授業準拠

基礎数学Ｂ

福山平成大学経営学部

福井　正康

はじめに

著者が福山大学・福山平成大学の経営系学科に赴任して３０年経ちました。その間、数理的に物事を見る目を養ってもらうにはどのように授業を進めるべきか、4 年生で分析的な卒業論文を書くためには何が必要か、いろいろ考えてみました。その結果生まれたのが C.Analysis (College Analysis) です。誰でも自由に使えて、初心者でも使い易い、それがこのソフト開発のコンセプトです。1997 年から C.Analysis を作り始めて、様々な分野の分析手法を加え、今では授業で困ることはほぼなくなりました。また、ネットを通じて多くの方からご意見をいただき、一般的な使用目的でもかなり使えるようになってきました。

このテキストは、福山平成大学の授業用に作ったものですが、統計の初心者の方が一通り気軽に勉強してみたいと思われたときには良い教材になると思います。このテキストの中には Youtube のビデオ教材へのリンクが含まれています。学生さんはそれを携帯で動かし、例題や問題をやっているようです。

このテキストは本当に初心者用なので、本気でやりたい方には不満足かも知れません。もっと数学的に知りたい、もっとソフトの機能を使いたいなど、ご希望がありましたら、総合マニュアルを当たってみて下さい。こちらには著者のつたない知識のすべてが含まれており、日々更新されています。これらが少しでも役に立てたら幸いです。

倉敷にて　福井正康

３章　関数　【動画】

3.1　関数とは

関数とは、ある変数の値を決めるとその値が決まる対応関係をいいます。

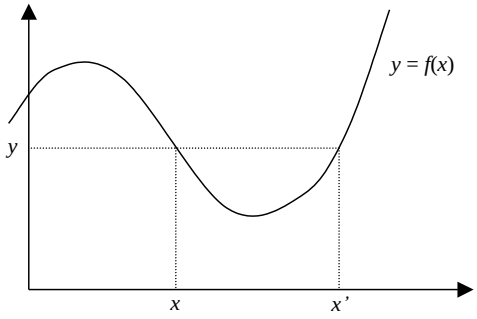


図 1　1 変数関数

図 1 の関数 $y = f(x)$ は 1 変数の関数で、x の値から y の値が決まります。逆に y の値から x の値は一意的には（1 つには）決まりませんので、関数とはなりません。

2 変数の関数 $y = f(x_1, x_2)$ は、図 2 のように曲面によって表わされます。

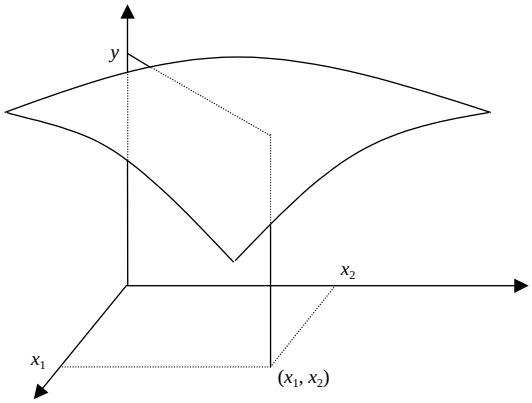


図 2　２変数関数

3.2　1 次関数

一般の 1 次関数は以下の形で表されます。

$$y = ax + b$$

図 3 に見るように係数 a は直線の傾き、係数 b は y 軸との交点を表します。y 軸との交点は $x = 0$ として $y = b$、x 軸との交点は $y = ax + b = 0$ として $x = -b/a$ のように求められます。

