M/D/1 ］［ M/E_2/1 ］［ M/M/1 ］
10）M/M/1(5)，到着数 3，サービス数 4（待ち人数が 5 人までの場合）
　　平均待ち数［ 1.177 ］，平均待ち時間［ 0.396 ］
11）上の場合、行列に並ばすに帰ってしまった人は全体の何%か。　［ 4.74 ］%
12）M/M/1，到着数 3，サービス数 4，最初にシステム内に 10 人並んでいる場合
　　定常的で［$\boxed{\text{ある}}$・ない］，平均待ち数［ 2.733 ］，平均待ち時間［ 0.908 ］
13）前問の場合、システムが定常状態になるのにおよそ何単位時間かかるか。
　　約［ 20 ］単位時間

演習解答

１）M/M/1，平均到着時間間隔 20 秒，平均サービス時間 15 秒
　　平均待ち数［ 2.073 ］，平均待ち時間［ 41.34 ］秒
２）M/M/1，平均到着時間間隔 40 秒，平均サービス時間 24 秒
　　平均待ち数［ 0.869 ］，平均待ち時間［ 34.56 ］秒
３）M/M/1，平均到着時間間隔 2 分，平均サービス時間 1 分 40 秒
　　平均待ち数［ 2.575 ］，平均待ち時間［ 4.878 ］分

2) 定常的でない待ち行列

ここでは以下の例を元にプログラムを用いて定常的でない待ち行列のシミュレーションを行う。

例

単位時間当たりの到着数・サービス数、窓口数が以下の表 1 ように時間的に変化するときの待ち行列の状態を調べる。

表１　時間変化する待ち行列

時刻	到着数	サービス数	窓口数
0	3	4	1
50	6	4	1
55	6	4	2
100			

表 1 のデータの入力形式を図 6 に示す（待ち行列 1.txt）。

図 6　時間変化データ

これは、シミュレーションの時間 $0 \le t < 50$（単位時間）の間、到着数 3、サービス数 4、窓口数 1、$50 \le t < 55$ の間、到着数 6、サービス数 4、窓口数 1、$55 \le t < 100$ の間、到着数 6、サービス数 4、窓口数 2 とするものである。さらに細かな設定は時刻の分割を多くするだけである。この状況は最初定常状態だった待ち行列が、到着数が増えたことで行列が伸び、すぐに窓口数を増やして対応したということになる。

メニューの「時間変化データから」チェックボックスをチェックして、「実行」ボタンをクリックすると図 7a と図 7b の実行結果が得られる。

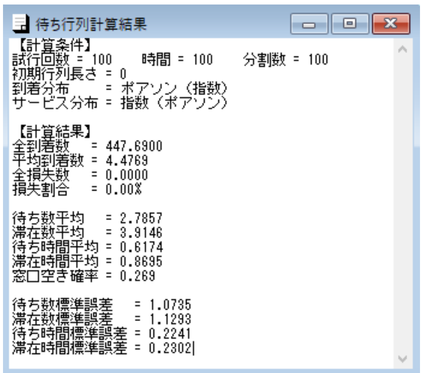


図 7a　待ち行列結果表示画面

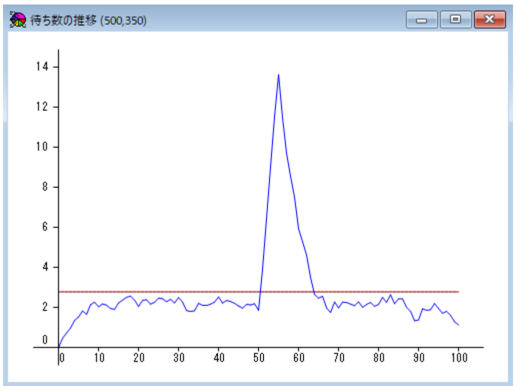


図 7b　待ち行列待ち数グラフ画面

<u>以下の問題では乱数の seed を 1 とすること。</u>

問題 1

ショッピングセンターのＡＴＭに、昼 12 時（時刻 0）から 12 時 20 分（時刻 20）までに 8 人、12 時 20 分から 40 分（時刻 40）までに 16 人、12 時 40 分から 13 時（時刻 60）までに 12 人ランダムに到着する。1 分当たりの処理人数が平均 0.7 人であるとき、<u>単位時間を 1 分とし、M/M/1 を仮定して</u>以下を求めよ。

1）各時間帯で 1 分当たりの到着数は何人か

12 時～12:20	12:20～12:40	12:40～13 時

2）最大の待ち人数はおよそいくらか　［　　　　　］人

3）平均の待ち人数は何人か　［　　　　　］人

4）平均の待ち時間は何分か　［　　　　　］分

問題２

みどりの窓口で 60 分間に 72 人の客がランダムに到着するとする。サービス時間は 1 人平均 2 分で、窓口は 3 つ開いているものとする。単位時間を 1 分とし、M/M/n の 1 列を仮定して以下の問いに答えよ。シミュレーションの時間は 100 分とする。

１）1 分当たりの客の到着人数は何人か　［　　　　　］人
２）1 分当たりのサービス人数は何人か　［　　　　　］人
３）平均の待ち人数は何人か　［　　　　　］人
４）平均の待ち時間は何分か　［　　　　　］分
５）窓口の空き確率はいくらか［　　　　　］
６）窓口の稼働率（1 －空き確率）［　　　　　］％
７）開始から 90 分後、1 台が故障して窓口が 2 つになった。その 10 分後にはおよそ何人の行列ができるか。　およそ［　　　　　］人

問題３

シミュレーション時間を 100 単位時間、乱数の seed を 1 （プログラムの初期設定）として、M/M/1 の待ち行列について以下の問いに答えよ。ただし、単位時間を 1 分とすること。

１）平均到着時間間隔 20 秒，平均サービス時間 15 秒の場合について
　単位時間に何人到着するか。［　　　　　］人
　単位時間に何人サービスが終わるか。［　　　　　］人
　待ち数の平均は何人か。［　　　　　］人
　待ち時間の平均は何分か。［　　　　　］分
２）平均到着時間間隔 40 秒，平均サービス時間 24 秒
　単位時間に何人到着するか。［　　　　　］人
　単位時間に何人サービスが終わるか。［　　　　　］人
　待ち数の平均は何人か。［　　　　　］人
　待ち時間の平均は何分か。［　　　　　］分

問題４

あるスーパーのレジへの客の到着は全レジ合計で 10 分当たり以下の表のようである。

時間帯	3 時～4 時	4 時～5 時	5 時～6 時	6 時～7 時
到着人数	5	10	20	10

レジ打ちは一人平均 2.5 分、単位時間を 1 分とし、M/M/n の複数列を仮定して、以下の問いに答えよ。但し、計算結果に表示される待ち数は全体の窓口の合計である。

１）各時間帯の単位時間（1 分）当たりの客の到着数を求めよ。

3 時～4 時	4 時～5 時	5 時～6 時	6 時～7 時

2）レジ打ちについて単位時間（1 分）当たりのサービス数を求めよ。

［　　　　］人

3）混雑しているときでも待ち数が伸びないように窓口を 6 つ開けた。3 時〜7 時までシミュレーションを行うとして以下を求めよ。

注）シミュレーション結果に表示される待ち数平均は全体の待ち数で、窓口当たりの待ち数ではない。

全体平均待ち数［　　　　］，窓口当たりの平均待ち数［　　　　］

平均待ち時間［　　　　］，窓口の空き確率［　　　　］

ピーク時の待ち数　約［　　　　］人

4）各時間帯のアルバイト数を調整して効率化を図りたい。それぞれ窓口数はいくらにすればよいか。但し、各窓口当たりの平均待ち数は 2 人以下（合計待ち数≦2×窓口数）となるようにしたい。

3 時〜4 時	4 時〜5 時	5 時〜6 時	6 時〜7 時

問題１解答

1）各時間帯で 1 分当たりの到着数は何人か

12 時〜12:20	12:20〜12:40	12:40〜13 時
0.4	0.8	0.6

2）最大の待ち人数はおよそいくらか　［ 6 ］人

3）平均の待ち人数は何人か　［ 3.016 ］人

4）平均の待ち時間は何分か　［ 4.691 ］分

問題２解答

1）1 分当たりの客の到着人数は何人か　［ 1.2 ］人

2）1 分当たりのサービス人数は何人か　［ 0.5 ］人

3）平均の待ち人数は何人か　［ 2.258 ］人

4）平均の待ち時間は何分か　［ 1.822 ］分

5）窓口の空き確率はいくらか［ 0.388 ］

6）窓口の稼働率（1 −空き確率）［ 61.2 ］％

7）その 10 分後にはおよそ何人の行列ができるか。　およそ［ 6 ］人

問題３解答

1）平均到着時間間隔 20 秒，平均サービス時間 15 秒の場合について

単位時間に何人到着するか。［ 3 ］人

単位時間に何人サービスが終わるか。［ 4 ］人

待ち数の平均は何人か。［ 2073 ］人

待ち時間の平均は何分か。［ 0.689 ］分

2）平均到着時間間隔 40 秒，平均サービス時間 24 秒

単位時間に何人到着するか。［ 1.5 ］人

単位時間に何人サービスが終わるか。［ 2.5 ］人

待ち数の平均は何人か。［ 0.869 ］人

待ち時間の平均は何分か。［ 0.576 ］分

問題４解答

１）各時間帯の単位時間（1 分）当たりの客の到着数を求めよ。

3 時～4 時	4 時～5 時	5 時～6 時	6 時～7 時
0.5	1	2	1

２）レジ打ちについて単位時間（1 分）当たりのサービス数を求めよ。［ 0.4 ］人

３）3 時～7 時までシミュレーションを行うとして以下を求めよ。

全体平均待ち数［ 0.922 ］，窓口当たりの平均待ち数［ 0.154 ］

平均待ち時間［ 0.809 ］，窓口の空き確率［ 0.852 ］

ピーク時の待ち数　約［ 4 or 5 ］人

４）それぞれ窓口数はいくらにすればよいか。

3 時～4 時	4 時～5 時	5 時～6 時	6 時～7 時
2	3	6	3

4.6　待ち行列の理論

待ち行列理論は、サービスシステムにおいてサービスを行う人あるいは機械(サービス窓口)が有限個である場合に、サービス待ちの個体数（待ち行列長さ）の変動やシステムの運転効率などについて議論するための理論である。図 1 に概念図を示しておく。

サービスを受ける側にとっては待ち時間（システムに到着してからサービス窓口に入るまでの時間）は短いほうがよいのは当然であるし、供給側から見てもサービスした人数が利益に換算される場合には回転率を上げたいであろう。それには、サービス窓口の数を増やすのが手っ取り早い解決策であるが、人件費、設備費等を考えるとむやみにそれを増やすのは得策ではない。そこで、サービスを受ける側がストレスを感じず、しかも供給側には利益が上がるように“ほどほど”の人員、設備を配置することが重要となる。この“ほどほど”に対して指針を与えるのが待ち行列理論である。

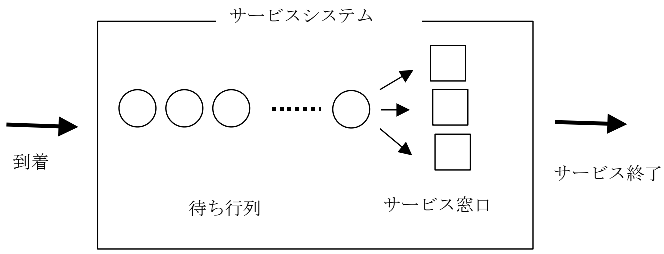


図 1　サービスの流れ

待ち行列の長さは客のシステムへの到着時間間隔、サービス窓口の数、それから各窓口のサービス時間で決定される。到着時間間隔やサービス時間はオートメーション作業のようにきちんと決められている場合もあるが、一般にはある分布を持つ。もちろん、待ち行列の長さはこの分布にも依存するが、ここでは典型的な分布である指数分布とアーラン分布について考えることにする。前述の到着時間間隔やサービス時間が決まっている場合を確定（レギュラー）分布ということもある。ここでそれぞれの分布の分布関数を与えておく。$F(x)$を時刻xまでに客の到着する確率とすると、

$$\text{確定分布：}F(x)=\begin{cases}1 & (x \geq 1/\lambda)\\ 0 & (x < 1/\lambda)\end{cases} \tag{1}$$

$$指数分布：F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases} \tag{2}$$

$$k\,次アーラン分布：F(x)=\begin{cases}\int_0^x \frac{(\lambda k)^k t^{k\text{-}1}}{(k\text{-}1)!}e^{\text{-}\lambda kt}dt & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases} \tag{3}$$

ただし、λは単位時間あたりの到着数（サービス数）である。

待ち行列理論を分類するためにケンドールの記号 X/Y/s(N)を導入しておく。ここで、X は到着時間間隔の分布を、Y はサービス時間の分布をそれぞれあらわし、X（あるいは Y）=D のとき確定分布、M のとき指数分布、E_k のとき k 次のアーラン分布を表す。また、s はサービス窓口の数で、N はシステムへの入場制限をあらわす。例えば、M/M/3(∞) は到着時間間隔が指数分布でシステムへの入場数に制限はなく、窓口 3 つでサービス時間が指数分布であるような待ち行列理論をあらわす、という具合である。

（Ｉ）M/M/c(N)

到着時間間隔、サービス時間ともに指数分布でサービス窓口の数が c、システムへの入場数の制限が N であるような場合を考える。これは、システムへの到着やサービス終了がまったくランダムに起こる場合に相当する。このことからランダム到着、ランダムサービスの問題と呼ばれる。またこの場合、単位時間あたりの到着数やサービス数はポアソン分布に従うのでポアソン到着と呼ばれることもある。

さて、このシステムの平衡状態を考えよう。単位時間あたりの平均到着数をλ、平均サービス数をμとする。このとき、平均到着時間間隔は$1/\lambda$、平均サービス時間は$1/\mu$となる。システム内にn人の客がいる確率をp_nとすると次のような漸化式が成立する。

$$\begin{aligned}&-\lambda p_0+\mu p_1=0\\ &\lambda p_{n-1}-(\lambda+n\mu)p_n+(n+1)\mu p_{n+1}=0 \quad (0<n<c)\\ &\lambda p_{n-1}-(\lambda+c\mu)p_n+c\mu p_{n+1}=0 \quad (c\leq n<N)\\ &\lambda p_{N-1}-c\mu p_N=0\end{aligned} \tag{4}$$

これらを解いて、

$$\begin{aligned}&p_n=\frac{(c\rho)^n}{n!}p_0 \quad (0\leq n\leq c)\\ &p_n=\frac{c^c}{c!}\rho^n p_0 \quad (c\leq n\leq N)\end{aligned} \tag{5}$$

を得る。ここで、$\rho=\lambda/(c\mu)$と置いた。平衡状態は$\rho<1$の場合にのみ存在する。p_0は規格化条件 $\sum_{n=0}^{N}p_n=1$より次のように決定される。

$$p_0=\frac{1-\rho}{(1-\rho)\sum_{n=0}^{c}\frac{(c\rho)^n}{n!}+\frac{(c\rho)^c}{c!}\rho-\frac{(c\rho)^c}{c!}\rho^{N-c+1}} \tag{6}$$

式(5), (6)よりシステムの諸量を計算することが出来る。例えば、待ち行列の平均長さL_qとシステム平均滞在者数Lはそれぞれ、

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{N} (n-c) p_n = \frac{p_0 \rho (c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2} \left\{ 1-(N-c+1)\rho^{N-c} + (N-c)\rho^{N-c+1} \right\} \tag{7}$$

$$L = \sum_{n=1}^{N} n p_n = L_q + c\rho - \frac{p_0 c (c\rho)^c}{c!} \rho^{N-c+1} \tag{8}$$

となる。また、システムに入ってからサービスを受けるまでの待ち時間の平均値W_q、システム内の平均滞在時間WはL_q, Lと次のような関係式が成り立つ。

$$W_q = L_q / \lambda \tag{9}$$

$$W = L/\lambda \tag{10}$$

（Ⅱ）M/M/c(∞)

待ち行列の長さに制限のない場合は、（Ⅰ）の結果から$N \to \infty$の極限を取ることにより得られ、

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c) p_n = \frac{p_0 \rho (c\rho)^c}{c!(1-\rho)^2} \tag{11}$$

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = L_q + c\rho \tag{12}$$

となる。ただし、p_0は以下である。

$$p_0 = \frac{1-\rho}{(1-\rho)\sum_{n=0}^{c} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{(c\rho)^c}{c!}\rho} \tag{13}$$

（Ⅲ）M/E_k/1(∞)

ポアソン到着で、k次のアーランサービス、窓口 1 つで待ち行列に制限のない場合を考える。この場合は、サービスがk段階に別れていて、各段階のサービスが平均サービス時間$1/(k\mu)$の指数分布であるようなものを考えれば良い。もちろん同時に 1 人しかサービスを受けることは出来ない。$k=1$の場合には指数サービスに一致する。結果のみ示すと、平均待ち行列長さL_q、平均滞在者数Lはそれぞれ、

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}(1+1/k) \tag{14}$$

$$L = L_q + \rho \tag{15}$$

となる。また、この場合も関係式(9), (10)が成り立つ。

５．ＱＣ７つ道具

5.1　品質管理とＱＣ七つ道具

製品の品質管理は企業の信頼を左右する重要な問題である。1 つの工程管理の欠陥から製品回収に発展する事例は後を絶たない。ここでは品質管理に関する基本事項をまとめておく。

