1.2 Σ記号の使用法

このΣという文字はギリシア文字でシグマと読みます。Σ記号は数式表現の基本です。しっかり身に付けるようにしましょう。それでは例を使って意味を説明します。

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{10} = \sum_{i=1}^{10} a_i$$

この例では a_1 から a_{10} までの合計を求めていますが、このような数字（添え字）がある規則で順番に並んだような数列の和を求めるときにΣ記号を利用します。変数（添え字）の i は１ずつ増えてゆく数字を表し、Σ記号の右横は合計される数式の形が i を使って表されています。また、i のはじめの値（初期値）をΣ記号の下に $i=1$ と書き、最後の値（最終値）10 をΣ記号の上に書きます。Σ記号の下の変数と右側の数式内の変数は一致していなければなりません。また、どんな文字を使っても構いませんが、あまり突飛なものは分かり易さの点から避けたほうが良さそうです。以下によく使用する変数の例を挙げておきますので参考にして下さい。

$$\sum_i, \sum_j, \sum_k, \sum_r, \sum_s, \sum_t, \sum_\alpha, \sum_\beta, \cdots$$

それでは具体的に以下の例を見ながら意味を考えてください。

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \cdots + a_{20} = \sum_{i=5}^{20} a_i = \sum_{k=5}^{20} a_k$$

これは変数の初期値が 5 になっている例です。変数を i と k の２通りで表してみました。

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

この例は最終値が一般的に n という形で表わされています。以下にΣ記号に関する問題が用意されています。

問題

以下のΣ記号で表わされた式を具体的に数列の和で表せ。

1）$\sum_{i=1}^{5} {a_i}^2 =$　　2）$\sum_{k=1}^{5} a_k b_k =$　　3）$\sum_{k=1}^{5} a =$

4）$\sum_{i=1}^{10} i =$　　5）$\sum_{i=1}^{5} i^2 =$　　6）$\sum_{i=1}^{4} \frac{i}{2i+1} =$

解答

1）$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2$

2）$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + a_5 b_5$

3）$a + a + a + a + a \ (= 5a)$　　Σの中に i が含まれない場合は同じ値が並びます。

4）$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

5）$1+4+9+16+25$　　i^2 の中に具体的に 1, 2, 3, 4, 5 と入れてみて下さい。

6）$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9}$

問題

以下の数列の和を Σ 記号を用いて表せ。

1） $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{10}=$

2） $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}=$

3） $a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{100}=$

4） $a_1b_2+a_2b_3+a_3b_4+a_4b_5+\cdots a_{99}b_{100}=$

解答

1） $\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{i}$

2） $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}$

3） $\sum_{i=1}^{50}a_{2i}$

4） $\sum_{i=1}^{99}a_ib_{i+1}$　　i の中に、1, 2, 3, …, 99 を入れると上の式を満たします。

演習

以下の Σ 記号の式を書き下せ。

１） $\sum_{i=3}^{5}a_i=$

①$a_2+a_3+a_4+a_5$　　②$a_3+a_4+a_5$　　③$a_3+a_4+a_5+a_6$

２） $\sum_{i=1}^{3}\frac{i}{i+1}=$

①$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$　　②$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$　　③$\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}$

以下の数列を Σ 記号で表せ。

３） $a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{20}=$

①$\sum_{k=5}^{20}a_i$　　②$\sum_{k=5}^{20}a_k$　　③$\sum_{i=5}^{20}a_k$

４） $1+4+9+16+\cdots+81=$

①$\sum_{k=1}^{9}k^2$　　②$\sum_{k=1}^{9}i^2$　　③$\sum_{i=1}^{81}i^2$

【Skip OK】 以後、この記号のところは飛ばして構いません。

さて、ここではΣ記号に関する公式をいくつか例を用いて作ってみましょう。まず以下のような計算を考えてみます。

$$\sum_{i=1}^{3} ca_i = ca_1 + ca_2 + ca_3 = c(a_1 + a_2 + a_3) = c\sum_{i=1}^{3} a_i$$

これからΣ記号の中で式に掛かった定数は、Σ記号の外に出してもよいことが分かります。次に、Σ記号の中での数式の和については、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}(a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) \\ &= \sum_{i=1}^{3} a_i + \sum_{i=1}^{3} b_i\end{aligned}$$

２つのΣに分離してもよいことが分かります。

次に少し複雑な２重のΣ記号について考えてみましょう。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{2}(a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) = (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}) \\ &= (a_{11} + a_{21}) + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23}) = \sum_{j=1}^{3}(a_{1j} + a_{2j}) \\ &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\end{aligned}$$

以上から、合計の順番を換えるだけですから、Σ記号は交換可能であることが分かります。またΣ記号の中で式が添え字毎に積に分離できる場合は、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j &= \sum_{i=1}^{2} a_i(b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + b_3) \\ &= (\sum_{i=1}^{2} a_i)(\sum_{j=1}^{3} b_j)\end{aligned}$$

２つのΣの積に書き直すことができます。

ここで述べた関係については、有限個の数列の場合一般に成り立つ関係です。公式としてまとめておきましょう。

公式

任意の数 c,　数列 a_i，　b_i に関して以下の関係が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j = (\sum_{i=1}^{m} a_i)(\sum_{j=1}^{n} b_j)$$