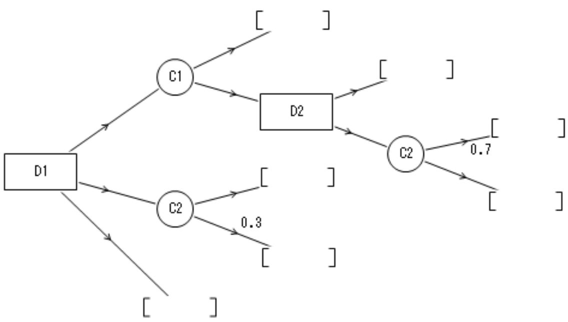
次の章に入る前に、前回の復習をしておきましょう。以下の演習をやって下さい。

演習１　パソコンを使って問題を解く

以下の状況説明を読んで問いに答えよ。

1．A 社に B 社から機械の納入の相談があった。
2．成功した場合の報酬は 2000 万円、失敗した場合の違約金は 600 万円である。
3．A 社は 2 つの開発法 C1 と C2 を持っており、最初にどちらか選べるし、受注しないこともできる（D1）。
4．受注しない場合、信用の損失で 200 万円のダメージとなる。
5．C1 には開発費 500 万円、C2 には開発費 1000 万円がかかる。
6．C1 で成功する確率は 0.4、失敗する確率は 0.6 である。
7．C1 で失敗した場合、違約金を払って中止するか、もう一度 C2 で挑戦が可能である（D2）。
8．C2 で成功する確率は 0.7、失敗する確率は 0.3 である。
9．C2 で失敗した場合、違約金を払って開発を打ち切るしかない。

1）パソコンを使って以下のデシジョンツリーを作り、ボックスとラインをクリックしてデータを完成させよ。



2）C1 で一度失敗した場合の意思決定（D2）の利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

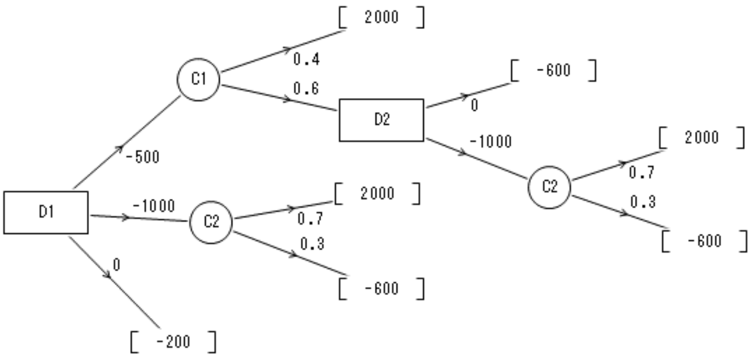
やめる　[　　　　]万円
C2 で再挑戦　[　　　　]万円　［ やめる ・ 再挑戦 ］を選択する。

3）最初の段階（D1）での利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

C1 を選択　[　　　　]万円
C2 を選択　[　　　　]万円
受注しない　[　　　　]万円　［ C1 ・ C2 ・ 受注しない ］を選択する。

演習１解答　パソコンを使って問題を解く

１）パソコンを使って以下のデシジョンツリーを作り、ボックスとラインをクリックしてデータを完成させよ。但し、□から出る線には金額、○から出る線には確率を入れる。



２）C1 で一度失敗した場合の意思決定（D2）の利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

やめる　　　　　［ -600 ］万円
C2 で再挑戦　［ 220 ］万円
［ やめる ・ C2 で再挑戦 ］を選択する。

３）最初の段階（D1）での利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

C1 を選択　　［ 432 ］万円
C2 を選択　　［ 220 ］万円
受注しない　［ -200 ］万円
［ C1 ・ C2 ・ 受注しない ］を選択する。

４．ゲーム理論（意思ある相手を対象とする意思決定）

ゲーム理論の取り扱う問題

これまで意思決定者がすべてを決定できる状況での意思決定問題と外部環境からの影響などで意思決定の成否が変わるような意思決定問題について話をしてきましたが、今回は利害の違う相手がいる場合の意思決定問題です。