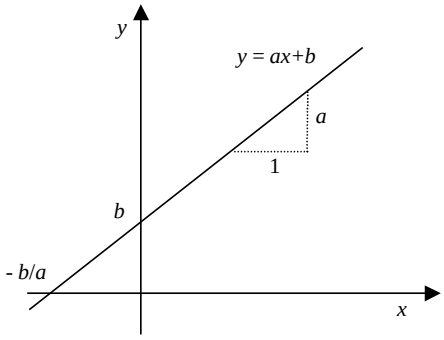


図 3　1 次関数

1 次関数まとめ

$y = ax + b$

傾き：　a　　y 軸との交点：$y = b$　　x 軸との交点：$x = -b/a$

以下の例を使って 1 次関数の性質を見て行きましょう。

例 1　$y = 2x - 1$　のグラフ

傾き

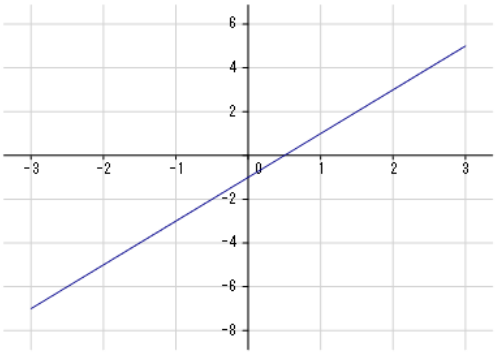
2

y 軸との交点

$y = -1$　（$x = 0$ とおいて求める）

x 軸との交点

$x = \dfrac{1}{2}$　（$y = 0$ とおいて求める）



例 2　$y = 0.5x + 1$　のグラフ

傾き

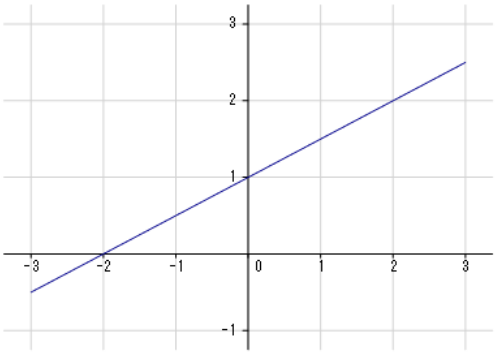
0.5

y 軸との交点

$y = 1$　（$x = 0$ とおいて求める）

x 軸との交点

$x = -2$　（$y = 0$ とおいて求める）



このように、1 次関数なら簡単にグラフに描けると思いますが、中には難しいグラフもあります。そのため、C.Analysis にはグラフを描いたり、交点を求めたりする機能があります。