品質管理の定義は、JIS で広義の定義と狭義の定義が以下のように決められている。

広義の品質管理「品質要求事項を満たすことに焦点を合わせた品質マネジメントの一部」（JIS）

狭義の品質管理「品質保証行為の一部をなすもので、部品やシステムが決められた要求を満たしていることを、前もって確認するための行為」（JIS）

品質管理の考え方は、ウォルター・シューハート、エドワーズ・デミング、石川馨らによって始められ、1960 年以降日本企業に広く普及した。その際、分かり易く伝えるために、QC 七つ道具という言葉が使われるようになった。QC 七つ道具はデータを図にまとめたり、数値にまとめて異常を見極める手法であり、以下のようなものである。

１．グラフ（折れ線グラフ、棒グラフ、円グラフ、帯グラフ、レーダーチャートなど）
２．ヒストグラム（山の形から工程の安定性、拡がりから規格からのずれなどをみる）
３．管理図（工程の安定性を見る）
４．チェックシート（確認要点事項を予め抜粋しまとめられたツール）
５．パレート図（工程改善用に問題点を原因別・損失別に並べた棒グラフ、）
６．特性要因図（問題抽出用に用いられる問題点を階層別に表した図）
７．散布図（相関）
８．層別（クロス集計）

ここで、グラフと管理図をひとまとめにして７つにして、７つ道具とすることが多い。

我々のプログラムを利用して、品質管理 1.txt のデータを用いて品質管理の考え方を示す。ここでは QC 七つ道具の用語を用いながら故障の発生までの経緯を模擬的にたどることにする。

１ページ目のデータは１日単位で求めた４つの工場の初期不良の個数である。各工場の初期不良数を**「折れ線グラフ」**で見てみる。

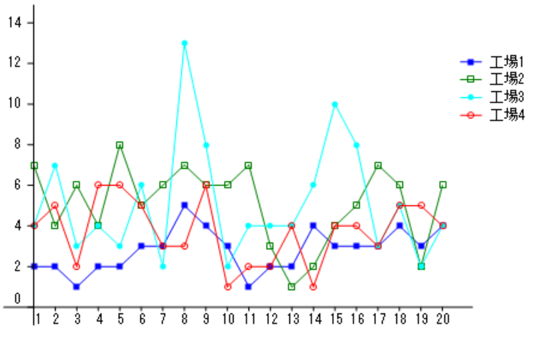


図１　折れ線グラフ

これから工場３で変化が大きいと思われるが、工場３の重要性を調べてみる。このために各工場の初期不良数の合計（群別データ合計から）を**「パレート図」**で見てみる。１頁目のデータをそのまま利用する。

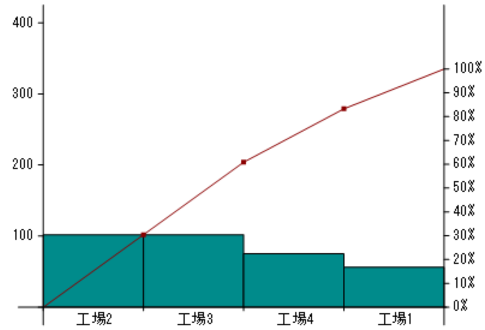


図２　初期不良数で見たパレート図

これによると特に工場３の初期不良が多いとは考えにくい。しかし、工場の重要性は金額ベースでも見る必要がある。そこで、２頁目の金額ベースの損失のデータでもパレート図を描いてみる。

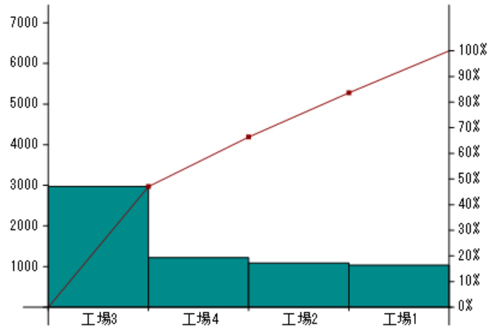


図３　損失額で見たパレート図

件数で見た場合はあまり差が見られないが、金額ベースで見ると工場３の改善に取り組むことが重要であると分る。

　工場３の初期不良数のデータ（1 頁目）は 1 つのデータであるので、**「*x* 管理図」**を用いて異常を調べる。

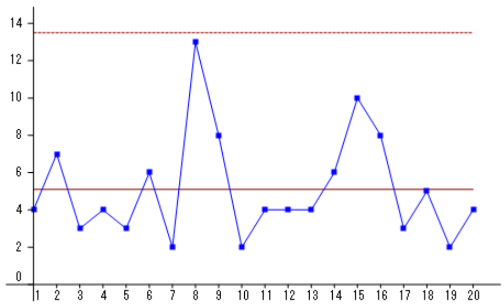


図４　x 管理図で見たデータの異常

ここで中央の線を中心線（CL）、上の点線を管理限界線（UCL）という。下側に管理限界線（LCL）が付く場合も多い。この場合、1 回の測定でデータが 1 つであったが、複数個のデータを集める場合がある。そのときには$\bar{x}$管理図を用いる。またばらつきの異常を調べるにはR管理図が用いられる。

x 管理図で限界線近くまで拡がる場合があったので、**「ヒストグラム」**で分布の特性を見る。自然な誤差の場合には分布が正規分布に近いものになる。

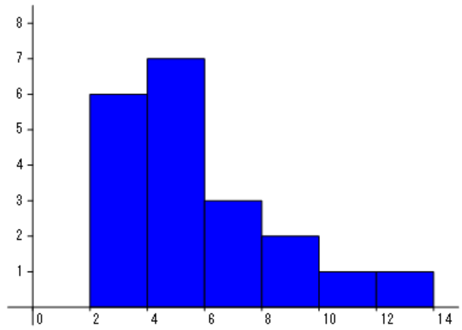


図 5 初期不良数の分布

これを見ると右方向に伸びており、正規分布とは異なる。これらのことから、異常が発生している可能性があるように思われる。

次に**「特性要因図」**によって原因の絞り込みを行いたい。（描いてみよ）

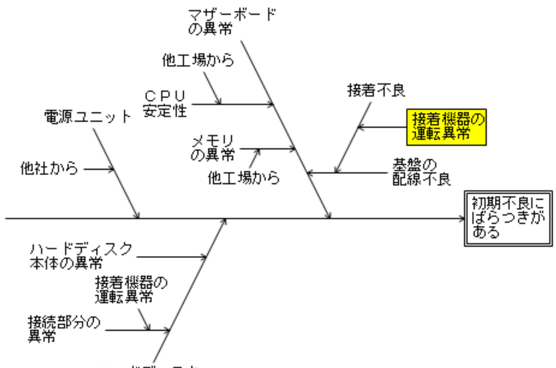


図 6 特性要因図による原因の絞り込み

初期不良にばらつきがある場合、上の特性要因図のような原因が考えられるが、今回はマザーボードの異常によるものが多かったため、その原因を考えて行くと、接着機器の運転異常が原因ではないかと疑われた。

不良品発生の状況を層別の手段で考えるために、不良品の発生に午前と午後の差はあるのか、機器による差はあるのかを**「層別」**の手法で調べてみたところ、以下の結果を得た。

不良品の発生に午前と午後の差はあるか。（層別）3 頁
　検定名　［　　　　　　　　　］検定
　検定確率［　　　　　］　差があると［いえる・いえない］
不良品の発生に機器による差はあるか。（層別）4 頁
　検定名　［　　　　　　　　　］検定
　検定確率［　　　　　］　差があると［いえる・いえない］

この結果から、機器の不良が考えられたが、異常は断続的に表れるので、何らかの外的な要因があるように思われた。異常発生と天候との関係に気付くものがおり、調べてみると以下の結果を得た。

不良品の発生に天候の影響はあるか。（層別）5 頁
　検定名　［　　　　　　　　　］検定
　検定確率［　　　　　］　差があると［いえる・いえない］

原因がかなり絞り込めたので､調べてみると湿度により機器に不具合が発生していることが分った。

解答

不良品の発生に午前と午後の差はあるか。（層別）3 頁
　検定名　［ Wilcoxon 順位和 ］検定
　検定確率［ 0.8542 ］　差があると［いえる・$\boxed{\text{いえない}}$］
不良品の発生に機器による差はあるか。（層別）4 頁
　検定名　［ Wilcoxon 順位和 ］検定
　検定確率［ 0.0127 ］　差があると［$\boxed{\text{いえる}}$・いえない］
不良品の発生に天候の影響はあるか。（層別）5 頁
　検定名　［ Welch の t ］検定
　検定確率［ 0.0081 ］　差があると［$\boxed{\text{いえる}}$・いえない］

5.2　プログラムの利用法

品質管理には QC７つ道具及び新 QC７つ道具と呼ばれる代表的な手法があるが、特にグラフ・管理図、ヒストグラム、チェックシート、パレート図、特性要因図、散布図、層別からなる QC７つ道具は、古くから多くの企業で利用されており、特に生産部門においてこの手法の知識は必要不可欠なものである。今回我々はこれらのうちで、チェックシートを除く６つの手法について、コンピュータでサポートするプログラムを作成した。グラフ、ヒストグラム、散布図、層別はこれまでのプログラムを品質管理の目的に合うように作り変え、管理図、パレート図、特性要因図は新しく作成した。特に特性要因図はグラフィックエディタの特殊な形である。

ここでは品質管理の QC７つ道具に従って新しいプログラムの作成や、既存のプログラム

の活用を行っている。メニュー「分析－数学・ＯＲ－品質管理」を選択すると図 １ のような分析実行画面が表示される。

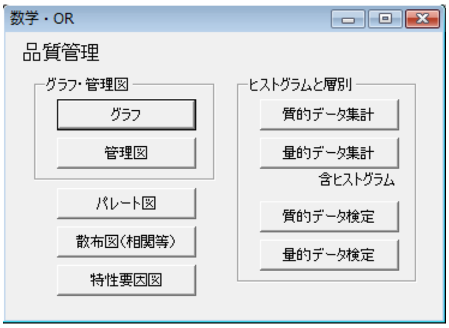


図１　分析実行画面

分析実行画面では、QC７つ道具に従い、「グラフ・管理図」、「パレート図」、「散布図」、「特性要因図」、「ヒストグラムと層別」のメニューが並んでいるが、ヒストグラムはこれまでの統計分析の分類から、「層別」と同じグループボックス内の「量的データの集計」の中にある。「層別」は個別な分析手法というよりも、全体を通した分析の考え方と手順であるので、「パレート図」や「散布図」の中にも存在する。７つ道具の１つ、「チェックシート」はプログラムで対応するものではないので、ここには含まれていない。以後順を追って個別の機能について紹介する。

1) グラフ・管理図

図１の「グラフ」ボタンをクリックすると、図 1.1 のようなグラフメニューが表示される。

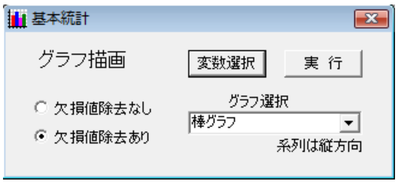


図 1.1　グラフ描画メニュー

これはメニュー「分析－基本統計－グラフ描画」で表示されるものと同じメニューである。変数を選択して、グラフを選び、「実行」ボタンをクリックすると指定されたグラフが表示される。グラフの種類には「棒グラフ」、「積み重ね棒グラフ」、「横棒グラフ」、「積み重ね横棒グラフ」、「帯グラフ」、「３Ｄ棒グラフ」、「折れ線グラフ」、「横折れ線グラフ」、「円グラフ」、「散布図」、「レーダーチャート」、「比較レーダーチャート」がある。ここでは最後の２つのレーダーチャートについて説明する。

図 1.2 にレーダーチャート用のデータ（品質管理（レーダーチャート）1.txt）を示す。

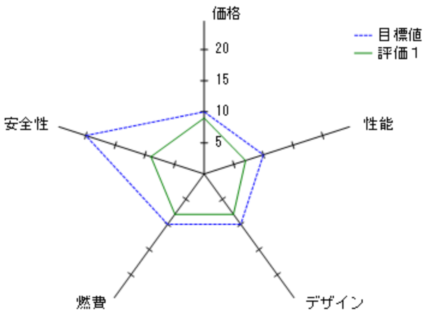

データ編集 品質管理（レーダーチャート）1.txt

	目標値	評価1	評価2	評価3
価格	10	9	5	10
性能	10	7	9	6
デザイン	10	8	8	7
燃費	10	8	5	9
安全性	20	9	9	10

1/1 (1,1)　分析　備考

図 1.2　レーダーチャート用データ

レーダーチャートは、各目標値にデータがどれだけ近付けたのかを表すグラフであるので、データには目標値が必要である。また、殆どの場合目標値の多角形と１つの評価値の多角形が表示されるが、評価値は複数ある場合もある。変数選択で目標値を最初に選び、「レーダーチャート」または「比較レーダーチャート」を選択して、「実行」ボタンをクリックすると図 1.3 または図 1.4 のようなグラフが表示される。



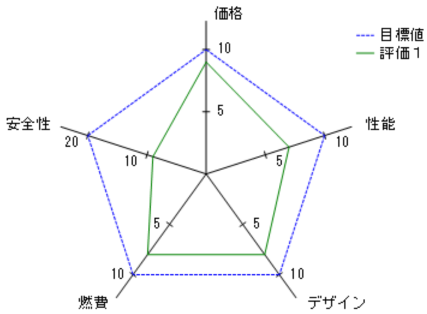


図 1.3　レーダーチャート　　　　　図 1.4　比較レーダーチャート

レーダーチャートは目盛の間隔が同じで、比較レーダーチャートは目標値を同じ半径に設定している。その他のグラフについては、他で説明済みのものが多いので、ここでは省略する。

図 1 のメインメニューで「管理図」ボタンをクリックすると図 1.5 のような管理図実行画面が表示される。

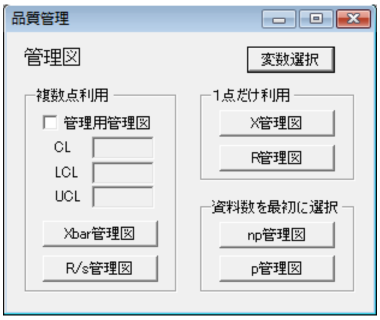


図 1.5　管理図実行画面

管理図には様々な形式があるが、よく使われる形式は $\bar{x}-R$ 管理図である。これには、解析用管理図と管理用管理図の２種類あり、解析用管理図は中心線（CL）と管理限界線（LCL, UCL）をすべてデータから計算するものであり、管理用管理図はこれらを安全設計計画に基づいて利用者が与えるものである。

$\bar{x}-R$ 解析用管理図は、一般に n 個のデータ x_{ti}（$i=1,\dots,n \mid t=1,\dots,T$）の時系列的な集合によって求められる。ここでは $\bar{x}-R$ 管理図について、$\bar{x}$ 管理図と R 管理図に分けて見て行く。$\bar{x}$ 管理図について、CL, LCL, UCL の値は以下で与えられる。

$$CL=\tilde{x},\ LCL=CL-A_2\bar{R},\ UCL=CL+A_2\bar{R}$$

ここに、$\tilde{x}\equiv\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\bar{x}_t$，$\bar{x}_t\equiv\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ti}$，$\bar{R}\equiv\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}R_t$ であり、R_t は t 時点のデータの最大値から最小値を引いた値（レンジ）である。また A_2 は JIS で定められた n の値による表 1.1 の数値である。

表 1.1　$\bar{x}$ 管理図用係数

群の大きさ	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_2	1.880	1.023	0.729	0.577	0.483	0.419	0.373	0.337	0.308

$n>10$ の場合、CL, LCL, UCL の値は以下で与えられる。

$$CL=\tilde{x},\ LCL=CL-3s,\ UCL=CL+3s$$

ここに、$s=\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\bar{x}_t-\tilde{x}\right)^2}$ である。

次に $\bar{x}-R$ 管理図における R 管理図について、CL, LCL, UCL の値は以下のようになる。

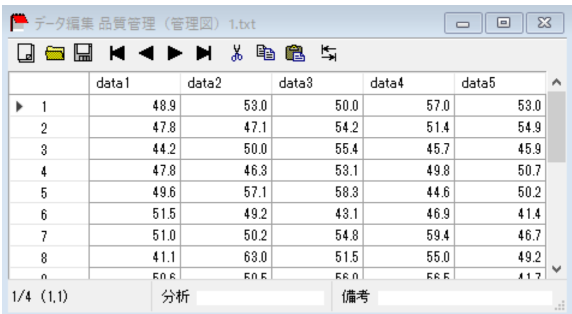
$$CL=\bar{R},\ LCL=CL-D_3\bar{R},\ UCL=CL+D_4\bar{R}$$

D_3, D_4 の値については JIS で定められた n の値による表 1.2 の数値である。

表 1.2　R 管理図用係数

群の大きさ	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_3	0	0	0	0	0	0.076	0.136	0.184	0.223
D_4	3.267	2.574	2.282	2.114	2.004	1.924	1.864	1.816	1.777

具体的には、$\bar{x}-R$ 管理図は図 1.6 のようなデータ（品質管理（管理図）1.txt）から描く。この場合 $n=5$ である。



	data1	data2	data3	data4	data5
1	48.9	53.0	50.0	57.0	53.0
2	47.8	47.1	54.2	51.4	54.9
3	44.2	50.0	55.4	45.7	45.9
4	47.8	46.3	53.1	49.8	50.7
5	49.6	57.1	58.3	44.6	50.2
6	51.5	49.2	43.1	46.9	41.4
7	51.0	50.2	54.8	59.4	46.7
8	41.1	63.0	51.5	55.0	49.2

