2.4 行列の応用１　【動画】

連立方程式

ここでは簡単な行列の応用の話をします。以下の例を見て下さい。

例

まず左の連立 1 次方程式を見て下さい。次に右のような行列の掛け算を考えます。

$$\begin{aligned} 3x-y&=1 \\ x+y&=3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x-y \\ x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ より、

行列が等しいとはそれぞれ行列の成分が等しいことを考えると、左右の式は同じことになります。そこで以下のように定義すると

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

上の連立方程式は $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ と簡単に書けることが分かります。これが連立 1 次方程式の行列表示です。行列 $\mathbf{A}$ を係数行列と呼びます。ここでは、2 変数の方程式ですが、変数の数が増えてももちろん可能です。連立 1 次方程式を行列の形で書くと、コンピュータを使って答えを求めることがものすごく簡単になります。ここではまず、この形式に慣れ、連立方程式が解を持つかどうかを判定してみます。

問題

以下の連立方程式を行列表示し、実際に解いて答えがあるかどうか判定せよ。

$$\begin{aligned} x+2y&=4 \\ 3x-y&=5 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

解　［解 1 組　$x=$　, $y=$　　・解なし・無数にある］
　　ただ 1 つの解を［持つ・持たない］

$$\begin{aligned} x+2y&=4 \\ 2x+4y&=5 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

解　［解 1 組　$x=$　, $y=$　　・解なし・無数にある］
　　ただ 1 つの解を［持つ・持たない］

$$\begin{aligned} x+2y&=4 \\ 2x+4y&=8 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

解　［解 1 組　$x=$　, $y=$　　・解なし・無数にある］
　　ただ 1 つの解を［持つ・持たない］

解答

$x+2y=4$
$3x-y=5$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$$

解　［$\boxed{\text{解１組}\quad x=2,\ y=1}$・解なし・無数にある］

ただ１つの解を［$\boxed{\text{持つ}}$・持たない］

$x+2y=4$
$2x+4y=5$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$$

左辺は下式＝2×上式、右辺は４と５

解　［解１組　$x=\quad,\ y=\quad$　・$\boxed{\text{解なし}}$・無数にある］

ただ１つの解を［持つ・$\boxed{\text{持たない}}$］

$x+2y=4$
$2x+4y=8$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 8\end{pmatrix}$$

左辺は下式＝2×上式、右辺は４と８

解　［解１組　$x=\quad,\ y=\quad$　・解なし・$\boxed{\text{無数にある}}$］

ただ１つの解を［持つ・$\boxed{\text{持たない}}$］

3 つの問題の行列表示を見て下さい。x, y はの行列は共通です。最初の問題と 2 番目の問題は係数行列が違い、右辺が同じです。また解を 1 つ持つかどうかは違っています。2 番目の問題と 3 番目の問題は係数行列が同じで、右辺が違っています。解は、持たないか、無数に持つの違いはありますが、ただ 1 つの解を持つかどうかでは同じです。このただ 1 つの解ということを考えると、この違いの原因は係数行列にありそうです。

では係数行列の何が、ただ 1 つの解を持つか持たないかを決めているのでしょうか。ここで、係数行列について $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ を計算してみます。

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ の場合　$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1\times(-1)-2\times3=-7\neq0$

ただ 1 つの解を持つ

$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ の場合　$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1\times4-2\times2=0$

ただ 1 つの解を持たない

実は、この $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ が 0 であるかどうかが、ただ 1 つの解を持つかどうかを決める式なのです。このような値 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ を行列式と言い、$|\mathbf{A}|$, $\det\mathbf{A}$ 等と書きます。係数行列の行列式が 0 でなければ、連立方程式はただ１つ（1 組）の解を持ち、係数行列の行列式が 0 であれば、ただ 1 つの解を持たないということになります。

行列式の形は 2 行 2 列では簡単ですが、3 行 3 列以上になると極端に複雑になって行きますので、ここでは省略します。しかし、パソコンを使うとこの計算は簡単です。

パソコンを使ってこの値を計算し、連立方程式がただ１つの答えを持つかどうか判定してみましょう。やってみるのは 100 変数の連立 1 次方程式です。

$$\mathbf{A}(100\times100)=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots \\ 0 & -2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$ の係数行列を持つ連立方程式がただ 1 つの解を持つかどうか判定してみよう。（行列計算 4(100×100).txt）

まず、C.Analysis のメニュー［ファイル－開く］で、デスクトップに展開した「基礎数学 A 基本セット」フォルダーを開き、その中にある「Samples」フォルダーの中から、「行列計算 4(100×100).txt」を選択します。結果は以下のように大きな行列が表示されます。

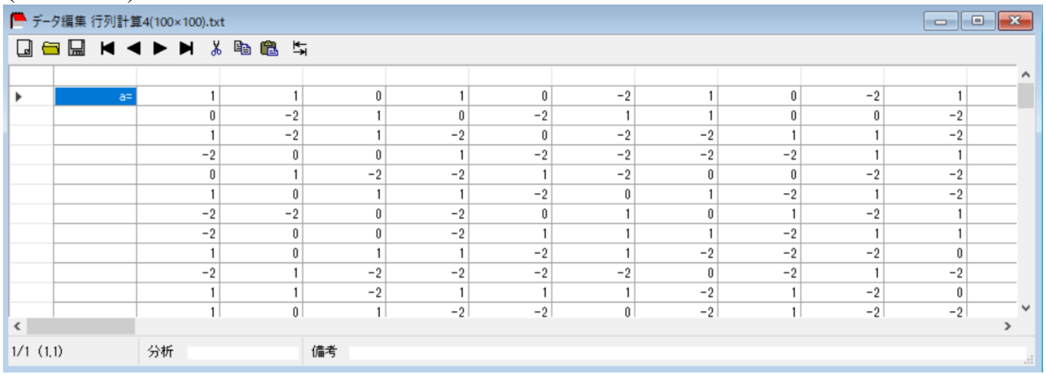

図 1　行列計算 4(100×100).txt

この行列の名前は a となっていますので、行列計算のプログラムで、以下のように指定します。行列式は mdet( ) という関数で与えられます。

図 2　行列式の計算

「実行」ボタンを押すと以下のような結果が表示されます。

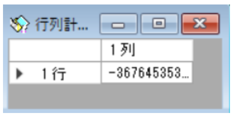

図 3　結果

これは引き伸ばしていくと、以下のような大きな桁数の値です。

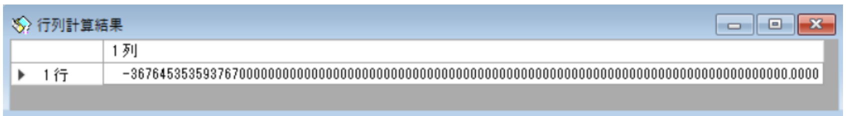

図 4　実際の値

大きさはともあれ、これは 0 ではありませんのでこの係数行列を持つ連立 1 次方程式には、1 つだけ解があることになります。

演習

1）以下の連立方程式を行列表示せよ。

$$\begin{aligned} 3x+2y&=1 \\ 4x+3y&=2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

① $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2）この係数行列から、行列式の値を求めよ。

$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=$

① 1　② 0　③ 17

3）この値から上の連立方程式がただ１つの解を持つかどうか考えよ。

ただ１つの解を［持つ・持たない］

① 持つ　② 持たない

【動画】

[【C.Analysis:基礎数学 A_08】]