その使い方を覚えましょう。

C.Analysis のメニュー［分析－数学－グラフ－1 変数関数グラフ］を選択すると、以下のような描画実行画面が表示されます。

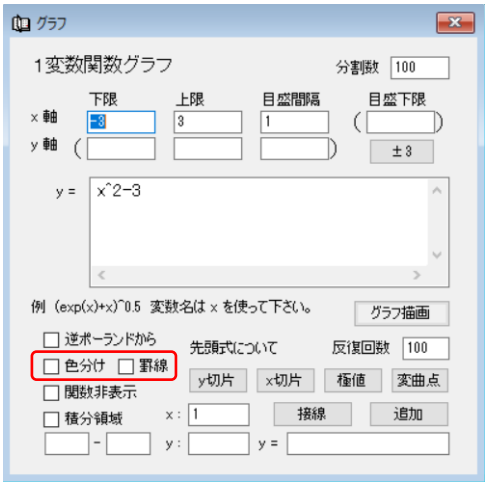


図 4　1 変数関数グラフ描画実行画面

最初にそのまま「グラフ描画」ボタンをクリックしてみましょう。以下のようなグラフが表示されます。

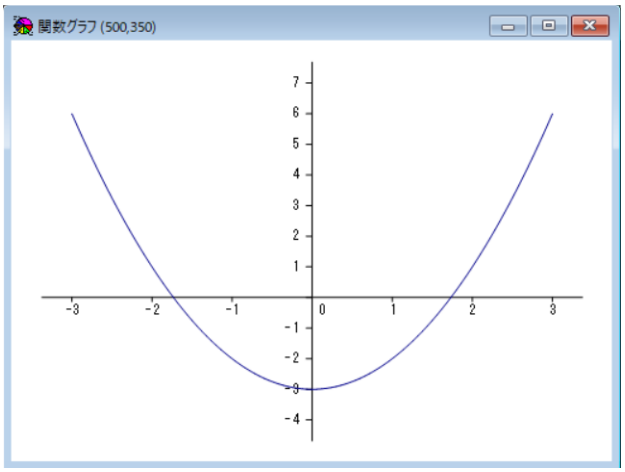


図 5　$y = x^2 - 3$ のグラフ

これは、x 軸の範囲の「下限」を-3、「上限」を 3、「目盛間隔」を 1 にした $y = x^2 - 3$ のグラフです。実行画面の中央のテキストボックスに数式を書きますが、数式は Excel と同じような入力形式で、2 乗は「^2」と表示されます。この表示法には、追って慣れて行きましょう。また、図は Window の枠が付いていますが、以後は特に必要ないので、グラフのメニュー［編集－画面コピー］を使って、Window の中だけを表示します。

例 1 の場合を見てみましょう。グラフでは x 軸の範囲を考えることが大切で、本来はグラフの値の大きさ等を調べて決めます。しかし、この授業ではグラフを描く際のグラフの軸は常に表示しておきますので、それを見て、x 軸の「下限」、「上限」、「目盛間隔」を設定して下さい。慣れたら自分で決められるようになると思います。y 軸については、自動で与え

られますので、設定する必要はありませんが、自分なりに変更したい場合は、値を設定して下さい。

例 1 のグラフを見ると補助軸が表示されています。これは実行画面の「罫線」チェックボックスにチェックを入れることで表示されます。他にも、複数のグラフを同時に描く場合、色を変えたいときは「色分け」チェックボックスにチェックを入れます。この 2 つは常にチェックしておいた方がよいと思います。

最後に、関数形の記述ですが、「y=」の右のテキストボックスに「2*x-1」と入力します。以上の準備が終わったら、「グラフ描画」ボタンをクリックします。以下のようなグラフが表示されます。

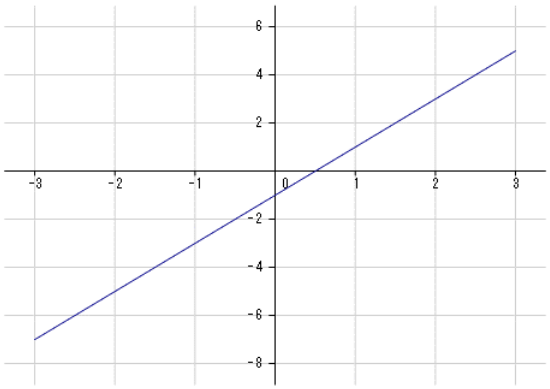


図 6　描画結果

次に「y 切片」と「x 切片」ボタンをそれぞれクリックすると、それぞれ以下のような結果が表示されます。

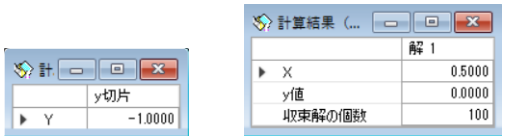


図 7　y 切片と x 切片

y 切片の方は問題ないのですが、x 切片は $2x-1=0$ の方程式を解いた答えです。一般の関数の場合、式が複雑な場合もありますので、方程式の解として表示されています。検算のために y の値も表示されていますが、正しい答えの場合は 0 になります。最後に、1 次関数の傾きについては x の係数で与えられます。