図 1.6　$\bar{x}-R$ 管理図用データ

図 1.5 のメニューで、「xbar 管理図」ボタンと「R/s 管理図」ボタンをクリックすると、図 1.7 と図 1.8 のような $\bar{x}-R$ 管理図が描かれる。

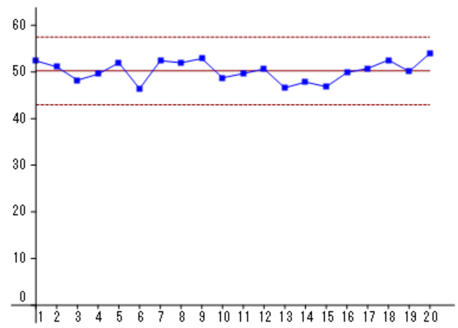


図 1.7　解析用 $\bar{x}$ 管理図

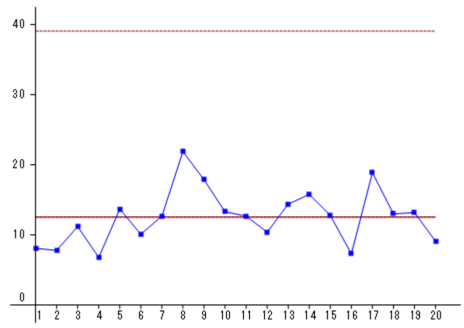


図 1.8　解析用 R 管理図

管理用 $\bar{x}-R$ 管理図の管理限界線は、解析用管理図から得られたデータを元に利用者が指定する。指定データをそれぞれ CL, LCL, UCL テキストボックスに記入し、「xbar 管理図」、「R 管理図」ボタンをクリックすると図 1.9、図 1.10 のように管理用管理図が描かれる。

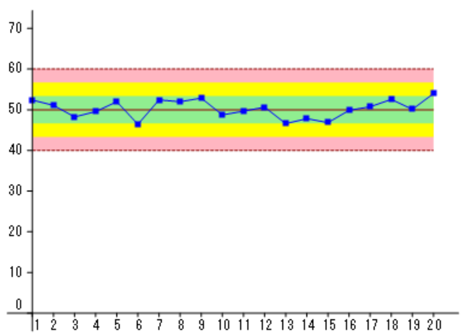


図 1.9 管理用 $\bar{x}$ 管理図
（$CL=50,\ LCL=40,\ UCL=60$）

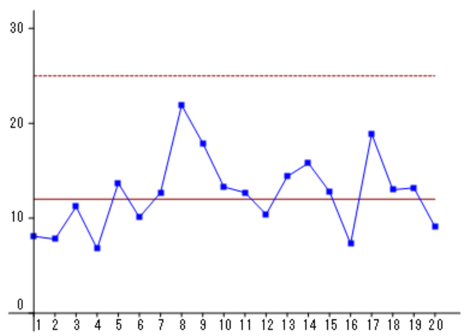
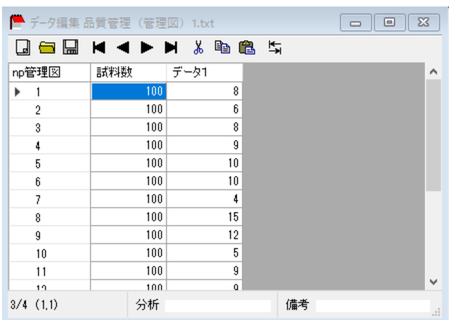


図 1.10 管理用 R 管理図
（$CL=12,\ LCL=0,\ UCL=25$）

ここで管理用 $\bar{x}$ 管理図には、CL から LCL、CL から UCL を 3 等分して CL に近い方から、緑色、黄色、赤色と色分けしてある。これは、JIS の不安定状態の判定基準に用いられるものである。

次に np 管理図は、図 1.11 のような資料数と不良品数のデータから描かれる。その際、試料数は常に一定でなければならない。これを用いて図 1.5 のメニューで「np 管理図」ボタンをクリックすると、図 1.12 のような np 管理図が描かれる。



np管理図	試料数	データ1
1	100	8
2	100	6
3	100	8
4	100	9
5	100	10
6	100	10
7	100	4
8	100	15
9	100	12
10	100	5
11	100	9
12	100	9

図 1.11　np 管理図用データ

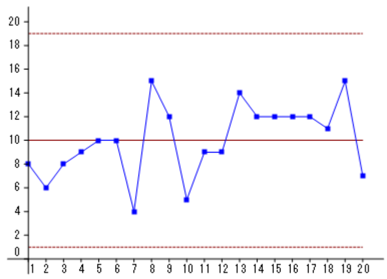


図 1.12　np 管理図

np 管理図の CL, LCL, UCL の値は資料数を d として以下のようになる。

$$CL=\overline{x},\ LCL=CL-\sqrt{dp(1-p)},\ UCL=CL+\sqrt{dp(1-p)}$$

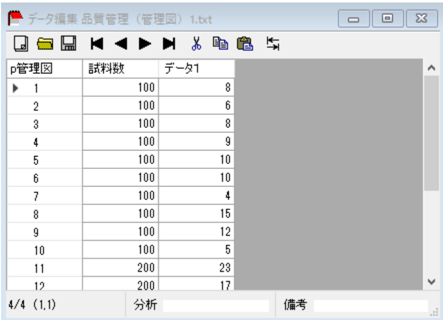
ここに、$\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i/n$, $p=\overline{x}/d$ である。

図 1.13 のように資料数に変化がある場合は、p 管理を利用する。p 管理の CL, LCL, UCL の値は λ 番目のデータの資料数を d_λ 、データ数を x_λ として以下のようになる。

$$CL=p=\sum_{\lambda=1}^{n}x_\lambda\bigg/\sum_{\lambda=1}^{n}d_\lambda,\ LCL=CL-\sqrt{p(1-p)/n},\ UCL=CL+\sqrt{p(1-p)/n}$$

グラフは $p_\lambda=x_\lambda/d_\lambda$ の値で描画する。

具体的な p 管理図は図 1.13 のようなデータを利用して、図 1.14 のようになる。その際限界線は一般に資料数の変わる点で連続でなくなる。


データ編集 品質管理（管理図）1.txt

p管理図	試料数	データ1
1	100	8
2	100	6
3	100	8
4	100	9
5	100	10
6	100	10
7	100	4
8	100	15
9	100	12
10	100	5
11	200	23
12	200	17

4/4 (1,1) 分析 備考

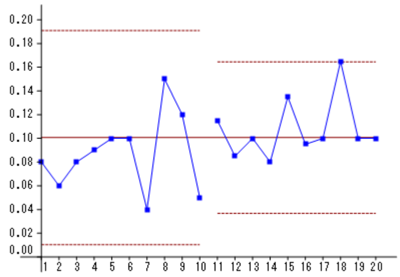


図 1.13　p 管理図用データ　　　　図 1.14　p 管理図

1 点だけ利用する場合の X 管理図と R 管理図について説明する。この場合、X 管理図には 1 つずつのデータの値、R 管理図には前のデータとの差の絶対値を用いる。X 管理図の限界線は、データの平均を $\overline{x}$ 、データの差の絶対値の平均を $\overline{R}$ とすると、以下のように与えられる。

$$LCL=\overline{x}-2.659\times\overline{R},\ UCL=\overline{x}+2.659\times\overline{R}$$

R 管理図の限界線に LCL は利用せず、UCL は以下で与えられる。(JIS による)

$$UCL=3.267\times\overline{R}$$

データとしては図 1.6 のデータ 1 のみを利用する。データ 1 を変数選択し、「X 管理図」ボタンをクリックすると図 1.15 の実行結果が得られる。

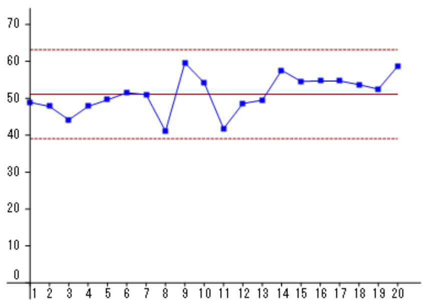


図 1.15　X 管理図

また、「R 管理図」ボタンをクリックすると図 1.16 の実行結果が得られる。

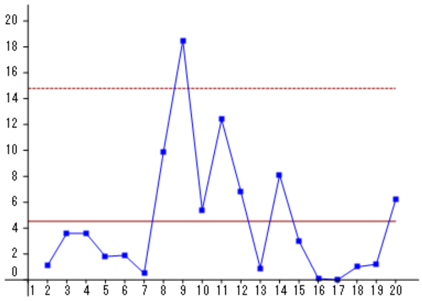


図 1.16　R 管理図

2) パレート図

図 1 のメインメニューで「パレート図」ボタンをクリックすると、図 2.1 のパレート図メニューが表示される。

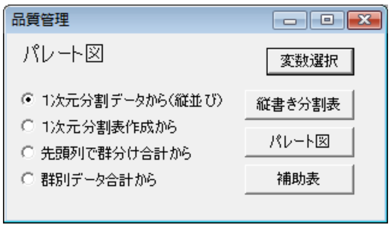


図 2.1　パレート図実行画面

パレート図はいくつかの形式のデータから表示することができる。標準的には図 2.2 のように与えられた縦書きの分割表（品質管理（パレート図）1.txt）から、図 2.3 のように表示される。

	不良数
外径不良	73
外観不良	3
全長不良	2
穴位置不良	56
その他	10
真円度不良	34
打痕キズ	20

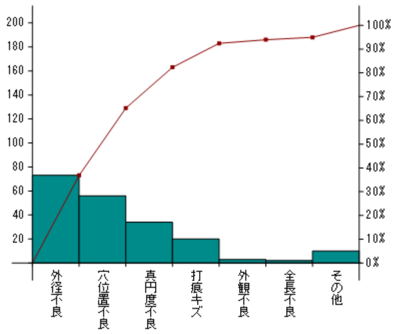
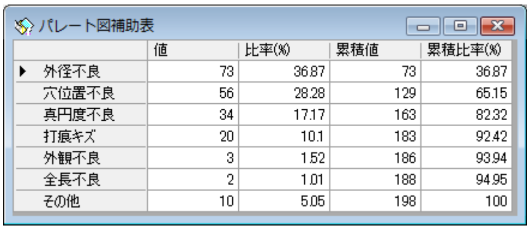


図 2.2　パレート図データ　　　　　　図 2.3　パレート図

ここで図 2.3 の x 軸の名称について、標準では横書きになっているが、図のメニューで縦書きにも書き換えられる。また、名称で「その他」、「他」、「else」とすると、大きさに関わらず最後に表示されるようになっている。また、図 2.1 のメニューでパレート図と同様にして、「補助表」のボタンをクリックすると、補助表として図 2.4 のようなパレート図を少し詳しくしたデータが表示される。



パレート図補助表

	値	比率(%)	累積値	累積比率(%)
外径不良	73	36.87	73	36.87
穴位置不良	56	28.28	129	65.15
真円度不良	34	17.17	163	82.32
打痕キズ	20	10.1	183	92.42
外観不良	3	1.52	186	93.94
全長不良	2	1.01	188	94.95
その他	10	5.05	198	100

図 2.4　パレート図補助表

その他に「１次元分割表作成から」ラジオボタンを選ぶと、元データから１次元分割表を作成して、それを元にパレート図を描く。また、日々の売上高のデータのような場合には、「先頭列で群分け合計から」ラジオボックスを選択する。最初に選択した列でまとめた合計を用いてパレート図を作成する。最後に、売上高を列ごとに合計してデータとしたい場合は、「群別データ合計から」を選択すればよい。

3) ヒストグラムと箱ひげ図

データの分布を調べる場合はヒストグラムを利用するが、層別に分布を比べるときは、箱ひげ図が用いられることがある。ヒストグラムはすでに基本統計のところで解説しているので、ここでは箱ひげ図について説明する。箱ひげ図はヒストグラムと同じように利用される。図 3.1 に量的データの集計実行画面を示す。

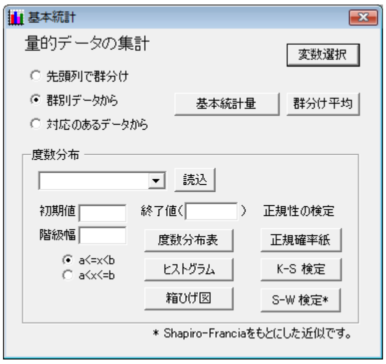


図 3.1　量的データの集計実行画面

箱ひげ図の表示法は、箱の中央を平均値、下端を 25%分位点、上端を 75%分位点、ひげの下端はデータの最小値または -3σ 点の大きい方、ひげの上端はデータの最大値または $+3\sigma$ 点の小さい方とする。ひげの範囲を超えるデータについては○印で、具体的にプロットする。図 3.1 の量的データの集計メニューで変数を１つずつ選んで、「箱ひげ図」ボタンをクリックすると図 3.2 のような結果が表示される。ここでは、外れ値の多い例と少ない例を示している。

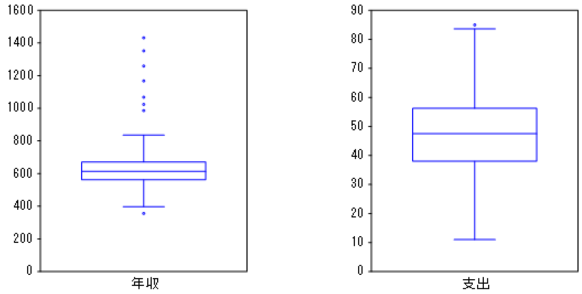


図 3.2　単独の箱ひげ図

これに対し、「先頭列で群分け」ラジオボタンをチェックして、2 つの群で比較するように表示すると図 3.3 のような結果となる。

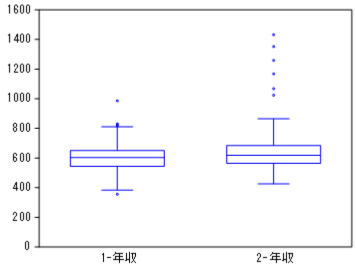


図 3.3　比較のための箱ひげ図

4） 散布図

品質管理としては次に述べる層別の考え方を重視し、「相関係数」、「順位相関係数」、「散布図」、「回帰分析」、「予測値と残差」、「予測実測散布図」で、層別（先頭列で群分け）の機能が利用できるようになっている。5 章最初の図 1 の「散布図（相関等）」ボタンをクリックすると実行画面が図 4.1 のように表示される。

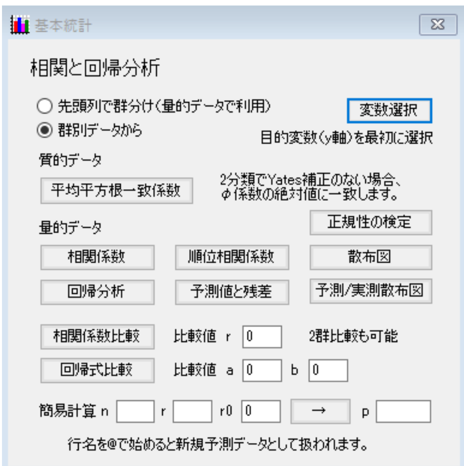


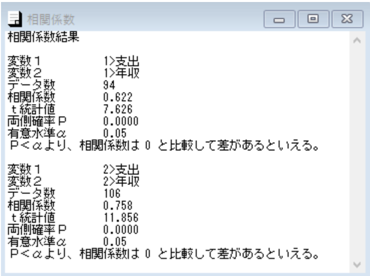
図 4.1　相関と回帰分析実行画面

層別では、「先頭列で群分け」ラジオボタンを選択し、最初に群分けする変数を選び、その

後２つの変数を選択して利用する（テキスト 9.txt)。

先頭列で群分けで、「相関係数」ボタンをクリックすると、図 4.2 のように群分けされたデータから相関係数が計算される。順位相関係数も同様であるので、ここでは省略する。

同様に散布図では、図 4.3 のように群分けされたドットで散布図が表示され、それぞれの回帰直線が描かれる。回帰直線は、図の上下端以内なら、x 座標のデータの最小値から最大値まで引くようになっている。グラフのメニューによって回帰直線を非表示にすることもできる。


相関係数
相関係数結果

変数１　1>支出
変数２　1>年収
データ数　94
相関係数　0.622
ｔ統計値　7.626
両側確率Ｐ　0.0000
有意水準α　0.05
Ｐ<αより、相関係数は 0 と比較して差があるといえる。

変数１　2>支出
変数２　2>年収
データ数　106
相関係数　0.758
ｔ統計値　11.856
両側確率Ｐ　0.0000
有意水準α　0.05
Ｐ<αより、相関係数は 0 と比較して差があるといえる。

図 4.2　相関係数結果

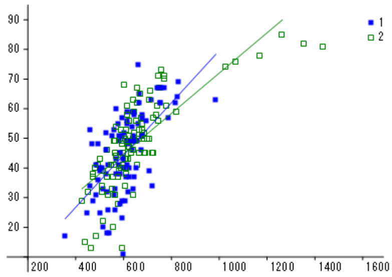
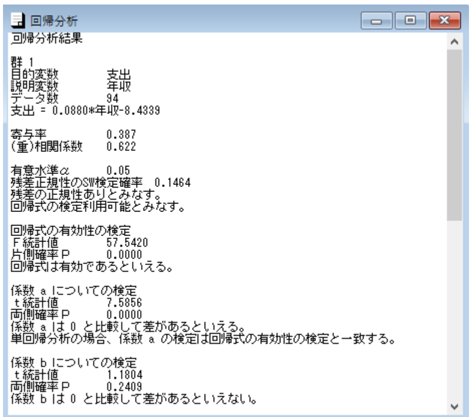


