2.3 行列の性質と演算　【動画】

　ここでは行列の性質と演算との関係で、実際の計算に役立つ公式を以下の行列の例を使って紹介します。この性質を見るために、以下の行列をパソコンに入力して、計算させてみましょう。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ として計算する。

この行列は例えば以下のように入力できます。

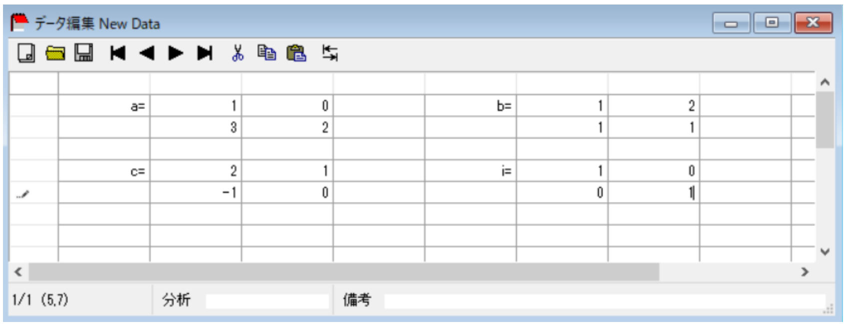

図 1　行列データの入力

計算は［分析－数学－行列計算］で以下の実行画面を開いて実行します。

図 2　行列計算実行画面

それでは公式を見て行きましょう。

1） $\mathbf{IA}=\mathbf{AI}=\mathbf{A}$　（計算できるとき）

　以前単位行列は普通の数でいうと 1 に相当すると言いました。計算できる場合は上の式が成り立ちます。実際に計算してみて下さい。行数と列数を書くと以下のようになります。

$$\mathbf{I}(m\times m)\mathbf{A}(m\times n)=\mathbf{A}(m\times n)$$

$$\mathbf{A}(m\times n)\mathbf{I}(n\times n)=\mathbf{A}(m\times n)$$

パソコン入力で **IA** は、「i*a」です。

2） $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$　結合則

　行列の掛け算で、計算できる場合、結合即は成り立ちます。上の例を使うと以下となります。

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}\qquad \mathbf{A}(\mathbf{BC})=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

これは、通常の数の $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ と同じです。

パソコンでは、左は(a*b)*c、右は a*(b*c)として計算できます。

行列の転置

行列 $\mathbf{A}$ の行と列を変える操作を行列 $\mathbf{A}$ の転置といい、転置された行列を ${}^t\mathbf{A}$（$\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^T, \mathbf{A}'$）などと書いて、行列 $\mathbf{A}$ の転置行列と呼びます。ここでは転置行列として最初の書式を使います。上の例を使うと以下となります。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad {}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

