2.6 逆行列

これまで行列の和、差、積と話をしてきましたので、今度は割り算の話をします。しかし、割り算と言っても数字の逆数（2 に対して 1/2）のようなものを作る話です。まず以下の例を考えてみましょう。

逆行列とは

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}。$$

上のような行列 $\mathbf{A}$ に対して、右の行列 $\mathbf{B}$ を考え、以下の計算をしてみましょう。結果は以下となります。

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\mathbf{I}\qquad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\mathbf{I}$$

このように、行列 $\mathbf{A}$ に対して、$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I}$ となる行列 $\mathbf{B}$ を、$\mathbf{A}^{-1}$ と書いて、$\mathbf{A}$ の逆行列と呼びます。これは普通の数でいうと、以下のような逆数と同じです。

$$a^{-1}=1/a$$

逆数を掛けることは割ることと同じであるように、行列の場合でも、逆行列を掛けることは、行列の割り算に相当します。逆行列の公式を書いておきましょう。

公式

$$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$$

逆行列の形は 1 つに決まっています。例えば、2 行 2 列の場合、以下のようになります。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\ \text{のとき、}\ \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

この形を見ると $1/|\mathbf{A}|$ の形から、以下のことが分かります。

一般に、逆行列が存在するためには、0 で割ることはできないので、$|\mathbf{A}|\neq 0$ が必要（十分でもある）です。逆行列を持つ行列のことを正則行列ともいいます。

逆行列の計算

実際に簡単な行列の逆行列を計算してみましょう。まず 2 行 2 列の行列です。これは上で公式を示していますし、計算が簡単なので自分でやってみましょう。

問題

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\ \text{のとき、}\qquad \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

解答

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\ \text{のとき、}\ \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{1\times 2-3\times(-1)}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5 & -3/5\\ 1/5 & 1/5\end{pmatrix}$$

3 行 3 列以上の場合は相当複雑なので式は省略します。ここからはパソコンを利用します。

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$ のとき、

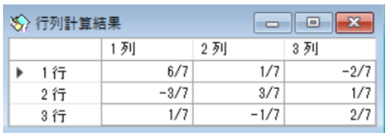
以下の値を求めよ。（分数表示）

1） $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}6 & 1 & -2\\ -3 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$　　2） $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\mathbf{I}$

1）では逆行列を求めています。問いのところに（分数表示）と書いてありますが、これは行列計算の画面で、「分数表示」のチェックボックスにチェックを入れます。逆行列を求める関数は minv( )です。inv は逆という意味の inverse から取っています。

図 1　分数表示

結果は以下のようになります。



	1 列	2 列	3 列
1 行	6/7	1/7	-2/7
2 行	-3/7	3/7	1/7
3 行	1/7	-1/7	2/7

図 2　出力結果

答えは 7 で共通に割られていることから、1/7 としましたが、実際は行列式の値を求めた方が無難です。

2）は a*minv(a)のように入力します。

逆行列の性質

1） $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$　　左辺は minv(a*b)、右辺は minv(b)*minv(a)

右辺が本当に **AB** の逆行列になっているのか証明してみます。結果は **AB** を左右から掛けて **I** になれば証明されたことになります。まず右から掛けてみましょう。

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB})=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{IB}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{I}$$

同様に左から掛けると

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})=\mathbf{I}$$

これで $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ が証明できました。

２）$\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$　　　左辺は mdet(minv(a))、右辺は 1/mdet(a)

これも簡単なので証明してみましょう。

$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ の両辺の行列式を取ります。

左辺　$\left|\mathbf{AA}^{-1}\right| = |\mathbf{A}| \times \left|\mathbf{A}^{-1}\right|$　前回の行列式の性質７）を使いました。

右辺　$|\mathbf{I}| = 1$　これも前回の行列式の性質５）を使いました。

これらから、$\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$

注）単位行列の行列式は 1 ということは覚えておきましょう。

演習　以下を求めよ。(分数表示)

１）$(\mathbf{BC})^{-1} =$

①　$\begin{pmatrix} -5 & -1/3 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}$　②　計算できない　③　$\begin{pmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

２）$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}^{-1} =$

①　$\begin{pmatrix} -5 & -1/3 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}$　②　$\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 & 13 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　③　計算できない

一般に、$(\mathbf{BC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \neq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}^{-1}$

３）$|\mathbf{B}| =$

①　2　　②　0　　③　3

４）$\left|\mathbf{B}^{-1}\right| =$

①　1/2　　②　計算できない　　③　1/3