図 4.3　多重散布図

群分けの回帰分析も同様の設定で実行できる。図 4.1 のメニューで「回帰分析」ボタンをクリックすると図 4.4 のような結果が表示される。これは 1 つの群についてだけで、同じものが群の数だけ表示される。また「予測値と残差」ボタンをクリックすると、各群別の回帰式を使った予測値と残差が図 4.5 のように示される。


回帰分析
回帰分析結果

群 1
目的変数　支出
説明変数　年収
データ数　94
支出 = 0.0880*年収-8.4339

寄与率　0.387
(重)相関係数　0.622

有意水準α　0.05
残差正規性のSW検定確率　0.1464
残差の正規性ありとみなす。
回帰式の検定利用可能とみなす。

回帰式の有効性の検定
Ｆ統計値　57.5420
片側確率Ｐ　0.0000
回帰式は有効であるといえる。

係数 a についての検定
ｔ統計値　7.5856
両側確率Ｐ　0.0000
係数 a は 0 と比較して差があるといえる。
単回帰分析の場合、係数 a の検定は回帰式の有効性の検定と一致する。

係数 b についての検定
ｔ統計値　1.1804
両側確率Ｐ　0.2409
係数 b は 0 と比較して差があるといえない。

図 4.4　回帰分析結果


予測値と残差

	地域	実測値	予測値	残差
1	1	49	42.8923	6.1077
2	1	33	41.3076	−8.3076
3	2	32	38.5743	−6.5743
4	2	31	42.4491	−11.4491
5	1	57	43.8607	13.1393
6	2	47	46.4598	0.5402
7	1	48	45.8856	2.1144
8	1	53	31.8876	21.1124
9	1	62	57.9468	4.0532
10	2	53	49.3829	3.6171
11	2	37	35.9911	1.0089
12	2	28	43.3328	−15.3328

図 4.5　予測値と残差結果

予測値と実測値の関係を散布図に表示するには、「予測実測散布図」ボタンをクリックする。図 4.5 で与えられた群別の予測値が図 4.6 のように横軸が予測値、縦軸が実測値で表示される。

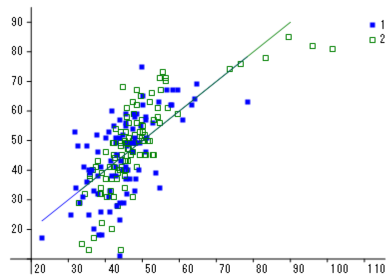


図 4.6　予測実測散布図結果

5）層別

層別の集計や層別の比較検定についてはこれまで基本統計の中でプログラムを説明してきた。ここでは分析用のガイドメニューだけを図 5.1 と図 5.2 に表示するに留める。

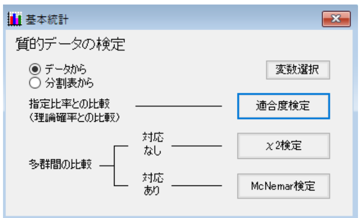


図 5.1　質的データの検定

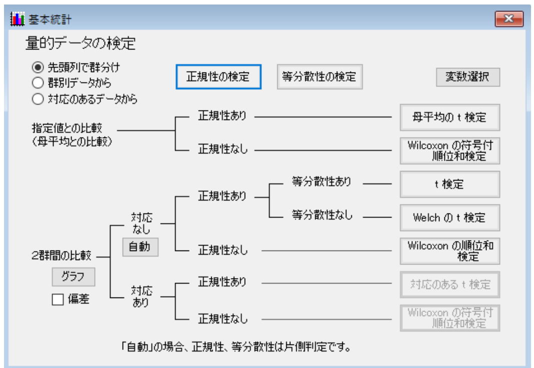


図 5.2　量的データの検定

6）特性要因図

問題の原因を探求するツールとして特性要因図（フィッシュボーン図）は重要である。まず図 1 のメインメニューで「特性要因図」ボタンをクリックしてグラフィックエディタを表示する。これは、特性要因図描画用に描画ボタンが特殊化されたものであり、まず「特性」ボタンをクリックしてピクチャーボックス上をクリックし、背骨の部分を描画する。その後、「要因」ボタンをクリックして要因を配置し、「矢印」ボタンで要因を結ぶようにして矢印を描いて行く。簡単な例を図 6.1 に示す。

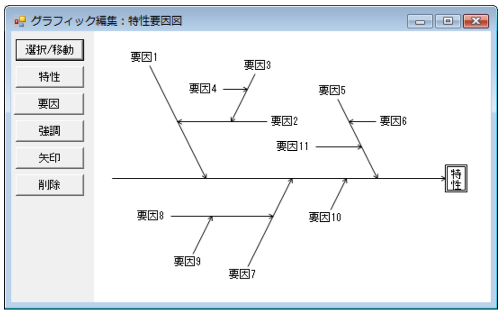


図 6.1　簡単な特性要因図

実際の特性要因図は多くの要因を含むため、画面が大きくなる。ここでは参考文献［1］で与えられたサンプルについて作成した図を図 6.2 に表示する。

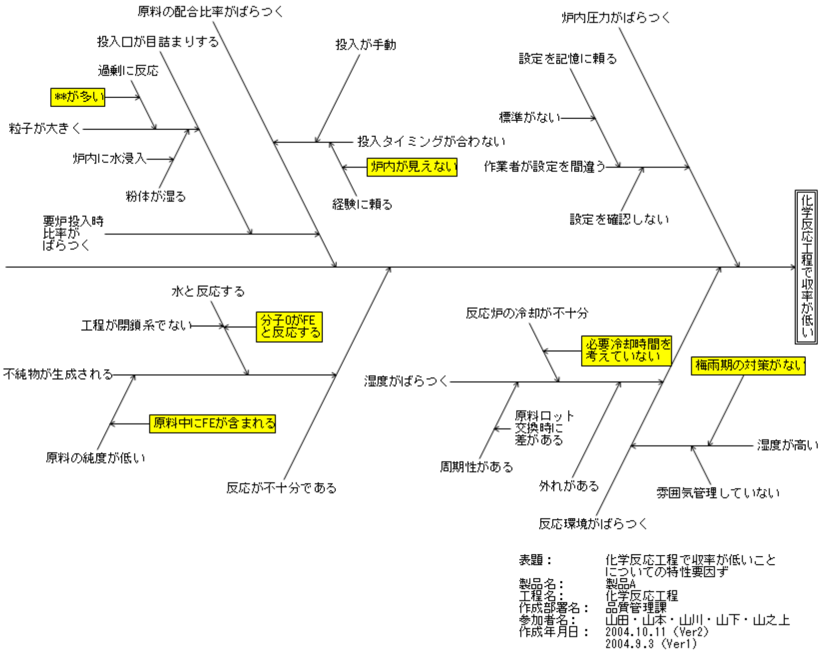


図 6.2　特性要因図サンプル

特性要因図もグラフィックエディタのメニューで、グリッドエディタのデータに変換して保存することができる。また、右下のコメントは、グラフィックエディタのメニュー［表示－コメント］を用いて作った。グラフィックエディタの使用法やデータ形式については総合マニュアル 01（ツール）を参考にしてもらいたい。

参考文献

[1] フリーソフトウェア R による統計的品質管理入門，荒木孝治，日科技連

６．在庫管理シミュレータ

6.1　在庫問題とは

在庫問題とは例えば図 1 のように供給元（問屋や工場など）から出荷された原料や製品などを一時的に保管し、需要先（顧客や商店など）の要求に応じて出荷する、店舗や倉庫、物流センターなどでの商品管理の問題である。在庫量が多ければ保管費用がかさみ、在庫量が少なければ需要先からの要求に欠品が生じる。そのようなことが起こらない適正な在庫量はいくらで、どのような条件でどれだけの量を供給元に発注するかを決定する問題である。

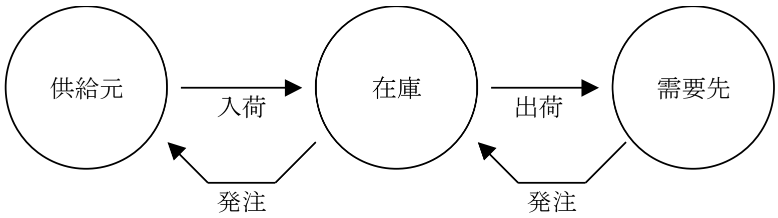


図１　原料・中間原料・製品・商品　他

このような問題には、供給元に発注をかけて入荷するまでの調達期間や需要先からの要求による出庫の量などの必要な情報がある。

必要な情報

　調達期間（リードタイム）L 日　：発注－入庫の間隔

　出庫の量は？（確定的か確率的か？）

我々が決定する事項は以下のような発注時期や発注量である。

決定事項（重要な意思決定）

発注時期（いつの時点で発注するか？）	在庫の量 I または発注間隔 R
発注量（どれだけ発注するか？）	Q

ここで単位として日を使っているが、これは分かり易さのためで特に日に限らない。

このような問題を解決する方法としてここで取り上げるのは基本的な２つの方法である。１つは必要な時に一定の量を発注する定量発注方式で、もう１つは一定の期間をおいて必要な量を発注する定期発注方式である。これらは代表的な方法であり、さらに複雑な方法の基礎としてこれらの知識を持つことは重要である。

6.2　定量発注方式

定量発注方式は在庫量がある基準以下になったとき、決まった一定の発注量を発注する方式である。基本は在庫量をできるだけ少なく保つが、発注した製品が届くまでの間に需要によって欠品が生じないようにすることが重要である。定められた一定の発注量、出庫の平均と分散、発注から入荷までの調達期間が分かっているとき、欠品の危険率（許容確率）を定めて、在庫量がいくつになったら発注するかという発注点を求める。必要な情報と決定事項を以下にまとめる。

必要な情報

　発注量　　　　Q

　１日当たりの出庫量（確率的）　$N(\mu,\sigma^2)$

　　平均μ、分散σ^2（標準偏差σ）の正規分布を仮定

　調達期間（リードタイム）L日　：発注－入庫の間隔

　品切れの危険率：$\alpha \times 100\%$

決定事項

　発注点（在庫量がどこまで減ったら発注するか？）

　在庫の量をグラフにしてみると、図２のような変動になる。

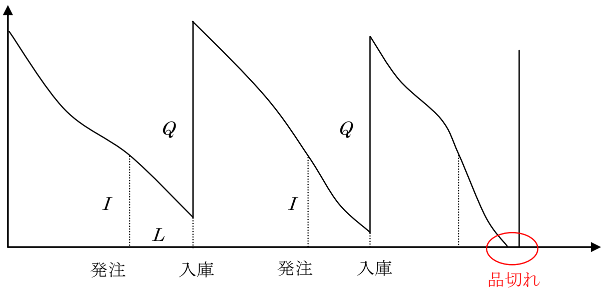


図２　定量発注方式の在庫量

　定量発注方式の理論を考えると以下のようになる。

　１日当たりの出庫を$N(\mu,\sigma^2)$とすると、納品までの期間（調達期間）L日の出庫量Xは以下となる。

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_L \sim N(L\mu, L\sigma^2)\ \text{分布}$$

ここに標準偏差は$\sqrt{L}\sigma$になる。

　次に在庫Iの時点で発注して品切れを起こす確率pを求めると、これは納品までの期間にI以上の出庫がある確率＝$P(X > I)$と考えられ、以下となる。

$$p = 1 - normsdist\left(\frac{I - L\mu}{\sqrt{L}\sigma}\right)$$

　そこで、許される最大の品切れの確率をαとすると、

$$1 - normsdist\left(\frac{I - L\mu}{\sqrt{L}\sigma}\right) = \alpha \quad \text{より、} \quad normsdist\left(\frac{I - L\mu}{\sqrt{L}\sigma}\right) = 1 - \alpha$$

となり、以下の式が成り立つ。

$$\frac{I - L\mu}{\sqrt{L}\sigma} = normsinv(1-\alpha) \equiv \lambda$$

ここにλを安全係数と呼ぶ。

　これより、$I = L\mu + \lambda\sqrt{L}\sigma$となり、在庫が$L\mu + \lambda\sqrt{L}\sigma$になった時点で発注すれば品切れの危険率が$\alpha$になることが分かる。

　ここに$Q/2$をサイクル在庫、$\lambda\sigma\sqrt{L}$を安全在庫、サイクル在庫＋安全在庫を理論在庫

という。この関係を直観的に描くと図3のようになる。

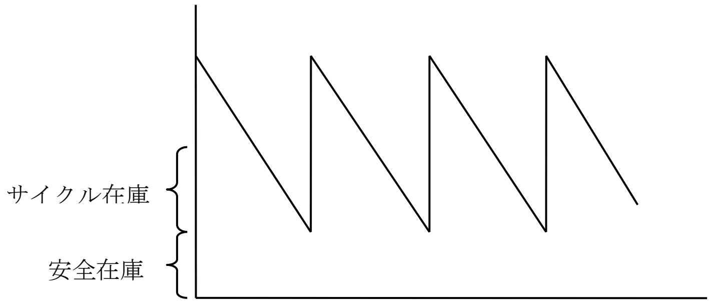


図3　サイクル在庫と安全在庫

ここで得た結果を以下のような公式にしておく。

公式　定量発注方式

1日当たりの出庫　平均 μ、分散 σ^2（標準偏差 σ）の正規分布

発注量：Q　調達期間（リードタイム）：L　品切れの危険率：$\alpha \times 100\%$

安全係数を $\lambda = normsinv(1-\alpha)$ として、在庫が $I = L\mu + \lambda\sigma\sqrt{L}$ になった時点（発注点）で、Q の量を発注する。

サイクル在庫：$Q/2$、安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L}$、理論在庫：$Q/2 + \lambda\sigma\sqrt{L}$

この公式を使って以下の例題を解いてみる。

例

1日当たりの出庫の平均20個、標準偏差5個、調達期間7日、発注量200個のとき、定量発注方式として以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は5%以下とする。

１）安全係数を求めよ。

$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［ 1.645 ］

２）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫：$Q/2$ ＝［ 100 ］（個）

安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［ 21.76 ］（個）

理論在庫：$Q/2 + \lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［ 121.76 ］（個）

３）発注点在庫量を求めよ。

$I = L\mu + \lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［ 161.76 ］（個）

問題1

1日当たりの出庫の平均30個、標準偏差4個、調達期間3日、発注量150個のとき、定量発注方式として以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は1%以下とする。

１）安全係数を求めよ。

$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［　　　　　　］

２）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。
サイクル在庫：$Q/2$ ＝［　　　　　　］（個）
安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［　　　　　　］（個）
理論在庫：$Q/2+\lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［　　　　　　］（個）

３）発注点在庫量を求めよ。
$I = L\mu + \lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［　　　　　　］（個）

問題２

出庫は1週間当たり平均200個、標準偏差20個、調達期間1週間、発注量500個、のとき、定量発注方式として以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は3%以下とする。

１）1日当たりの出庫の平均と標準偏差を求めよ。
ヒント：標準偏差の場合の計算は　1週間の値÷$\sqrt{7}$
平均［　　　　　　］　　標準偏差［　　　　　　］

２）安全係数を求めよ。
$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［　　　　　　］

３）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。
サイクル在庫：$Q/2$ ＝［　　　　　　］（個）
安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［　　　　　　］（個）
理論在庫：$Q/2+\lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［　　　　　　］（個）

４）発注点在庫量を求めよ。
$I = L\mu + \lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［　　　　　　］（個）

問題１解答

１）安全係数を求めよ。
$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［ 2.326 ］

２）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。
サイクル在庫：$Q/2$ ＝［ 75 ］（個）
安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［ 16.12 ］（個）
理論在庫：$Q/2+\lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［ 91.12 ］（個）

３）発注点在庫量を求めよ。
$I = L\mu + \lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［ 106.12 ］（個）

問題２解答

１）1日当たりの出庫の平均と標準偏差を求めよ。
平均［ 28.57 ］　　標準偏差［ 7.56 ］

２）安全係数を求めよ。
$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［ 1.881 ］

３）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。
サイクル在庫：$Q/2$ ＝［ 250 ］（個）

安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［ 37.62 ］（個）

理論在庫：$Q/2+\lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［ 287.62 ］（個）

４）発注点在庫量を求めよ。

$I = L\mu + \lambda\sigma\sqrt{L}$ ＝［ 237.62 ］（個）

6.3　定期発注方式

定期発注方式は、発注間隔で定めた一定期間ごとに必要な発注量を発注する方式である。基本は在庫量をできるだけ少なく保つが、発注した製品が届くまでの間に需要によって欠品が生じないようにすることが重要であるのは定量発注方式と同じである。一定の発注間隔、出庫の平均と分散、発注から入荷までの調達期間が分かっているとき、欠品の危険率（許容確率）を定めて、発注量をいくらにするかを求める。必要な情報と決定事項を以下にまとめる。

