2.7.3　楕円と双曲線　【試験範囲外】　【動画】

今回は 2 次曲線と呼ばれるものを考えてみましょう。

$$ax^2+bxy+cy^2=1 \qquad (1)$$

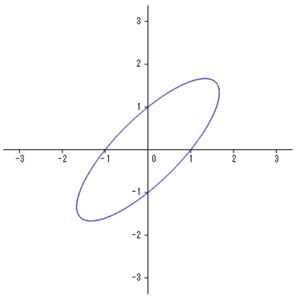
上の数式で表される曲線はどのようなものでしょうか。例えば、$a=1,\ b=0,\ c=1$の場合、$x^2+y^2=1$ となり、半径 1 の円です。一般には、係数の値により楕円（円を含む）か双曲線と呼ばれる図形になります。但し、$ax^2=1$などの直線は除くものとします。実際に以下の例を図に描いてみましょう。

例

楕円

$x^2-1.6xy+y^2=1$

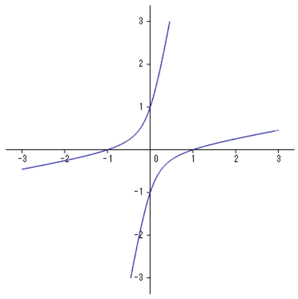
$a=1,\quad b=-1.6,\quad c=1$



双曲線

$x^2-6xy+y^2=1$

$a=1,\quad b=-6,\quad c=1$



これらはパソコンを使って描くことができます。C.Analysis のメニュー［分析－数学－グラフ－2 次元パラメータ表示関数］を選択すると、以下のような実行画面が表示されます。

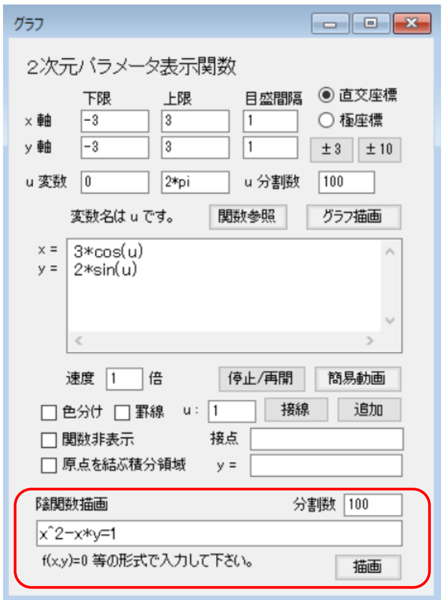


図 1　2 次元パラメータ表示関数実行画面

この一番下に「陰関数描画」というのがあり、そのテキストボックスに関数を書いてやります。陰関数というのは、$y=f(x)$ という形ではなく、$f(x,y)=c$ の形で表された関数のことです。最初の(1)式も陰関数の 1 つです。

最初に、「陰関数描画」の下のテキストボックスに「x^2-1.6*x*y+y^2=1」と入力します。ここで x^2 や y^2 は x^2 や y^2 のことです。入力が終わったら、一番下の「描画」ボタンをクリックします。すると以下のようなグラフが表示されます。

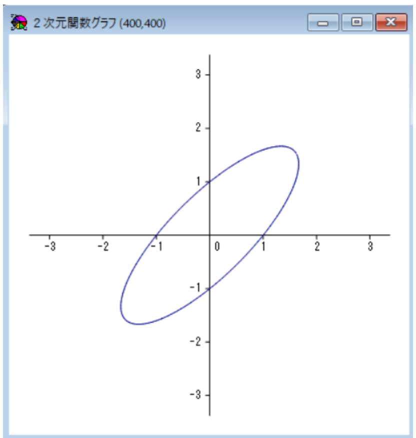


図 2　描画結果

これが最初の左のグラフです。同じようにして、右のグラフも描いてみましょう。左の図は楕円、右の図は双曲線と呼ばれます。では、このグラフのパラメータ a,b,c の何が楕円と双曲線の違いを決めているのでしょうか。これを学ぶ前にまずこれらのグラフの方程式を行列表示する方法を勉強します。

方程式の行列表示

最初に、以下の式を見て下さい。

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax + b/2\,y \\ b/2\,x + cy \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + cy^2$$

この関係で

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると、(1)式は以下のように書けることが分かります。

$$^t\mathbf{xAx} = 1$$

x^2 と y^2 の係数が、 $\mathbf{A}$ の $(1,1)$ 成分と $(2,2)$ 成分になり、 xy の係数が半分ずつ $(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分になっています。例題はどのように表示できるのでしょうか。

$$x^2 - 1.6xy + y^2 = 1 \qquad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

$$x^2 - 6xy + y^2 = 1 \qquad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

これらの式から楕円か双曲線かを見つけるには、式の中央の係数行列 $\mathbf{A}$ の固有値というものを求めます。このプログラムで固有値は mival() という関数で求められます。結果は対角行列の形で表示されます。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathtt{mival(A)} \rightarrow \mathbf{W_A}=\begin{pmatrix} 1.8 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

この対角行列の対角成分に並んでいるのが固有値と呼ばれるものです。これより固有値は、1,8 と 0.2 となります。同様にして、右側の例を見てみます。

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathtt{mival(B)} \rightarrow \mathbf{W_B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

これより固有値は、4 と-2 になります。

以上のことから次の結論になると思われます。

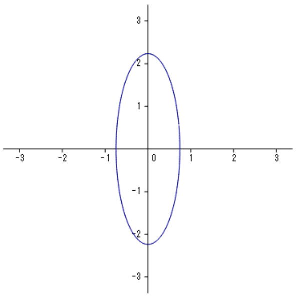
固有値が、正と正の場合　［$\boxed{\text{楕円}}$・双曲線］

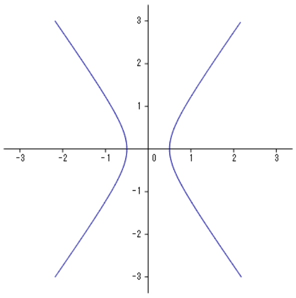
正と負の場合　［楕円・$\boxed{\text{双曲線}}$］

注）右辺が正の場合、固有値が負と負になることはない。

次にこれらの固有値を係数とした方程式のグラフを描いてみましょう。方程式の xy の項は係数が 0 になることから消えています。実際にやってみて下さい。

$1.8x^2+0.2y^2=1$　　　　$4x^2-2y^2=1$





演習

1）以下の方程式を行列表示せよ。

$x^2+5xy+2y^2=1$　　　$\left(\quad\quad\right)\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}=1$

係数行列をみると

① $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 1 & -2.5 \\ -2.5 & 2 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 2 \end{pmatrix}$

2）これは楕円であるか、双曲線であるか、固有値を求めて答えよ。

固有値は（　　　　，　　　　）　　　［楕円・双曲線］

① 4.0495, −1.0495　［楕円・$\boxed{\text{双曲線}}$］

② 4.0495, 1.0495　［$\boxed{\text{楕円}}$・双曲線］

③ −4.0495, −1.0495　［$\boxed{\text{楕円}}$・双曲線］

【動画】

【C.Analysis: 基礎数学 A_13】