ゲーム理論は、OR（Operations Research）と呼ばれる応用数学分野の中で、理論的によく発展してきた手法の一つです。この問題は、これまでのように意思決定者の決定と無関係に状況が決まるものではなく、利害を異にする対戦相手がいることが特徴です。意思決定者は自らの利益の最大化をはかって行動しますが、相手も同様に行動し、結果は相手の行動に依存するような問題です。

以下にゲーム理論の枠組みを表す図を示します。

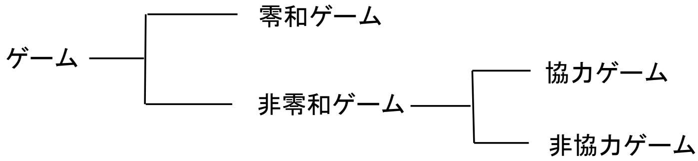


図１　ゲーム理論の大枠

ここで、零和（ぜろわ）ゲームというのは、意思決定者の利得がそのまま対戦相手の損失になるような

問題です。両方の利益と損失（マイナス）を足すと 0 という意味です。また、非零和ゲームというのは両方の利益と損失の合計が 0 にならないような問題です。非零和ゲームには対戦者同士が協力して解決に当たる協力ゲームと、そうでない非協力ゲームがあります。

この授業では､2 人で対戦する零和ゲームだけを取り扱います｡零和 2 人ゲームの中にも、対戦が 1 回だけで決着を付ける純粋戦略零和 2 人ゲームと何度も対戦し、期待値として最大の利得を求める混合戦略零和 2 人ゲームがあります。この回では純粋戦略問題を考えます。

4.1　純粋戦略零和２人ゲーム

純粋戦略（純戦略）ゲームとは１回の打ち手で勝負を決めるゲームのことです。ゲームの利得は、プレイヤー１の戦略とプレイヤー２の戦略により、プレイヤー１が得る利得を表す利得行列によって表されます。プレイヤー１の利得は、零和ゲームなので、そのままプレイヤー２の損失になります。

以下の例を見て下さい。プレイヤー１は３つの戦略を持っていて、プレイヤー２は４つの戦略を持っているとし、その戦略間の利得行列は以下で与えられるものとします。これはプレイヤー１の利得を表すものですが、プレイヤー２にとっては損失を表します。そのため、プレイヤー１はこの中でできるだけ大きな値を得るように戦略を考え、プレイヤー２はできるだけ小さな値を得るように戦略を考えます。

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{プレイヤー２} \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\text{プレイヤー１} &
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

プレイヤー１の戦略ごとの利得は相手に応じて行 1 から行 3 で与えられます。また、プレイヤー２の戦略ごとの損失は列 1 から列 4 で与えられます。2 人のプレイヤーが満足できる解はあるのでしょうか。解法を見て行きましょう。

解法

最初に、プレイヤー１が相手（プレイヤー２）の戦略によって自分が最も得をする戦略を考えます。プレイヤー２が戦略 1 を取った場合、プレイヤー１は戦略 1 をとると利得が 4 で最も得をします。同様にプレイヤー２が戦略 2 をとった場合、プレイヤー１は戦略 1 をとると利得が 3 で最も得をします。これを以下のように行列に印を付けて行きましょう。

プレイヤー２

$$
\text{プレイヤー１}\quad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} &
\begin{pmatrix} {}^{1}4 & {}^{1}3 & 3 & {}^{1}2 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & {}^{1}4 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

利得の左側に付けた 1 の記号はプレイヤー１が選ぶべき戦略を表しています。各列の最大値がそれに相当します。ここでは印は各列 1 つずつですが、２つ以上同じ値の場合もあります。