行数と列数を書くと以下のようになります。

$$\mathbf{A}(m \times n) \to {}^t\mathbf{A}(n \times m)$$

転置は計算式ではなく mt() という関数を使います。ここで最初の m は行列（matrix）計算をするという意味で入れています。実際の画面では以下となります。

図 3　行列の転置

このような関数は他にもあり、「解説」ボタンをクリックすると以下のように表示されます。忘れることが多いのでいつも表示しておくことをお勧めします。

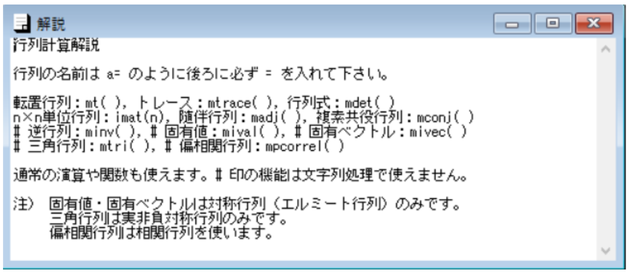

図 4　行列計算の解説

転置行列 ${}^t\mathbf{A}$ の (i, j) 成分は、 a_{ji} です。行と列の添え字がひっくり返っていることが分かります。

3） ${}^t(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}$

この公式は直感的に分かり易いと思います。行列を足して転置をとっても、それぞれ転置をとった行列を足しても同じということです。上の例を使うと以下となります。

$${}^t(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

パソコンでは、左は mt(a+b)、右は mt(a)+mt(b) となります。

4） ${}^t(\mathbf{AB}) = {}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$

　この例は少し分かりにくいと思います。掛けた行列の転置をとると、それぞれ転置をとった行列を、順番をひっくり返して掛けた行列になるということです。これを見るために以下の行列を計算してみます。

$$ {}^t(\mathbf{AB}) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad {}^t\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad {}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} $$

これをやってみると、${}^t(\mathbf{AB})$ が ${}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$ の方に等しいことが分かります。行数と列数を実際に書いてみると以下となります。

$\mathbf{C}(m\times n) = \mathbf{A}(m\times p)\mathbf{B}(p\times n)$　とすると、

$$ {}^t\mathbf{C}(n\times m) = {}^t(\mathbf{AB}) = {}^t\mathbf{B}(n\times p)\,{}^t\mathbf{A}(p\times m) $$

のように行数と列数が一致します。${}^t\mathbf{A}(p\times m)\,{}^t\mathbf{B}(n\times p)$ では計算できるかどうかも分かりません。パソコンでは、${}^t(\mathbf{AB})$ は mt(a*b)、${}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$ は mt(b)*mt(a) です。

　次に以下の例を見て下さい。${}^t(\mathbf{ABC}) = {}^t\mathbf{C}\,{}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$ であることが分かります。

$$ {}^t(\mathbf{ABC}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad {}^t\mathbf{C}\,{}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} $$

パソコンでは、${}^t(\mathbf{ABC})$ は mt(a*b*c)、${}^t\mathbf{C}\,{}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$ は mt©*mt(b)*mt(a) です。

行列のトレース　$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}(n\times n)$

行列のトレースとは、行列の対角成分を足した値（行列ではない）を言います。下の例では以下の通りです。

$$ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A} = 1+2+(-2) = 1 $$

　これをパソコンで実行するには、$\mathbf{A}$ を入力したのち、mtrace(a) とします。トレースは転置ほど使われることが多くないので、関数名は少し長くしています。

　トレースを成分を使って書いてみると、以下のようになります。

成分表示：$tr\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

5） $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$　計算できる場合

　トレースの値は行列の順番を順繰り（サイクリック）に変えても、計算できる場合は同じです。場合によっては計算できないこともあります。

$$ \mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = 9 \qquad \mathrm{tr}(\mathbf{BA}) = 9 $$

$$ \mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) = 5 \qquad \mathrm{tr}(\mathbf{CBA}) = 14 \qquad \mathrm{tr}(\mathbf{BCA}) = 5 $$

上の中央の例は、順番を逆にした例です。この場合は一般に値が違います。abc → bca → cab というのがサイクリックの例です。

演習

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\0&2\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

のとき以下を求めよ。

1） $\mathbf{AB}-2\mathbf{B}=$

① 計算できない　② $\begin{pmatrix}-1&2\\3&-3\\-1&-2\end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix}-1&2\\4&-3\\-1&-2\end{pmatrix}$

2） $\mathbf{CAB}=$

① $\begin{pmatrix}-1&6\\3&4\end{pmatrix}$　② 計算できない　③ $\begin{pmatrix}1&2\\3&3\\-1&0\end{pmatrix}$

3） ${}^{t}(\mathbf{CA})=$

① $\begin{pmatrix}-1&5\\0&2\\3&-3\end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix}-1&0&3\\5&2&-3\end{pmatrix}$　③ 計算できない

4） $\mathrm{tr}(\mathbf{ABC})=$

① 計算できない　② -3　③ -5

【動画】

【C.Analysis: 基礎数学 A_07】