必要な情報

発注間隔　　　R 日

調達期間（リードタイム）L 日　：発注－入庫の間隔

１日当たりの出庫（確率的）　$N(\mu,\sigma^2)$

平均 μ 、分散 σ^2（標準偏差 σ ）の正規分布を仮定

決定事項

最大在庫量 M を求める。

発注量は　最大在庫量－発注時在庫量－発注残量

注）在庫の量は今回発注を済ませたら次回入庫まで調整できないことに注意。

定期発注方式では、調達期間と発注間隔の長さの関係で発注量が異なってくるので実用的な2つの場合に分けて考える。

$L \le R$ の場合

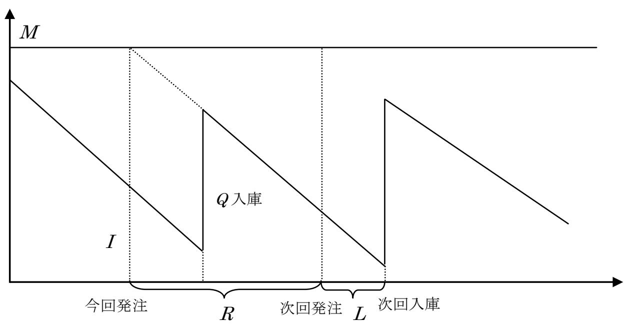


図４　定期発注方式 $L \le R$

発注から次回発注分の納品まで $L+R$ 日の期間があるが、この間に在庫不足の起こらないように、最大在庫量 M を求める。

$M = (L+R)\mu + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$　　λ：安全係数

発注量　$Q = M - I$　　　発注残量は 0 である。

ここで λ は定量発注方式のところで求めた安全係数である。

$R < L < 2R$の場合

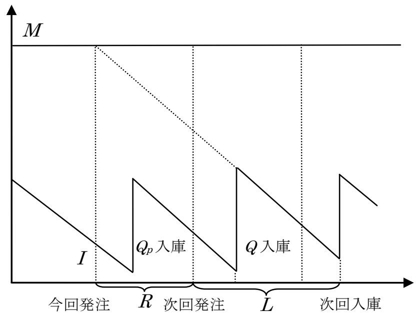


図５　定期発注方式$R < L < 2R$

発注から次回発注分の納品まで$L+R$日の期間があるが、この間に在庫不足の起こらないように、最大在庫Mを求める。

$$M = (L+R)\mu + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$$

ここまでは上の場合と同じであるが、前回の発注量Q_pがまだ調達されていないので、その分を引いて以下のように発注する。

発注量　$Q = M - I - Q_p$

ここで得た結果を以下のような公式にしておく。

公式　定期発注方式

１日当たりの出庫　平均μ、分散σ^2（標準偏差σ個）の正規分布

発注間隔：R日　調達期間（リードタイム）：L日　品切れの危険率$\alpha \times 100\%$

安全係数を$\lambda = normsinv(1-\alpha)$、最大在庫量を$M = (L+R)\mu + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$　として

発注間隔ごとに、最大在庫量－現在の在庫量－現在の発注残量　を発注する。

サイクル在庫：$R\mu/2$、安全在庫：$\lambda\sqrt{L+R}\sigma$、理論在庫：$R\mu/2 + \lambda\sqrt{L+R}\sigma$

この公式を使って以下の例題を解いてみると、回答は記入した通りになる。

例

1 日当たりの出庫の平均 20 個、標準偏差 5 個、発注間隔 10 日、調達期間 7 日のとき、定期発注方式として以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は 5%以下とする。

１）安全係数を求めよ。

$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［ 1.645 ］

２）最大在庫量を求めよ。

$M = (L+R)\mu + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［ 373.91 ］（個）

３）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫：$R\mu/2$ ＝［ 100 ］（個）

安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［ 33.91 ］（個）

理論在庫：$R\mu/2 + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［ 133.91 ］（個）

４）発注日に前の発注の残りはあるか。　［ある・$\boxed{\text{ない}}$］

問題１

1 日当たりの出庫の平均 30 個、標準偏差 4 個、発注間隔 7 日、調達期間 3 日のとき、定期発注方式として以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は 1%以下とする。

１）安全係数を求めよ。

$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［　　　　　　　］

２）最大在庫量を求めよ。

$M = (L+R)\mu + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［　　　　　　　］（個）

３）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫：$R\mu/2$ ＝［　　　　　　　］（個）

安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［　　　　　　　］（個）

理論在庫：$R\mu/2 + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［　　　　　　　］（個）

４）発注日に前の発注の残りはあるか。　［ある・ない］

問題２

出庫は 1 週間当たり平均 200 個、標準偏差 20 個、発注間隔 7 日、調達期間 10 日のとき、定期発注方式として以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は 3%以下とする。

１）1 日当たりの出庫の平均と標準偏差を求めよ。

ヒント：標準偏差の場合の計算は　1 週間の値÷$\sqrt{7}$

平均［　　　　　　　］　標準偏差［　　　　　　　］

２）安全係数を求めよ。

$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［　　　　　　　］

３）最大在庫量を求めよ。

$M = (L+R)\mu + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［　　　　　　　］（個）

４）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫：$R\mu/2$ ＝［　　　　　　　］（個）

安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［　　　　　　　］（個）

理論在庫：$R\mu/2 + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［　　　　　　　］（個）

５）発注日に前の発注の残りはあるか。　［ある・ない］

問題１解答

１）安全係数を求めよ。

$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［ 2.326］

２）最大在庫量を求めよ。

$M = (L+R)\mu + \lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［ 329.43 ］（個）

３）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。
　サイクル在庫：$R\mu/2$ ＝［ 105 ］（個）
　安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［ 29.43 ］（個）
　理論在庫：$R\mu/2+\lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［ 134.43 ］（個）
４）発注日に前の発注の残りはあるか。　［ある・$\boxed{\text{ない}}$］

問題２解答

１）１日当たりの出庫の平均と標準偏差を求めよ。
　平均［ 28.57 ］　標準偏差［ 7.56 ］
２）安全係数を求めよ。
　$\lambda = normsinv(1-\alpha)$ ＝［ 1.881 ］
３）最大在庫量を求めよ。
　$M=(L+R)\mu+\lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［ 544.33 ］（個）
４）サイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。
　サイクル在庫：$R\mu/2$ ＝［ 100 ］（個）
　安全在庫：$\lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［ 58.62 ］（個）
　理論在庫：$R\mu/2+\lambda\sigma\sqrt{L+R}$ ＝［ 158.62 ］（個）
５）発注日に前の発注の残りはあるか。　［$\boxed{\text{ある}}$・ない］

6.4　プログラムの利用法

メニュー［分析－OR－在庫管理］を選択すると図１に示す在庫管理シミュレータの実行画面が表示される。

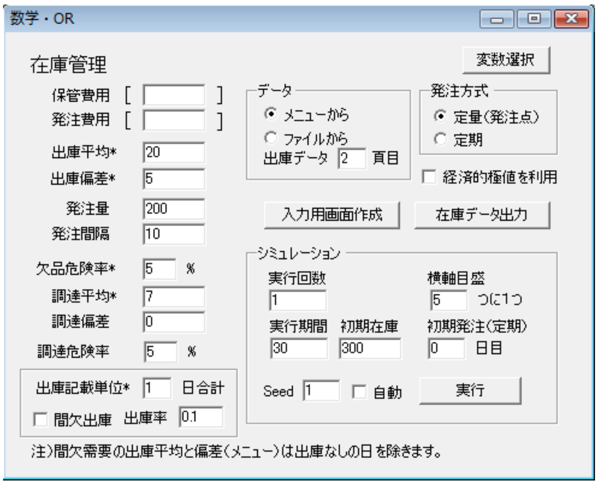


図１　在庫管理シミュレータ実行画面

まず、発注方式グループボックスから、「定量（発注点）」発注方式か、「定期」発注方式かを選択する。在庫管理のためのデータは、データグループボックスによって「メニューから」と「ファイルから」のどちらかを選択できる。メニューから入力する場合は、左側のテキストボックスにデータを記入する。＊の付いているところは必須項目である。左上の［　］の付いた保管費用と発注費用については、右上の「経済的極値を利用」チェックボックスにチェックがある場合のみ有効で、発注量や発注間隔の代わりに経済的発注量または経済的発注

間隔を利用することができる。

リードタイムは「調達平均*」テキストボックスに記入する。リードタイムが確定的な場合は、「調達偏差」テキストボックスを 0 のままにしておく、変動する場合は、リードタイムの標準偏差の値を入れ、調達遅れの危険率を「調達危険率」テキストボックスで指定する。出庫量の平均と出庫量の標準偏差は、何日分かまとめた数値を入れることもあると考え、左下に「出庫記載単位」テキストボックスを設けている。これは 1 日当たりの標準偏差の値が単純にまとめた日数で割った値でなく、まとめた日数の平方根で割った値になることから、学生の間違いを減らすねらいもある。

左のテキストボックスにデータを入れ終わったら、「在庫データ出力」ボタンをクリックすると、図 2a と図 2b のような結果が出力される。

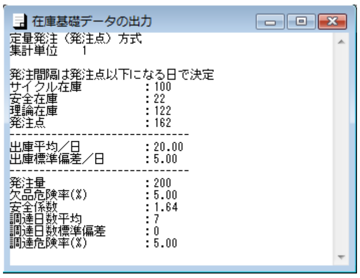


図 2a　定量発注方式の理論値

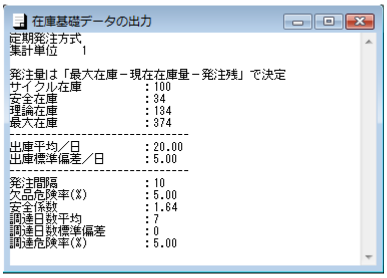


図 2b　定期発注方式の理論値

前者は定量発注方式の理論値の結果であり、後者は定期発注方式の理論値の結果である。

データをファイルから読み込む場合は、図 3a と図 3b のような形式のファイルを用いる。

図 3a　在庫基礎データ

図 3b　出庫データ

このファイルには 3 つの品目のデータが並んでいる。前者は計算用の基礎データで、後者は実際の出庫データである。このファイルを利用する場合、出庫の平均と標準偏差はこのデータから求められる。計算時には、前者を前面に出し、後者のページを「出庫データ」テキストボックスで指定しておく必要がある。「ファイルから」ラジオボタンを選択して、「変数選択」ボタンで品目を選んで実行する。実行結果は、複数の品目があることから、図 4a と図 4b のようにグリッド形式で表示される。

定量発注（発注点）方式

	A	B	C
サイクル在庫	100	150	50
安全在庫	30	38	27
理論在庫	130	188	77
発注点	173	185	147
データ数	30	30	30
出庫最小／日	10	12	2
出庫最大／日	33	50	19
出庫平均／日	20.37	29.33	10.07
出庫標準偏差／日	5.57	8.36	3.74
発注量	200	300	100
欠品危険率(%)	2	2	2
安全係数	2.05	2.05	2.05
調達日数平均	7	5	7
調達日数標準偏差	0	0	3
調達危険率(%)	5	5	5

図 4a　定量発注方式の理論値

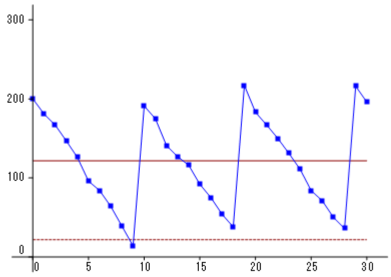
定期発注方式

	A	B	C
サイクル在庫	31	44	15
安全在庫	36	49	30
理論在庫	67	93	45
最大在庫	240	283	180
データ数	30	30	30
出庫最小／日	10	12	2
出庫最大／日	33	50	19
出庫平均／日	20.37	29.33	10.07
出庫標準偏差／日	5.57	8.36	3.74
発注間隔	3	3	3
欠品危険率(%)	2	2	2
安全係数	2.05	2.05	2.05
調達日数平均	7	5	7
調達日数標準偏差	0	0	3
調達危険率(%)	5	5	5

図 4b　定期発注方式の理論値

データのファイル形式は、メニューの「入力用画面作成」ボタンをクリックして、グリッドエディタに枠組みを作成することもできる。

在庫シミュレーションは、出庫量に正規乱数を仮定して実行することができる。出庫量の平均値と標準偏差を指定し、シミュレーショングループボックスの「実行回数」、「実行期間」、「初期在庫」、定期発注方式の場合は「初期発注（定期）」テキストボックスを指定して、「実行」ボタンをクリックと、図 5a のようなシミュレーション結果の折れ線グラフと図 5b のようなテキストによる結果が表示される。



シミュレーション結果

```
結果はシミュレーション回数 1 回の平均です。
実行期間　　30

総出庫　　　604.00
出庫平均　　20.13
出庫標準偏差 5.84
------------------------------
発注回数　　3.00
総発注量　　600.00
発注量平均　200.00
------------------------------
入庫回数　　3.00
総入庫量　　600.00
入庫量平均　200.00
------------------------------
平均在庫量　120.61
欠品回数　　0.000
欠品率　　　0.00%
```

図 5a　シミュレーション結果　　　図 5b　シミュレーション結果まとめ

ここに欠品率は「入庫前日の欠品回数÷入庫回数」で定義している。

これは定量発注方式の結果であるが、シミュレーションは 1 回だけの結果を表示することもできるし、多数回実行してその平均を表示することもできる。人に説明を行う場合は、1 回のシミュレーションを、乱数を変えて何回か行い、これを繰り返した結果は、というように多数回繰り返した結果を表示するのが効果的であろう。定量発注方式の場合、多数回繰り返した場合の結果は図 6 のように時間の経過とともに振幅が小さくなっていく。これは平均を取るという性質上、当然の結果である。

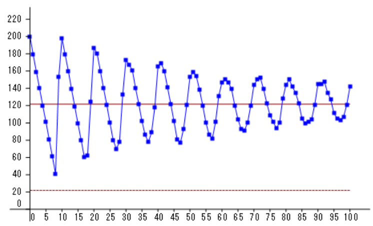


図 2　6 定量発注方式 100 回のシミュレーション結果（平均）

定期発注方式のシミュレーション結果については省略する。

シミュレーションは乱数を用いたもの以外にファイルに保存された実際のデータを用いて実行することもできる。その方法は理論的な在庫データ出力の場合と同様であるので、ここでは省略し、結果のみを図 3.2.7a と図 3.2.7b に示す。

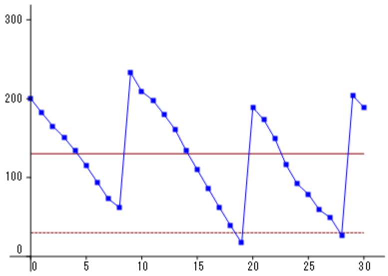


図 7a　シミュレーション結果

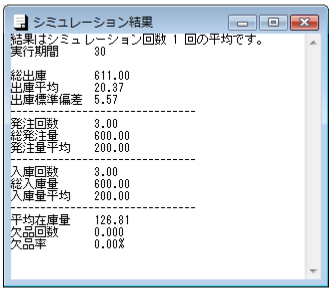


図 7b　シミュレーション結果まとめ

問題１

出庫は 1 週間当たり平均 300 個、標準偏差 15 個、調達期間 7 日のとき、発注量 500 個の定量発注方式として、また発注間隔 5 日のときの定期発注方式として以下の問いに答えよ。但し、欠品の危険率は 5%以下とすること。

１）1 日当たりの出庫平均と出庫標準偏差を求めよ。

　　ヒント：平均の場合の計算は　1 週間の値÷7（300/7）

　　　　　　標準偏差の場合の計算は　1 週間の値÷$\sqrt{7}$（15/7^0.5）

　　出庫平均［　　　　　　］　出庫標準偏差［　　　　　　］

２）欠品の安全係数を求めよ。　［　　　　　　］

定量発注方式

３）定量発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

　　サイクル在庫　［　　　　　　］（個）

　　安全在庫　　　［　　　　　　］（個）

　　理論在庫　　　［　　　　　　］（個）

４）発注点在庫量を求めよ。　［　　　　　　］（個）

定期発注方式

５）定期発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

　　サイクル在庫　［　　　　　　］（個）

　　安全在庫　　　［　　　　　　］（個）

　　理論在庫　　　［　　　　　　］（個）

６）定期発注方式の最大在庫量を求めよ。　［　　　　　　］（個）

７）定期発注方式の場合、発注日に前の発注の残りはあるか。　［ある・ない］

問題２

ファイル在庫管理 1.txt に与えられた、管理用データと出庫データを用いて製品ごとに以下に答えよ。

１）１日当たりの出庫平均と出庫標準偏差を求めよ。

	A	B	C
出庫平均			
出庫標準偏差			

２）欠品の安全係数を求めよ。

	A	B	C
安全係数			

定量発注方式

３）定量発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

	A	B	C
サイクル在庫			
安全在庫			
理論在庫			

４）発注点在庫量を求めよ。

	A	B	C
発注点在庫量			

定期発注方式

５）定期発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

	A	B	C
サイクル在庫			
安全在庫			
理論在庫			

６）定期発注方式の最大在庫量を求めよ。

	A	B	C
最大在庫量			

シミュレーションの問題

問題３

1 日当たりの出庫の平均 25 個、標準偏差 5 個、調達期間 5 日のとき、発注量 150 個の定量発注方式として、また発注間隔 7 日の定期発注方式として、初期在庫量 200、実行期間 50 日で 100 回のシミュレーションを行い以下の問いに答えよ。但し、品切れの危険率は 5%以下とすること。