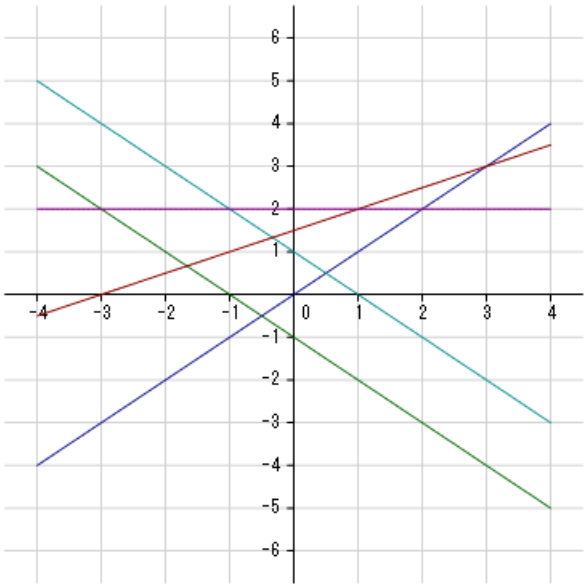
例 2 についても例 1 と同様にできますので、プログラムの説明は省略します。

問題　以下のグラフを表示せよ。

1）$y=x$　　2）$y=-x-1$

3）$y=-x+1$　　4）$y=0.5x+1.5$

5）$y=2$



問題解答

これは、描画の「下限」を −4、「上限」を 4、「目盛間隔」を 1 として、「罫線」、「色分け」チェックボックスにチェックを入れ、改行しながら、テキストボックスに以下のように入力し、「グラフ描画」ボタンをクリックします。グラフを 1 つずつ確認しながら表示して行ってもよいでしょう。

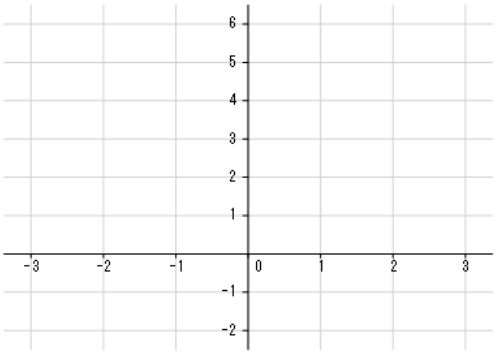
```
x
-x-1
-x+1
0.5*x+1.5
2
```

演習　$y=-x+2$　のグラフについて以下を求め、グラフを描け。

傾き

y 軸との交点

x 軸との交点



グラフ描画の場合は、自分で直線を鉛筆で書き込んで下さい。

3.3　2 次関数　【動画】

一般の 2 次関数は以下の形で表されます。

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

細かいことは後の微分のところでも学びますので、ここでは知識の整理をしておきます。

y 軸との交点は $x = 0$ として $y = c$、x 軸との交点は $y = ax^2 + bx + c = 0$ として、2 次方程式の解の公式として知られる式で求められます。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