次にプレイヤー１がそれぞれの戦略をとった場合、プレイヤー２がとるべき戦略は各行の中で最も小さい値です。これは数字がプレイヤー２の損失になっているからです。これを以下のように行列に印を付けて行きます。

プレイヤー２

$$
\text{プレイヤー１}\quad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} &
\begin{pmatrix} {}^{1}4 & {}^{1}3 & 3 & {}^{1}2^{2} \\ 3 & 1 & -3^{2} & -2 \\ 0 & -2^{2} & {}^{1}4 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

ここでは数字を値の左右に付けましたが、手で書く場合は○や△で囲むのもよいでしょう。ここで、1 行 4 列に 2 つの印が付いていますが、この値が 2 人のプレイヤーが納得する利得で、ゲームの値と呼ばれます。また、この戦略の組み合わせは純粋戦略の均衡解と呼ばれます。均衡解は 2 つ以上ある場合もありますし、ない場合もあります。

純粋戦略均衡解［$\boxed{\text{あり}}$・なし］　　戦略［1， 4］　　ゲームの値［　2　］

均衡解が存在しない場合

以下の利得行列で純粋戦略の問題を解いてみて下さい。

プレイヤー２

$$
\text{プレイヤー１}\quad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} &
\begin{pmatrix} {}^{1}5 & 2 & -2^{2} \\ 2 & 1^{2} & 3 \\ -1^{2} & {}^{1}3 & {}^{1}6 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

印が重なるところがありませんので純粋戦略の均衡解はないことになります。

純粋戦略均衡解［あり・$\boxed{\text{なし}}$］　　戦略［　　，　　］　　ゲームの値［　　　］

均衡解という言葉が出ましたが、ここで分かり易い定義を書いておきましょう。

<u>均衡解とは相手が戦略を変えなければ、自分が戦略を変える動機を持たない（戦略を変えても得をしない）解のことです。</u>

この問題は慣れることが大事なので、いくつか問題をやってみましょう。

問題１

利得行列が以下のように与えられる純粋戦略零和２人ゲームの解を求めよ。

プレイヤー１の利得行列

プレイヤー２

$$\text{プレイヤー１}\quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

純粋戦略均衡解［あり・なし］　　戦略［　　,　　］　　ゲームの値［　　　］

問題２

利得行列が以下のように与えられる純粋戦略零和２人ゲームの解を求めよ。

プレイヤー１の利得行列

プレイヤー２

$$\text{プレイヤー１}\quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

純粋戦略均衡解［あり・なし］　　戦略［　　,　　］　　ゲームの値［　　　］

問題３

利得行列が以下のように与えられる純粋戦略零和２人ゲームの解を求めよ。

プレイヤー１の利得行列

プレイヤー２

$$\text{プレイヤー１}\quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

純粋戦略均衡解［あり・なし］　　戦略［　　,　　］　　ゲームの値［　　　］

問題１解答

$$\begin{pmatrix} {}^{1}3^{2} & {}^{1}4 \\ 2 & 1^{2} \end{pmatrix}$$

純粋戦略均衡解［$\boxed{\text{あり}}$・なし］　　戦略［１，１］　　ゲームの値［　３　］

問題２解答

$$\begin{pmatrix} 4 & 2^{2} & 3 \\ 3^{2} & {}^{1}7 & {}^{1}6 \\ {}^{1}5 & 3 & 2^{2} \end{pmatrix}$$

純粋戦略均衡解［あり・$\boxed{\text{なし}}$］　　戦略［　　,　　］　　ゲームの値［　　　］

問題３解答

$$\begin{pmatrix} {}^{1}3 & {}^{1}{-1}^{2} & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3^{2} & -2 \\ -1 & -3^{2} & {}^{1}4 & {}^{1}2 \end{pmatrix}$$

純粋戦略均衡解［$\boxed{\text{あり}}$・なし］　　戦略［１，２］　　ゲームの値［　-1　］