定量発注方式（発注点方式）

１）理論的なサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫［　　　　　　］

安全在庫　　［　　　　　　］

理論在庫　　［　　　　　　］

２）理論的な発注点在庫量を求めよ。　［　　　　　　］（個）

３）総出庫、出庫平均、出庫標準偏差を求めよ。

総出庫［　　　　　］出庫平均［　　　　　］出庫標準偏差［　　　　　］

４）発注回数、総発注量、発注量平均を求めよ。

発注回数［　　　　　］総発注量［　　　　　］発注量平均［　　　　　］

５）入庫回数、総入庫量、入庫量平均を求めよ。

入庫回数［　　　　　］総入庫量［　　　　　］入庫量平均［　　　　　］

６）欠品回数÷入庫回数で欠品率を表すと、欠品率はいくらか。

欠品率［　　　　　］％

７）平均在庫量を求めよ。　［　　　　　］

８）在庫費用＝平均在庫量×日数×1 日当在庫費用＋発注費用×発注回数、のとき、1 日当在庫費用 10 円、発注費用 8000 円とすると、在庫費用はいくらか。

［　　　　　］

９）理論的には経済的発注量を求めることができるが、これを利用した場合、上の式で在庫費用はいくらになるか。

発注回数［　　　　　］、平均在庫量［　　　　　］より、在庫費用［　　　　　］

定期発注方式

10）理論的なの最大在庫量を求めよ。　［　　　　　　］（個）

11）理論的なサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫［　　　　　　］

安全在庫　　［　　　　　　］

理論在庫　　［　　　　　　］

12）理論在庫は定量発注方式と定期発注方式ではどちらが多いか。

［定量発注方式・定期発注方式］

13）発注回数、総発注量、発注量平均を求めよ。

発注回数［　　　　　］総発注量［　　　　　］発注量平均［　　　　　］

14）入庫回数、総入庫量、入庫量平均を求めよ。

入庫回数［　　　　　］総入庫量［　　　　　］入庫量平均［　　　　　］

15）欠品回数÷入庫回数で欠品率を表すと、欠品率はいくらか。

欠品率［　　　　　］％

16）平均在庫量を求めよ。　［　　　　　］

17）８）と同じ設定で、在庫費用はいくらか。

発注回数［　　　　　］、平均在庫量［　　　　　］より、在庫費用［　　　　　］

問題４

ファイル在庫管理 1.txt に与えられた、管理用データと出庫データの製品Ａに対して以下の問いに答えよ。

１）シミュレーション回数は何回実行すればよいか。［　　　　］回

２）1 日当たりの出庫平均と出庫標準偏差を求めよ。

出庫平均［　　　　　］　出庫標準偏差［　　　　　］

定量発注方式（初期在庫を 200 とする）

３）欠品回数÷入庫回数で欠品率を表すと、欠品率はいくらか。

欠品率［　　　　　］％

４）平均在庫量を求めよ。　［　　　　　］

定期発注方式（初期在庫を 150 とする）

５）欠品回数÷入庫回数で欠品率を表すと、欠品率はいくらか。

欠品率［　　　　　］％

６）平均在庫量を求めよ。　［　　　　　］

問題１解答（桁数を落とした解答）

１）1 日当たりの出庫平均と出庫標準偏差を求めよ。

出庫平均［ 42.86 ］　出庫標準偏差［ 5.67 ］

２）欠品の安全係数を求めよ。　［ 1.64 ］

定量発注方式

３）定量発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫　［ 250 ］（個）

安全在庫　［ 25 ］（個）

理論在庫　［ 275 ］（個）

４）発注点在庫量を求めよ。　［ 325 ］（個）

定期発注方式

５）定期発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

サイクル在庫　［ 107 ］（個）

安全在庫　［ 32 ］（個）

理論在庫　［ 139 ］（個）

６）定期発注方式の最大在庫量を求めよ。　［ 547 ］（個）

７）定期発注方式の場合、発注日に前の発注の残りはあるか。　［$\boxed{\text{ある}}$・ない］

問題２解答

１）1 日当たりの出庫平均と出庫標準偏差を求めよ。

	A	B	C
出庫平均	20.37	29.33	10.07
出庫標準偏差	5.57	8.36	3.74

２）欠品の安全係数を求めよ。

	A	B	C
安全係数	2.05	2.05	2.05

定量発注方式

３）定量発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

	A	B	C
サイクル在庫	100	150	50
安全在庫	30	38	27
理論在庫	130	188	77

４）発注点在庫量を求めよ。

	A	B	C
発注点在庫量	173	185	147

定期発注方式

５）定期発注方式のサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。

	A	B	C
サイクル在庫	31	44	15
安全在庫	36	49	30
理論在庫	67	93	45

６）定期発注方式の最大在庫量を求めよ。

	A	B	C
最大在庫量	240	283	180

問題３解答

定量発注方式（発注点方式）

１）理論的なサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。
　サイクル在庫［ 75 ］
　安全在庫　　［ 18 ］
　理論在庫　　［ 93 ］

２）理論的な発注点在庫量を求めよ。　［ 143 ］（個）

３）総出庫、出庫平均、出庫標準偏差を求めよ。
　総出庫［ 1247.80 ］出庫平均［ 24.96 ］出庫標準偏差［ 4.98 ］

４）発注回数、総発注量、発注量平均を求めよ。
　発注回数［ 8.43 ］総発注量［ 1264.5 ］発注量平均［ 150 ］

５）入庫回数、総入庫量、入庫量平均を求めよ。
　入庫回数［ 7.66 ］総入庫量［ 1149 ］入庫量平均［ 150 ］

６）欠品回数÷入庫回数で欠品率を表すと、欠品率はいくらか。
　欠品率［ 0.91 ］％

７）平均在庫量を求めよ。　［ 98.54 ］

８）在庫費用＝平均在庫量×日数×1 日当在庫費用＋発注費用×発注回数、のとき、1 日当在庫費用 10 円、発注費用 8000 円とすると、在庫費用はいくらか。
　［116710］

９）理論的には経済的発注量を求めることができるが、これを利用した場合、上の式で在庫費用はいくらになるか。
　発注回数［ 6.43 ］、平均在庫量［ 121.64 ］より、在庫費用［ 112260 ］

定期発注方式

10）理論的なの最大在庫量を求めよ。　［ 328 ］（個）

11）理論的なサイクル在庫、安全在庫、理論在庫を求めよ。
　サイクル在庫［ 88 ］
　安全在庫　　［ 28 ］
　理論在庫　　［ 116 ］
12) 理論在庫は定量発注方式と定期発注方式ではどちらが多いか。
　［定量発注方式・$\boxed{\text{定期発注方式}}$］
13）発注回数、総発注量、発注量平均を求めよ。
　発注回数［ 8.00 ］総発注量［ 1352.74 ］発注量平均［ 169.09 ］
14）入庫回数、総入庫量、入庫量平均を求めよ。
　入庫回数［ 7.00 ］総入庫量［ 1176.8 ］入庫量平均［ 168.11 ］
15）欠品回数÷入庫回数で欠品率を表すと、欠品率はいくらか。
　欠品率［ 0.00 ］%
16）平均在庫量を求めよ。　［ 133.22 ］
17）８）と同じ設定で、在庫費用はいくらか。
　発注回数［ 8.00 ］、平均在庫量［ 133.22 ］より、在庫費用［ 130610 ］

問題４解答

ファイル在庫管理 1.txt に与えられた、管理用データと出庫データの製品Ａに対して以下の問いに答えよ。
１）シミュレーション回数は何回実行すればよいか。［ 1 ］回
２）1 日当たりの出庫平均と出庫標準偏差を求めよ。
　出庫平均［ 20.37 ］　出庫標準偏差［ 5.57 ］
定量発注方式（初期在庫を 200 とする）
３）欠品回数÷入庫回数で欠品率を表すと、欠品率はいくらか。
　欠品率［ 0.00 ］%
４）平均在庫量を求めよ。　［ 126.81 ］
定期発注方式（初期在庫を 150 とする）
５）欠品回数÷入庫回数で欠品率を表すと、欠品率はいくらか。
　欠品率［ 0.00 ］%
６）平均在庫量を求めよ。　［ 77.45 ］

6.5　間欠出庫に対する処理

これまで述べてきた方法は、出庫が毎日あり、正規分布に従う場合に適用できる。現実には多少正規分布からずれても、中心極限定理により、理論は有効である。しかし、出庫が時々しかないような場合にはこれまでの理論は利用できなくなる。このような出庫の形態は間欠出庫と呼ばれる（間欠需要ともいう）。我々はまずこの間欠出庫に対して、出庫の有無と出庫があった場合の分布は独立と考える。出庫の有無に対しては出庫率を p とする 2 項分布、出庫があった場合の分布は平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布とする。但し、$\mu \gg \sigma$ を仮定する。

この間欠出庫 1 回の密度関数は図 3.1 のように考えられる。

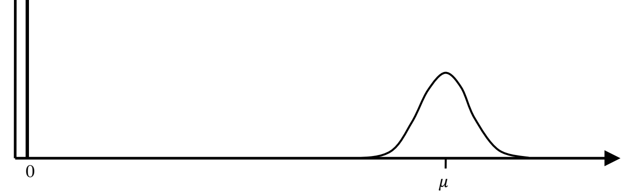


図１　１回の間欠出庫の密度関数

ここで横軸は出庫の量、0 の位置の棒はデルタ関数を表すものとする。棒または山の面積はそれぞれ $1-p, p$ で与えられる。

対象となる期間を L 日として、この間に何回出庫があるか考える。出庫の発生回数は２項分布に従うと仮定しているので、n 回の発生の確率 P_n は以下で与えられる。

$$P_n = {}_L C_n p^n (1-p)^{L-n}$$

今欠品危険率を α とした場合、

$$\sum_{i=n}^{L} P_i > \alpha$$

となる、最大の n を n_{max} とすると、以下の関係となる。

$$\sum_{i=n_{max}}^{L} P_i > \alpha > \sum_{i=n_{max}+1}^{L} P_i \equiv P'$$

この関係は図 3.2 の密度関数で考えると分り易い。

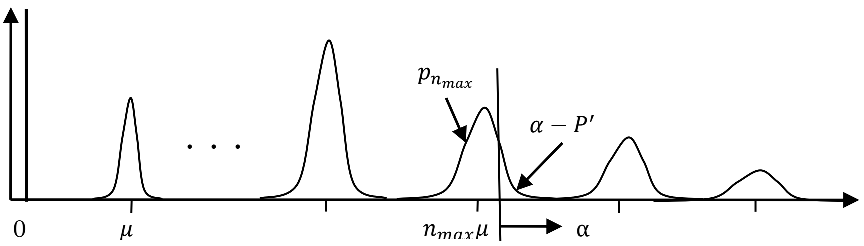


図２　複数回の間欠出庫の密度関数

ここに横軸は出庫の大きさ、それぞれの山の面積は２項分布の確率 P_n で与えられる。

仮定 $\mu \gg \sigma$ から、期間開始時の在庫の量を $(n_{max}+1)\mu$ とすると、出庫変動に関わらず欠品確率は α より小さくなり、$(n_{max}-1)\mu$ にすると、欠品確率は α より大きくなる。（これを仮定と考えてもよい）。これより、我々が出庫の確率分布を考えるのは、在庫の量が $n_{max}\mu$ で、出庫の発生が n_{max} 回あった場合である。

出庫の確率分布によって欠品確率を α にしようとすると、出庫が n_{max} 回発生した事後確率として求めればよい。まず、出庫が $(n_{max}+1)$ 回以上起きる場合は考えないので（在庫の量が $n_{max}\mu$ の場合は必ず欠品）、その確率を P' として欠品確率から引いておく。それを出庫が n_{max} 回起きる確率 $P_{n_{max}}$ で割ると事後確率を求められるので、標準正規分布の分布関数を $F(x)$ として、以下のように安全係数 λ を与えることができる。

$$F(\lambda) = 1 - \frac{\alpha - P'}{P_{n_{max}}}, \qquad P' = \sum_{i=n_{max}+1}^{L} P_i$$

これから出庫の量 D を以下のように定める。

$$D = n_{max}\mu + \lambda\sqrt{n_{max}}\sigma$$

現実の計算では、$\lambda\sqrt{n_{max}}\sigma > \mu/2$ または、$\lambda\sqrt{n_{max}}\sigma < -\mu/2$ の場合、それぞれを $\mu/2$ または $-\mu/2$ で置き変えるようにしている（現在ではこの設定はやめている）。

定量発注方式

定量発注方式の場合、平均の出庫量$n_{max}\mu$に出庫の確率変動部分を加えて、発注点は

$$I = n_{max}\mu + \lambda\sqrt{n_{max}}\sigma$$

で与えればよいが、実際にシミュレーションを行うと欠品が予想より多くあらわれる。そのため、プログラムでは以下のように補正をしている。

$$I = \left(n_{max} + 1/2\right)\mu + \lambda\sqrt{n_{max}}\sigma$$

定期発注方式

定期発注方式では、発注間隔をRとして、入庫の調節ができない期間が$L+R$となる。それゆえ、n回の入庫の発生確率は以下となる。

$$P'_{\max} = {}_{L+R}C_n p^n \left(1-p\right)^{L+R-n}$$

このP'_nを用いて新たに$n'_{\max}$を計算し、信頼係数λ'を求めて、最大在庫量Mを以下のように定める。

$$M = n'_{\max}\mu + \lambda'\sqrt{n'_{\max}}\sigma$$

この場合は補正はない方がシミュレーションで欠品率がより一致する。

この理論をシミュレーションに適用してみる。

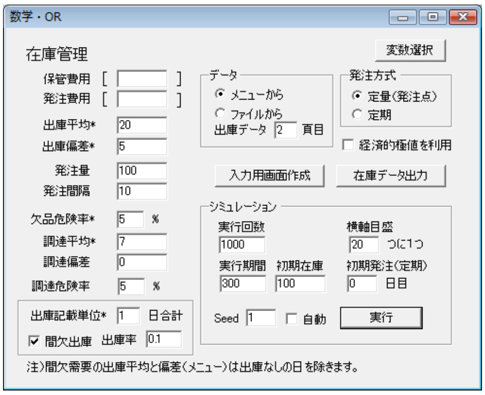


図 3　間欠出庫のシミュレーション

図 3 の設定でシミュレーションを実行すると以下のような結果となった。

シミュレーション回数	1000 回
実行期間	300
平均在庫量	91.88
入庫回数	5.92
欠品回数	0.231
欠品率	3.90%

この他、仮定の範囲内では、欠品危険率を変動させても、出庫率を変動させても、欠品危険率で指定した値とあまり変わらない欠品率が得られた。

７．ＰＥＲＴ

7.1　スケジュール問題とは

製品の製造や建築、イベントの準備など、１つのプロジェクトは多くの作業（工程）で組み立てられていることが多い。このようなプロジェクトに対して、完成まで最短何日かかるのか、各作業はいつから始められるのか、どのくらい遅れが許されるのか、各作業の所要日数に統計的なバラツキがある場合はどう考えるのか、各作業に使える人員に制限がある場合どう扱うのか、各作業に費用をかけて完成までの日数を短くできる場合の費用と日数の関係はどうなるのかなど、様々な疑問に答えるのがスケジュール問題である。

このスケジュール問題の解決法には有名なPERTやCPM（費用を含む問題）、及びそれらを拡張した手法が考案されているが、ここではその中でも最も基本的で重要なPERTについて詳しく見て行くことにする。

表１に例として家屋建築の作業リストを示す。

表１　家屋建築の作業リスト

作業	先行作業	所要日数	作業内容
A		7	設計
B	A	3	地盤工事
C	B	5	基礎工事
D	A	6	資材調達
E	C	3	屋根工事
F	C,D	6	外壁・防水工事
G	E	4	床面工事
H	F,G	5	内壁工事
I	E	3	ガス・水道工事
J	H,I	2	電気工事
K	F,G	10	仕上工事

この作業リストは、ある作業を始める直前にどの作業が終了していなければならないかを表す先行作業と、それぞれの作業の所要日数で表されている。PERT ではこれらの要素の他は考えない。作業内容は理解を助けるためのものである。

7.2　アローダイアグラム

スケジューリング問題の手法では事業をアローダイアグラムと呼ばれる図で表すことが多い。アローダイアグラムでは作業（job）を１つの矢印で表し、作業から他の作業へ移る点を結合点（node）と呼び、○印で表す。図１にその図と名称を示す。

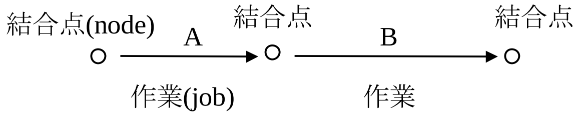


図１　アローダイアグラムの名称

次に、このアローダイアグラムを記述するための規則を示す。

1）矢印の長さと作業時間は無関係である。

2）隣り合った2つの結合点間は1つの作業で結ぶ。(図 2)

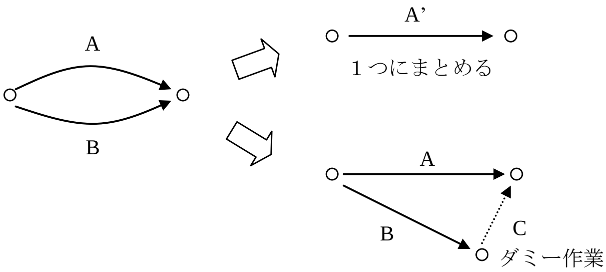


図2　同一結合点間の 2 つの作業の表示法

同一結合点間の 2 つの作業は左のように 2 重に描かず、1 つにまとめるか、ダミー作業を含めて表示する。ダミー作業は作業時間（所要日数）0 の形式的な作業で、点線で表示する。

3）同じ結合点から出る（に入る）作業は共通の先行作業（後続作業）を持つ（図 3)。

作業	先行作業	後続作業
A		C,D
B		C,D
C	A,B	
D	A,B	

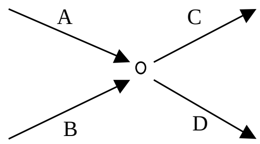


図3　結合点と先行・後続作業

この規則の対偶は、共通の先行作業を持たない作業は同一の結合点から出ないである (図 4)。

作業	先行作業
A	
B	
C	A
D	A,B

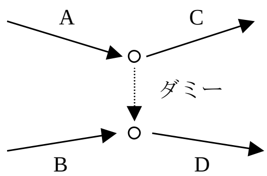


図4　結合点と先行・継続作業（対偶）

4）ループがあってはならない。

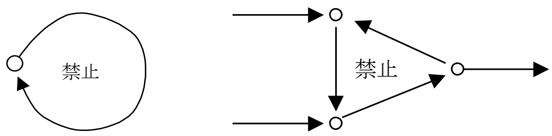


図5　ループの禁止

別表記として、計算機での計算上、結合点に番号を打つが、$i \rightarrow j$ の矢印の場合、$i < j$ でなければならないとする場合もある（我々のプログラムではこの限りでない)。