次に 2 次関数の係数とグラフの関係を見ておきましょう。

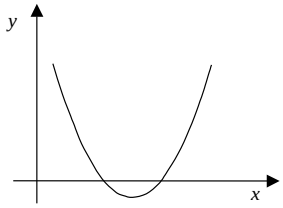


図 1a

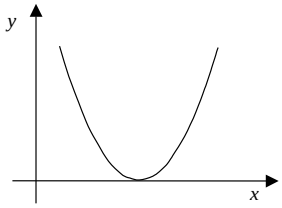


図 1b

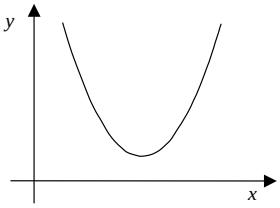


図 1c

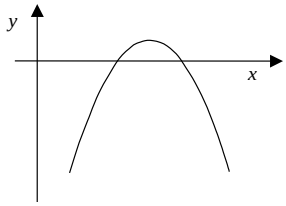


図 1d

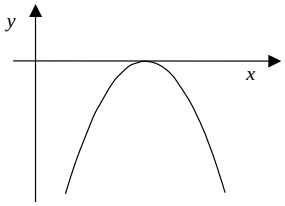


図 1e

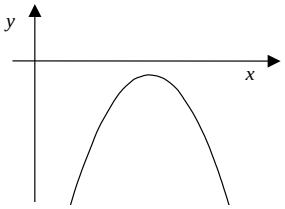


図 1f

図 1 の a, b, c のようにグラフが上向きに開いている場合（下に凸）は $a > 0$ で、d, e, f のように下向きに開いている場合（上に凸）は $a < 0$ です。また、a, d のようにグラフが x 軸と交叉している場合は、解の公式で $b^2 - 4ac > 0$ で、x 軸との交点は 2 つの実数解となり、b, e のようにグラフが x 軸に接している場合は $b^2 - 4ac = 0$ で、x 軸との交点は 1 つの実数解（重根）となります。c, f のように $b^2 - 4ac < 0$ の場合は解の公式の平方根の中が負になり、交点としての実数解はなくなります。2 次曲線のグラフに関する認識はこの程度でよいと思います。

2 次関数の頂点の座標は、関数の変形を少し進めて、

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + b/2a)^2 + c - b^2/4a$$

とし、$x = -b/2a$ のとき、$y = c - b^2/4a$ を得ます。これは、上式の $(x + b/2a)^2$ の部分が $x = -b/2a$ のとき、最小値 0 を取ることから分かります。

それでは例を用いて 2 次関数を見て行きましょう。C.Analysis のメニュー［分析－数学－グラフ－1 変数関数グラフ］を選んで、範囲を設定して「グラフ描画」ボタンをクリックしてグラフを描きながら見て行きましょう。但し、「色分け」と「罫線」は忘れないようにしましょう。

