2.7.4　楕円と双曲線の拡張　【動画】

前回の授業で楕円と双曲線の区別について学びましたが、復習してみます。

1）以下の方程式を行列表示せよ。

$$x^2+5xy+2y^2=1 \qquad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2.5 \\ 2.5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$$

一番注意することは xy の係数を半分に分けて(1,2)成分と(2,1)成分とすることでした。

2）これは楕円であるか、双曲線であるか、固有値を求めて答えよ。

固有値は $(\lambda_1,\lambda_2)=$ （4.0495, -1.0495）　　［楕円・$\boxed{\text{双曲線}}$］

（λ はラムダと読みます）

固有値はソフトを使って求めますが、mival( ) という関数で求められました。固有値の両方が正の場合は楕円、一方が負の場合は双曲線です。

3）方程式をグラフに表せ。

これもソフトを使いますが、［分析－数学－グラフ－2 次元パラメータ表示関数］をクリックして、一番下の「陰関数描画」のテキストボックスに「x^2+5*x*y+2*y^2=1」と入力して「描画」ボタンをクリックします。結果は以下の図のようになります。

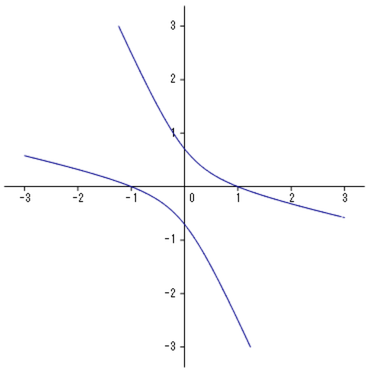


図 1　描画結果

4）回転後はどんな方程式になったか。

$$4.0495\,x'^2-1.0495\,y'^2=1$$

5）どれだけ回転させたか、回転行列 $\mathbf{U}$ （座標系の回転では ${}^t\mathbf{U}$ ）を求めよ。

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} 0.6340 & -0.7733 \\ 0.7733 & 0.6340 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}$$

回転行列もソフトを使って求めますが、mivec( ) という関数で求められます。

$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}$ のように書いたとき、2 つの (2×1) 行列 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を固有ベクトルといいます。

固有ベクトルは、次の関係を満たすことが知られています。

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_1=\lambda_1\mathbf{u}_1,\quad \mathbf{A}\mathbf{u}_2=\lambda_2\mathbf{u}_2$$

３次元に拡張　【試験範囲外】

これまでの話を 3 次元に拡張してみましょう。

1）以下の方程式を行列表示せよ。

$$x^2+y^2+2z^2-6xy-4yz=1 \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=1$$

ここでも xy, yz, zx の係数を 2 つに分け振り分けています。

2）固有値を求めよ。

固有値は $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=$ （4.7986，1.6809，-2.4795）

3）方程式をグラフに表せ。

まずメニュー［分析－数学－グラフ－3 次元パラメータ表示関数］を選択して実行画面を表示します。その中で「陰関数描画」のテキストボックスに「x^2+y^2+2*z^2-6*x*y-4*y*z=1」と書き込み、「陰関数描画」ボタンをクリックすると以下のようなグラフが表示されます。

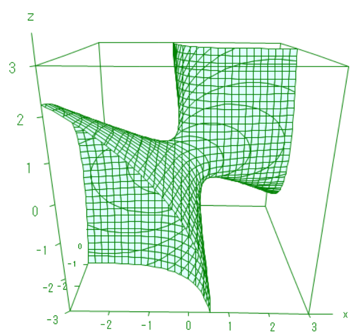


図 2　描画結果

これはマウスの左右のボタンや真ん中のホイールなどで、回転したり距離を変えたりすることができます。

4）回転後はどんな方程式になったか。

$$4.7986\,x'^2+1{,}6809\,y'^2-2.4795\,z'^2=1$$

5）どれだけ回転させたか、回転行列 $\mathbf{U}$ （座標系の回転では ${}^t\mathbf{U}$ ）を求めよ。

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} 0.5406 & 0.5702 & 0.6186 \\ -0.6845 & -0.1294 & 0.7175 \\ 0.4892 & -0.8112 & 0.3203 \end{pmatrix}$$

これは 3 次元の回転行列です。

これも mivec( ) 関数で求められます。

演習

1）以下の方程式を行列表示せよ。

$$x^2-2y^2-z^2-4xy-2zx=1 \qquad (\qquad)\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix}=1$$

① $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2）固有値を求めよ。

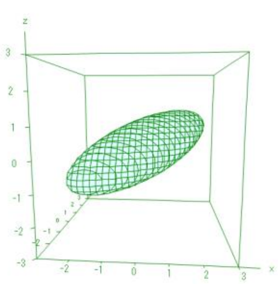
固有値は $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=$ （　　　　　,　　　　　,　　　　　）

①（-2.2491, -1.1464, -3.1028）　②（2.2491, -1.1464, -3.1028）

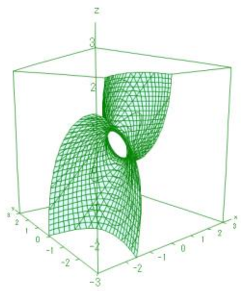
③（2.2491, -1.1464, 3.1028）

3）方程式をグラフに表すとどれにあたるか。番号に○を付けよ。

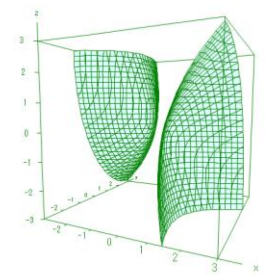
(1)



(2)



(3)



①（1）　②（2）　③（3）

【動画】

[【C.Analysis：基礎数学 A_14】]