5）プロジェクトの始点と終点を1つの結合点にまとめる（図 6)。

作業	先行作業
A	
B	
C	A
D	A,B

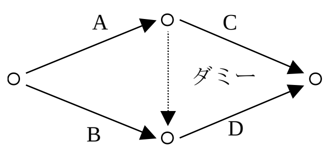


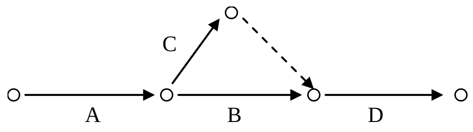
図6　開始と終了の処理

これらの規則を使って、以下の例題を解いてみる。

例　以下のプロジェクトをアローダイアグラムで表せ。

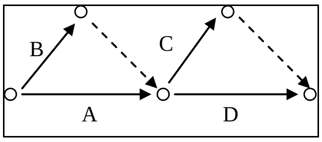
1）

作業	先行作業
A	
B	A
C	A
D	B,C



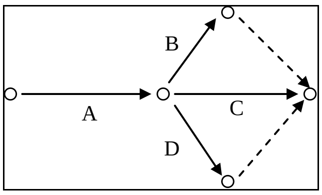
2）

作業	先行作業
A	
B	
C	A,B
D	A,B



3）

作業	先行作業
A	
B	A
C	A
D	A



7.3　PERT の手法

PERT（Program Evaluation and Review Technique）は作業時間に基づくスケジュール管理手法として広く用いられている。1 節で説明に利用した家屋建築の作業リストを元に PERT の用語と手法について説明する。確認が楽なように、表 2 に再度表 1 を示しておく。

表 2　家屋建築の作業リスト

作業	先行作業	作業時間	作業内容
A		7	設計
B	A	3	地盤工事
C	B	5	基礎工事
D	A	6	資材調達
E	C	3	屋根工事
F	C,D	6	外壁・防水工事
G	E	4	床面工事
H	F,G	5	内壁工事
I	E	3	ガス・水道工事
J	H,I	2	電気工事
K	F,G	10	仕上工事

これらの作業をアローダイアグラムで表すと図 7 のように表示される。

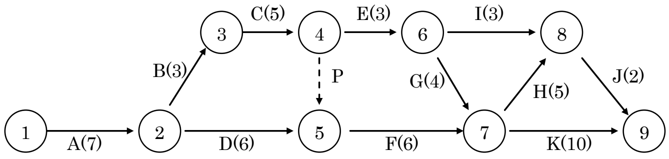


図 7　家屋建築のアローダイアグラム

各結合点に与えられる時刻で重要なものは、最早結合点時刻（Earliest Node Time）と最遅結合点時刻（Latest Node Time）である。前者は各結合点で最も早く次の作業に移れる時刻で、後者はプロジェクトを遂行時刻で仕上げるために、各結合点で遅くとも次の作業に移らなければならない時刻である。これらは以下のように計算される。

1)　最早結合点時刻

各結合点に入る作業（ダミー作業も含む）のうちの最も遅い終了時刻をとる。これを使うと図 8 のようになる。

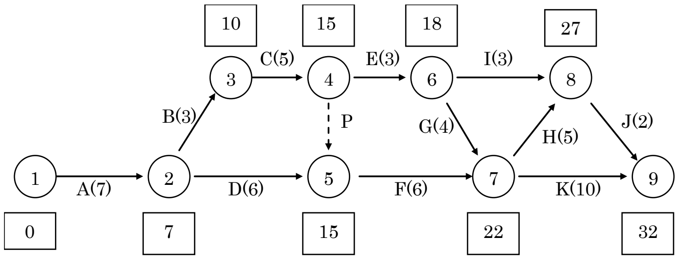


図 8　最早結合点時刻

ここで、最終結合点の最早結合点時刻 32 はプロジェクト遂行時間と呼ばれる。

2)　最遅結合点時刻（Latest Node Time）

これは出て行く作業（ダミー作業も含む）について、開始時刻の最小のものをとる。これを使って最遅結合点時刻を最早結合点時刻の下に描くと、図 9 のようになる。

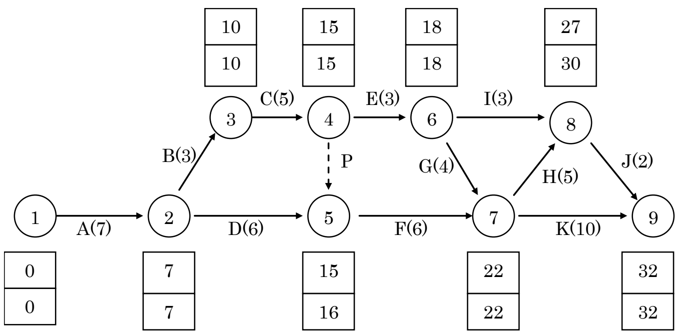


図 9　最遅結合点時刻

これらの作業で非常に重要な作業がある。この作業をつないだものをクリティカル パスというが、次にこれについて説明する。

3) クリティカル パス

これらの作業の中で、プロジェクト遂行時間でプロジェクトを終了するために、遅れることのできない作業をつなぐパスをクリティカル パスという。これは以下の式で求めることができる。即ち、最遅結合点時刻＝最早結合点時刻となる結合点で、次の作業の最早結合点時刻＝最早結合点時刻＋作業時間になるもの、を選択してつないでいく。図 10 にクリティカル パスを太線で描いて示す。

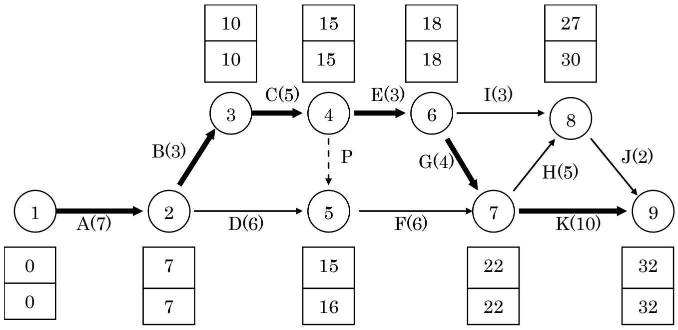
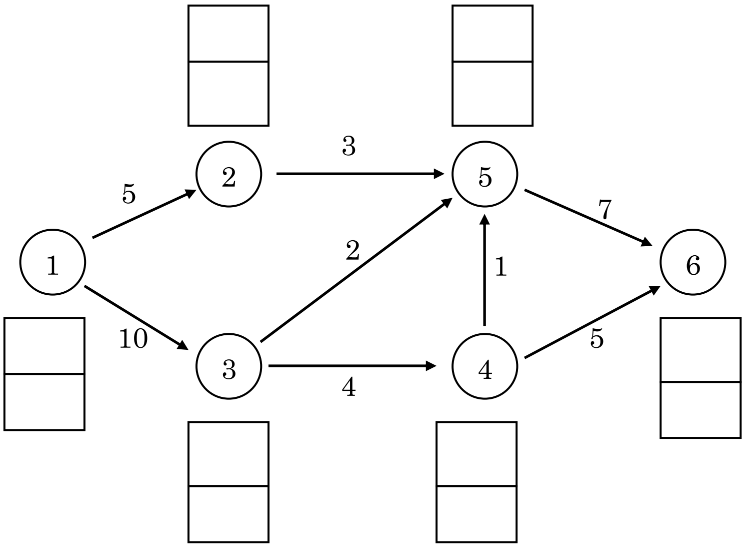


図 10　クリティカル パス

問題（PERT2.txt）

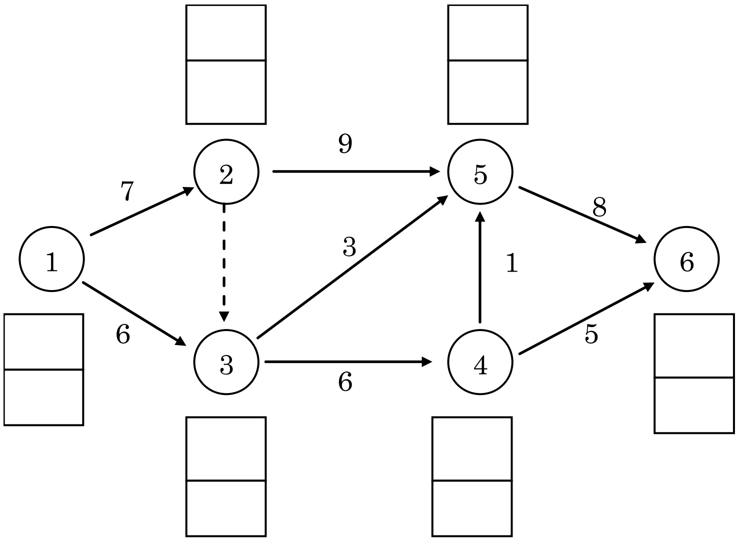
以下のプロジェクトの最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求め、クリティカルパスを示せ。



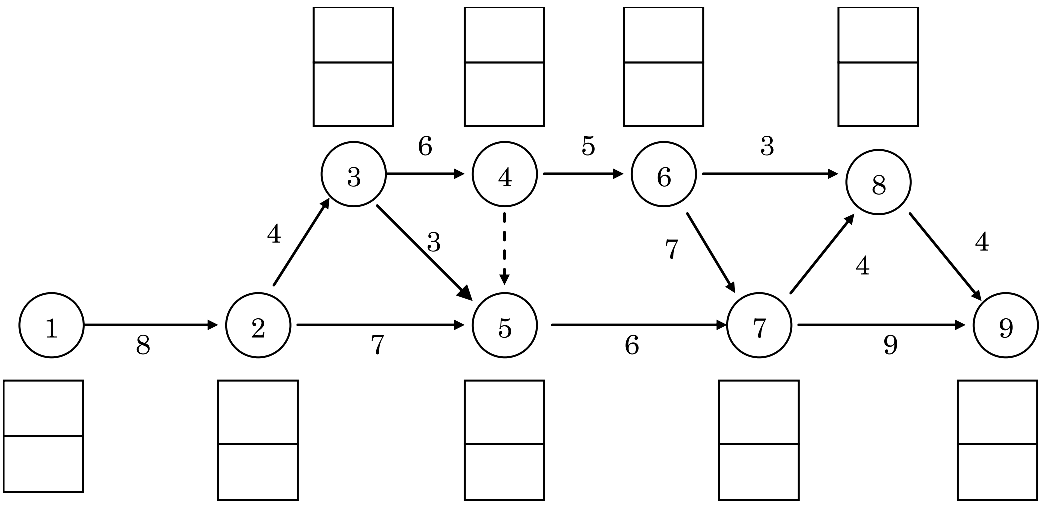
演習（PERT3.txt）

以下のプロジェクトの最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求め、クリティカルパスを示せ。

１）

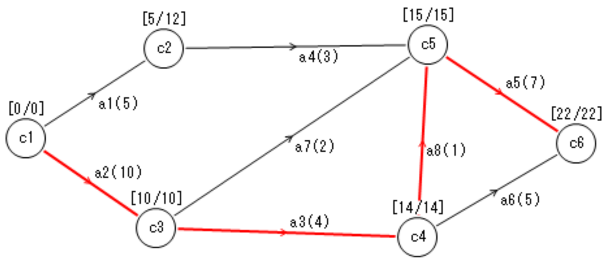


２）



問題解答（パソコンでの解答を示す）

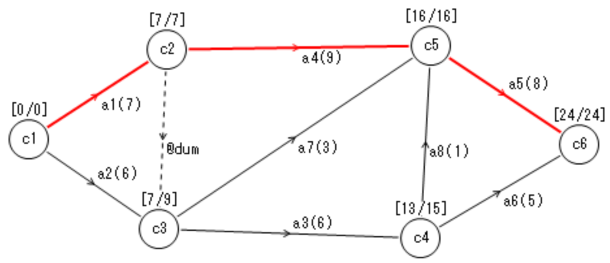
以下のプロジェクトの最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求め、クリティカルパスを示せ。



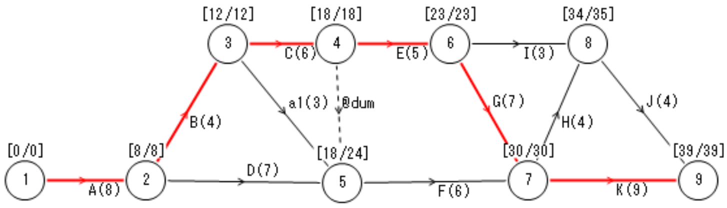
演習解答

以下のプロジェクトの最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求め、クリティカルパスを示せ。

1）



2）



4)　日程計画

得られたアローダイアグラムから､工程を日程計画として1つの表にまとめることは一目で工程を見渡すために重要である。アローダイアグラムで得られた、図11の結合点の関係から、日程表に示す指標は以下のように与えられる。

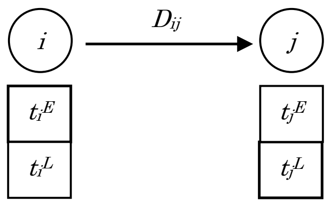


図11　結合点の関係

日程表に示す指標

最早開始時刻 (earliest starting time)　ES_{ij} ＝ 結合点 i の最早結合点時刻

その作業を最も早く開始できる時刻 ＝ t_i^E

最早終了時刻 (earliest finishing time)　EF_{ij}

その作業を最も早く終了できる時刻 ＝ $t_i^E + D_{ij}$

最遅開始時刻 (latest starting time)　LS_{ij}

その作業を遅くとも開始しなければならない時刻 ＝ $t_j^L - D_{ij}$

最遅終了時刻 (latest finishing time)　LF_{ij} ＝ 結合点 j の最遅結合点時刻

その作業を遅くとも終了しなければならない時刻 ＝ t_j^L

時間のゆとり

フリーフロート　FF_{ij}

後続の作業に影響を与えないゆとり　　$FF_{ij} = t_j^E - t_i^E - D_{ij}$

トータルフロート　TF_{ij}

最大限許されるゆとり　$TF_{ij} = t_j^L - t_i^E - D_{ij}$　$(= LF_{ij} - EF_{ij} = LS_{ij} - ES_{ij})$

フリーフロート≦トータルフロート（トータルフロート= 0 がクリティカルパス）

例として図 12 の結合点の関係を用いると、これらの指標は以下となる。

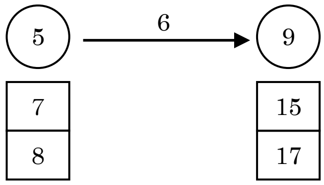


図 12　結合点の関係の例

最早開始時刻　$ES_{59} = 7$

最早終了時刻　$EF_{59} = 7 + 6 = 13$

最遅開始時刻　$LS_{59} = 17 - 6 = 11$

最遅終了時刻　$LF_{59} = 17$

フリーフロート　$FF_{59} = 15 - 7 - 6 = 2$

トータルフロート　$TF_{59} = 17 - 7 - 6 = 4$

最後に、表 1 の例を用いた日程表を表 3 に示しておく。

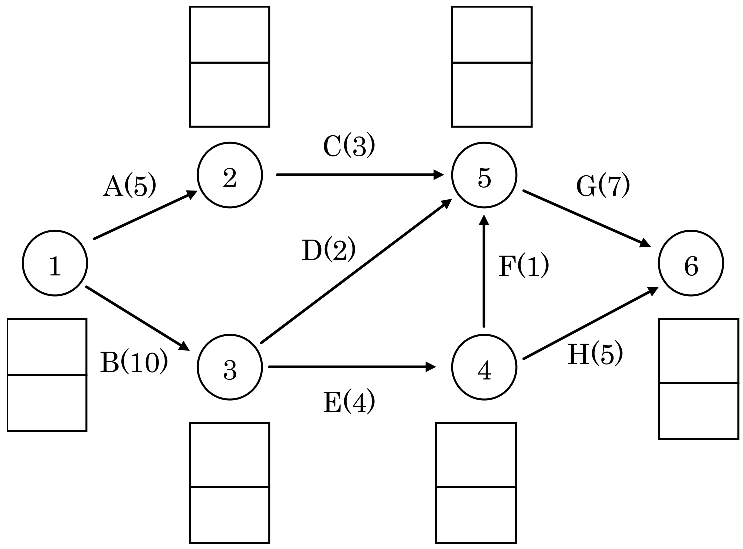
表 3　日程表

作業	最早開始時刻	最早終了時刻	最遅開始時刻	最遅終了時刻	フリーフロート	トータルフロート	クリティカル・パス
A(7)	0	7	0	7	0	0	*
B(3)	7	10	7	10	0	0	*
C(5)	10	15	10	15	0	0	*
D(6)	7	13	10	16	2	3	
E(3)	15	18	15	18	0	0	*
F(6)	15	21	16	22	1	1	
G(4)	18	22	18	22	0	0	*
H(5)	22	27	25	30	0	3	
I(3)	18	21	27	30	6	9	
J(2)	27	29	30	32	3	3	
K(10)	22	32	22	32	0	0	*