例 1　$y = x^2$　のグラフ

y 軸との交点

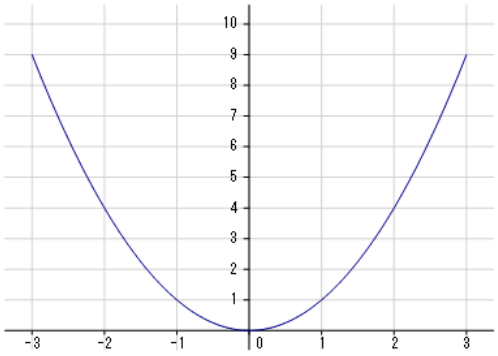
$y = 0$　（$x = 0$ として）

x 軸との交点

$x = 0$　（$y = x^2 = 0$ として）

頂点（下に凸）

$(0, 0)$



表式：x^2

頂点はグラフで見ても簡単ですが、ソフトで見る場合は、「極値」ボタンをクリックして下さい。以下のような結果が表示されます。

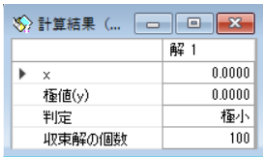


図 2　極値

「極値」は後の微分のところで詳しく学びますが、今は頂点と思って下さい。

例 2　$y = -x^2 + 4$　のグラフ

y 軸との交点

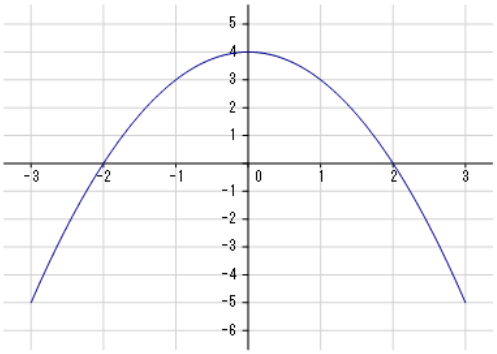
$y = 4$　（$x = 0$ として）

x 軸との交点

$x = \pm 2$　（$y = -x^2 + 4 = 0$ として）

頂点（上に凸）

$(0, 4)$



表式：-x^2+4

例 3　$y = (x+1)^2 + 2$　のグラフ

y 軸との交点

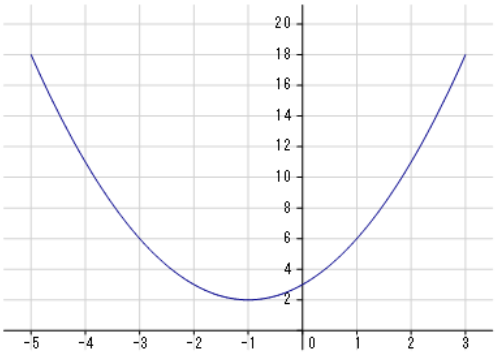
$y = 3$　（$x = 0$ として）

x 軸との交点

なし

頂点（下に凸）

$(-1, 2)$



表式：(x+1)^2+2

この形で書くと頂点が分かり易いです。

例 4　$y = x^2 - 2x - 3$　のグラフ

y 軸との交点

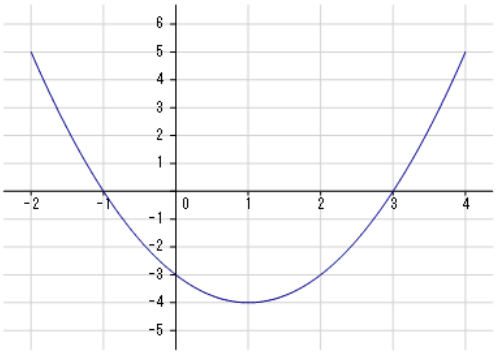
$y = -3$

x 軸との交点

$x = -1, 3$

頂点（下に凸）

$(1, -4)$

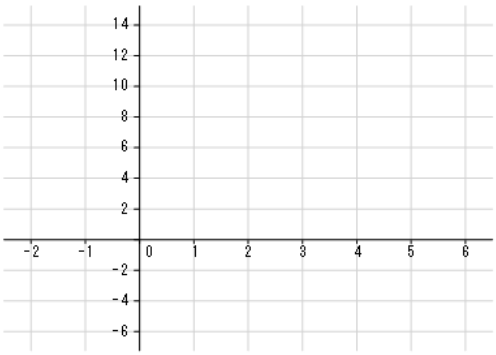


演習　$y = x^2 - 4x$　のグラフについて以下を求めよ。

y 軸との交点

x 軸との交点

頂点（下に凸）



公式　$y = ax^2 + bx + c$　のグラフ

y 軸との交点

c

x 軸との交点　$ax^2 + bx + c = 0$　より（2 次方程式）、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

頂点（$a > 0$ のとき下に凸，$a < 0$ のとき上に凸）

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$　と変形して、$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

2.　2 次関数のグラフの性質　【動画】

ここでは例を使って 2 次関数の性質を簡単にまとめておきます。

例 1　$y = x^2 - 2x - 8$ のグラフ

2 次関数は何を調べたいかによって書き方を変えると、調べたいものが分かり易くなります。上の式と同じですが、

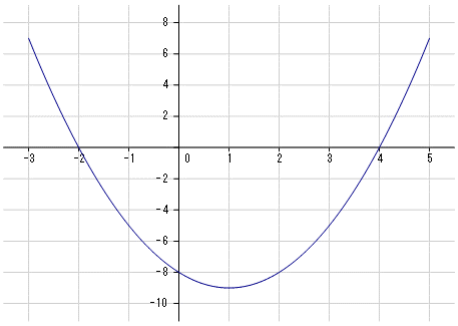
$$y = (x-1)^2 - 9$$

の形で書くと頂点が $(1, -9)$ とはっきりします。

$$y = (x+2)(x-4)$$

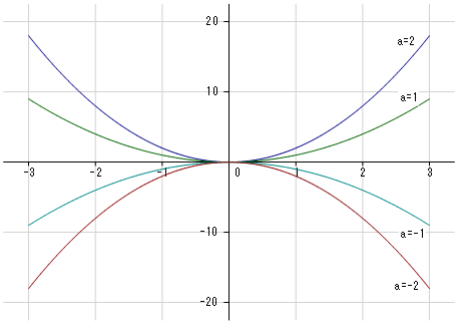
の形で書くと x 軸との交点がはっきりします。

グラフを描くと以下の通りです。メニュー［分析－数学－グラフ－1 変数グラフ］を選択し、実際に書いてみて下さい。書式は、x^2-2*x-8 または、(x-1)^2-9 または、(x+2)*(x-4) のどれかです。