クリティカルパス上の作業は遅れに十分注意する。

例（PERT2.txt）

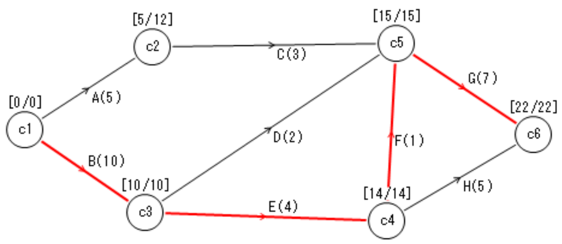
以下のプロジェクトの最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求め（復習）、日程表を作れ。



日程表

作業	最早開始時刻	最早終了時刻	最遅開始時刻	最遅終了時刻	フリーフロート	トータルフロート	クリティカル・パス
A(5)							
B(10)							
C(3)							
D(2)							
E(4)							
F(1)							
G(7)							
H(5)							

例解答（パソコンでの解答を示す。詳細は次節で）



日程表

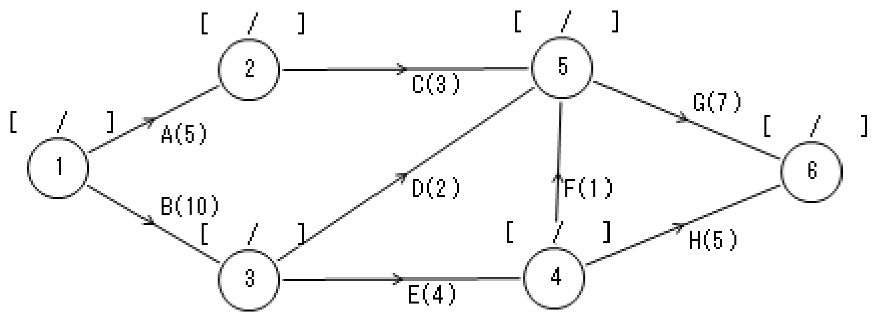
	作業時間	最早開始	最早終了	最遅開始	最遅終了	Free Float	Total Float	Critical Path
A	5	0	5	7	12	0	7	0
B	10	0	10	0	10	0	0	1
C	3	5	8	12	15	7	7	0
D	2	10	12	13	15	3	3	0
E	4	10	14	10	14	0	0	1
F	1	14	15	14	15	0	0	1
G	7	15	22	15	22	0	0	1
H	5	14	19	17	22	3	3	0

演習１（前節例題パソコン版　PERT2.txt）

以下の作業リストをグリッドエディタに入力し、以下の問いに答えよ。

作業名	先行作業	所要日数
A		5
B		10
C	A	3
D	B	2
E	B	4
F	E	1
G	C,D,F	7
H	E	5

１）以下のアローダイアグラムを描き、最早結合点時刻と最遅結合点時刻を書き込め。



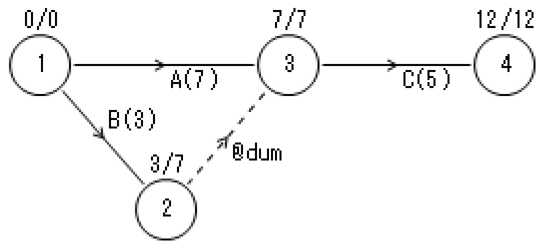
２）以下の日程表を完成させよ。

	作業時間	最早開始時刻	最早終了時刻	最遅開始時刻	最遅終了時刻	Free Float	Total Float	Critical Path
A								
B								
C								
D								
E								
F								
G								
H								

演習２（PERT4.txt）

１）以下のアローダイアグラムとなる作業リストを求めよ。また最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求めよ。

作業名	先行作業	所要日数
A		
B		
C		



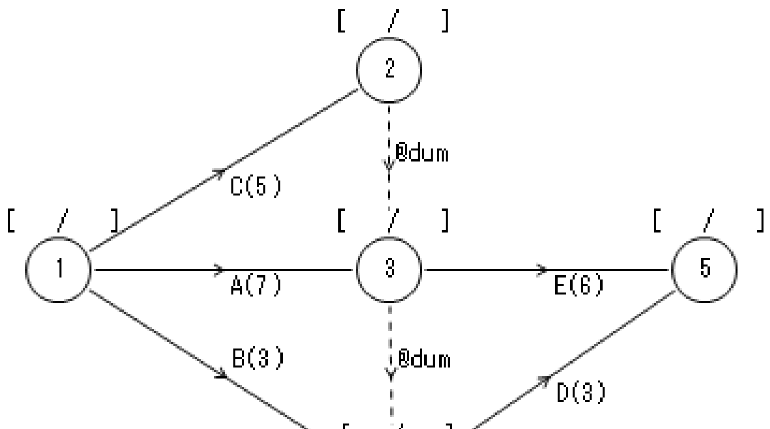
２）以下の日程表を完成させよ。

	作業時間	最早開始時刻	最早終了時刻	最遅開始時刻	最遅終了時刻	Free Float	Total Float	Critical Path
A								
B								
C								

演習３（PERT5.txt）

１）以下のアローダイアグラムとなる作業リストを求めよ。また最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求めよ。

作業名	先行作業	所要日数
A		
B		
C		
D		
E		

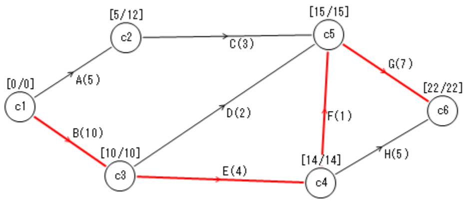


2）以下の日程表を完成させよ。

	作業時間	最早開始時刻	最早終了時刻	最遅開始時刻	最遅終了時刻	Free Float	Total Float	Critical Path
A								
B								
C								
D								
E								

演習１解答

1）以下のアローダイアグラムを描き、最早結合点時刻と最遅結合点時刻を書き込め。



2）以下の日程表を完成させよ。

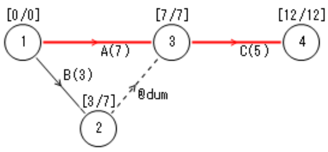
日程表

	作業時間	最早開始	最早終了	最遅開始	最遅終了	Free Float	Total Float	Critical Path
A	5	0	5	7	12	0	7	0
B	10	0	10	0	10	0	0	1
C	3	5	8	12	15	7	7	0
E	4	10	14	10	14	0	0	1
D	2	10	12	13	15	3	3	0
F	1	14	15	14	15	0	0	1
H	5	14	19	17	22	3	3	0
G	7	15	22	15	22	0	0	1

演習２解答

1）以下のアローダイアグラムとなる作業リストを求めよ。また最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求めよ。

作業名	先行作業	所要日数
A		7
B		3
C	A,B	5



2）以下の日程表を完成させよ。

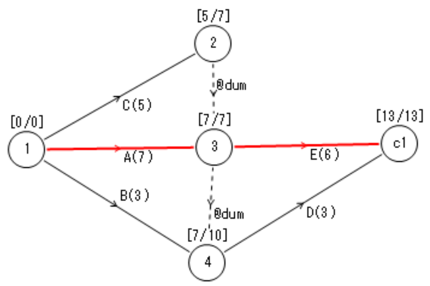
日程表

	作業時間	最早開始	最早終了	最遅開始	最遅終了	Free Float	Total Float	Critical Path
A	7	0	7	0	7	0	0	1
B	3	0	3	4	7	0	4	0
C	5	7	12	7	12	0	0	1

演習３解答

１）以下のアローダイアグラムとなる作業リストを求めよ。また最早結合点時刻と最遅結合点時刻を求めよ。

作業名	先行作業	所要日数
A		7
B		3
C		5
D	A,C	3
E	A,B,C	6



２）以下の日程表を完成させよ。

日程表

	作業時間	最早開始	最早終了	最遅開始	最遅終了	Free Float	Total Float	Critical Path
A	7	0	7	0	7	0	0	1
B	3	0	3	7	10	4	7	0
C	5	0	5	2	7	0	2	0
D	3	7	10	10	13	3	3	0
E	6	7	13	7	13	0	0	1

7.4　コンピュータの利用

スケジュール管理に使われる基本的な手法である PERT を学ぶ際には、アローダイアグラムの作成が一番難しい。メニュー［分析－ＯＲ－PERT］を選択して表示される分析実行画面とそのデータをそれぞれ図 1、図 2 に示す。図 2 の中では作業名、先行作業（ / または , 区切りで入力)、所要日数が利用され、分析実行画面の「アローダイアグラム」ボタンで結果が表示されるが、単純な手直しが必要である。作業内容はメモで、特に分析に必要はない。

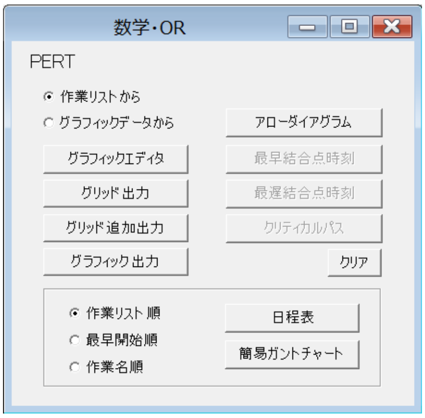
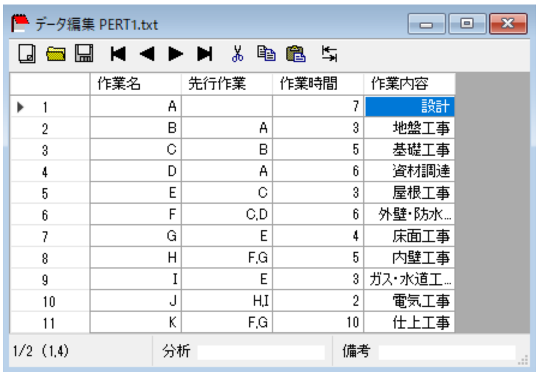


図１　PERT 分析実行画面



	作業名	先行作業	作業時間	作業内容
1	A		7	設計
2	B	A	3	地盤工事
3	C	B	5	基礎工事
4	D	A	6	資材調達
5	E	C	3	屋根工事
6	F	C,D	6	外壁・防水...
7	G	E	4	床面工事
8	H	F,G	5	内壁工事
9	I	E	3	ガス・水道工...
10	J	H,I	2	電気工事
11	K	F,G	10	仕上工事

図 2　PERT 用データ

「アローダイアグラム」ボタンをクリックして、自動出力された図のノード（円形のボックス）の位置を動かし、手直しをした画面が図 3 である。

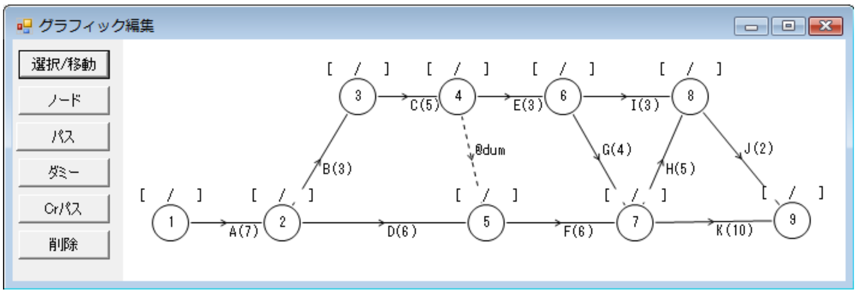


図 3　PERT 図結果画面

矢印の名前の括弧内の値はラインの Value である。

　このデータは、必要があれば、分析実行画面の「グリッド出力」か「グリッド追加出力」で、グリッドエディタに移し、保存しておく。以後はグラフィック画面を見ながら分析を進めるので、「グラフィックデータから」ラジオボタンを選択する。その際、実行画面は図 4 のように変わる。

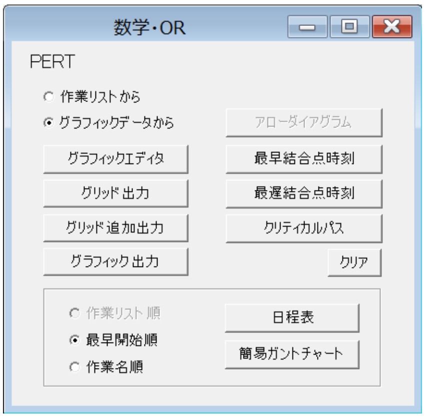


図 4　分析実行画面 2

分析メニューの「最早結合点時刻」をクリックすると、図 5 のように表示される。

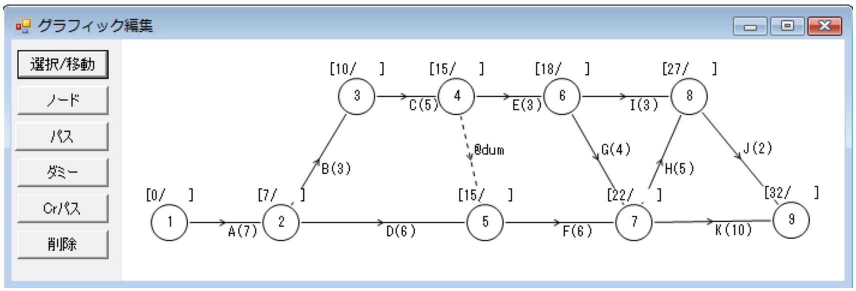


図５　最早結合点時刻

さらに、「最遅結合点時刻」をクリックすると、図６のようになる。

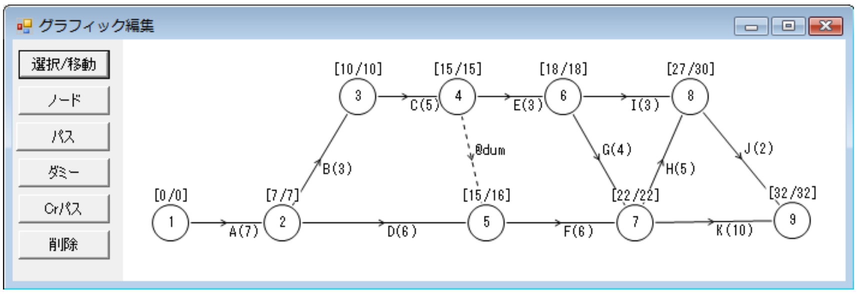


図６　最遅結合点時刻

ここで、ノードの上にある分数表示は、分子のところが最早結合点時刻と呼ばれ、次の仕事を始められる最早の時刻で、分母のところは最遅結合点時刻と呼ばれ、いつまで次の仕事を待てるかを表す時刻である。この分数形式もノードの Value である。Value の型を文字列型にしたのはこのような場合に対応させるためである。

分析メニューの「クリティカルパス」ボタンをクリックすると、図 7 のように赤い線でクリティカルパスが表示される。

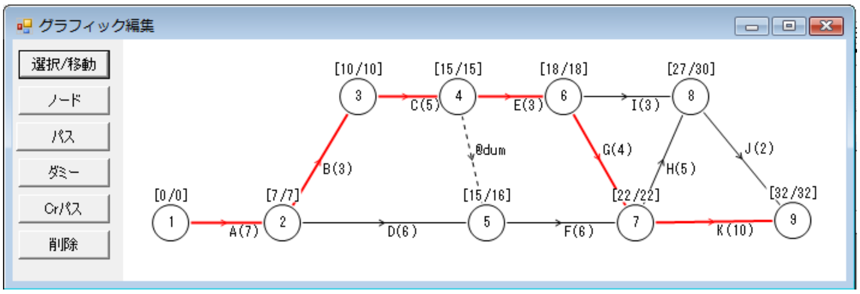


図７　クリティカルパス

さらに「日程表」ボタンをクリックすると、図８のように簡単な日程表が表示される。

日程表

	作業時間	最早開始	最早終了	最遅開始	最遅終了	Free Float	Total Float	Critical Path
A	7	0	7	0	7	0	0	1
B	3	7	10	7	10	0	0	1
D	6	7	13	10	16	2	3	0
C	5	10	15	10	15	0	0	1
E	3	15	18	15	18	0	0	1
F	6	15	21	16	22	1	1	0
G	4	18	22	18	22	0	0	1
I	3	18	21	27	30	6	9	0
H	5	22	27	25	30	0	3	0
K	10	22	32	22	32	0	0	1
J	2	27	29	30	32	3	3	0

図８　日程表

ここに、作業の並び順は分析実行画面内で指定できる。各データの意味は以下の通りである。

最早開始時刻
その作業を最も早く開始できる時刻

最早終了時刻
その作業を最も早く終了できる時刻

最遅開始時刻
その作業を遅くとも開始しなければならない時刻

最遅終了時刻
その作業を遅くとも終了しなければならない時刻

フリーフロート
後続の作業に影響を与えないゆとり

トータルフロート
最大限許されるゆとり（フリーフロート≦トータルフロート）

最後に「簡易ガントチャート」ボタンをクリックすると、図 9 のように、グリッドエディットでガントチャートが表示される。

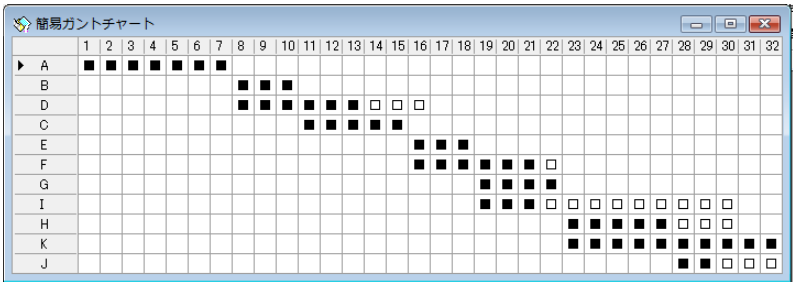


図 9　ガントチャート

ガントチャートで黒い四角は作業時間、白い四角はトータルフローを表す。