例 2　$y = ax^2$　（$y = 2x^2$，$y = x^2$，$y = -x^2$，$y = -2x^2$）のグラフを比較する

これらのグラフをまとめて描いてみましょう。



$a > 0$ の場合は上に開いており（下に凸）、$a < 0$ の場合は下に開いています（上に凸）。係数 a の値によって開き方が変わってきます。

グラフの平行移動

次にグラフの移動について見てみます。

$$y = f(x) \to y = f(x-a) \qquad (1)$$

(1) 式のように、x を $x-a$ に変えると、グラフは横に a 移動します。もし $a=2$ なら右に 2、$a=-2$ なら左に 2 です。

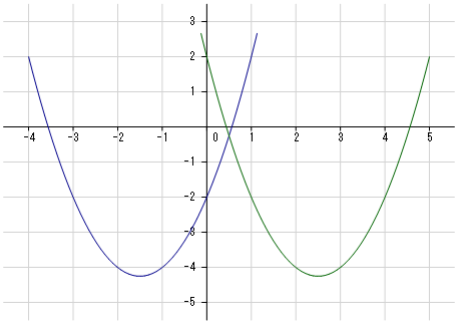
$$y = f(x) \to y - a = f(x) \qquad [\, y = f(x) + a \,] \qquad (2)$$

(2) 式のように、y を $y-a$ に変えると、グラフは縦に a 移動します。もし $a=2$ なら上に 2、$a=-2$ なら下に 2 です。これは右のカギ括弧のように、定数を右辺に移項するとよく分かります。例で見てみましょう。

例

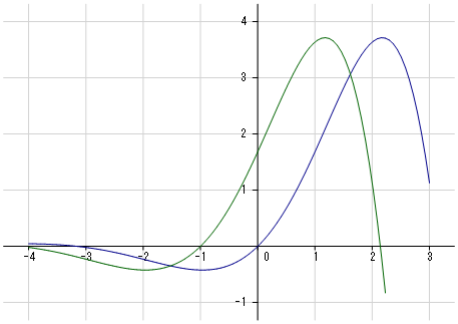
1） $y = x^2 + 3x - 2 \to y = (x-4)^2 + 3(x-4) - 2$　　［横・縦］に［ 4 ］移動

これはグラフを右に 4（横に 4）移動させる例です。実際にグラフを描いてみます。



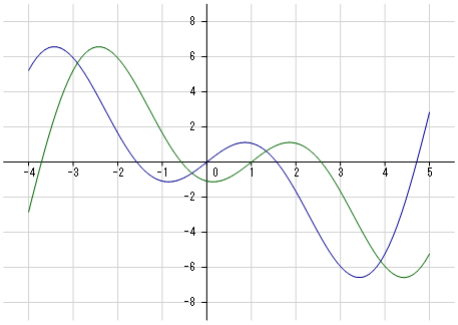
2） $y = 2^x \sin x \to y = 2^{x+1} \sin(x+1)$　　［横・縦］に［ −1 ］移動

これはグラフを左に 1（横に−1）移動させる例です。実際にグラフを描いてみます。



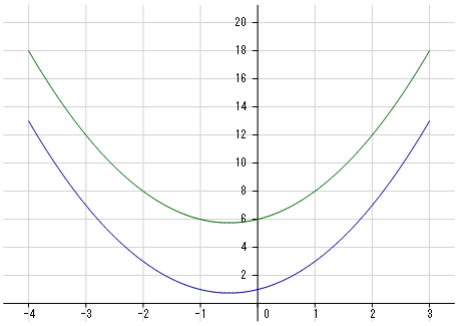
3） $y = 2x\cos x \to y = 2(x-1)\cos(x-1)$　　横に 1 移動

横に 1 移動させるなら、$x \to x-1$ と変えます。実際にグラフを描いてみます。



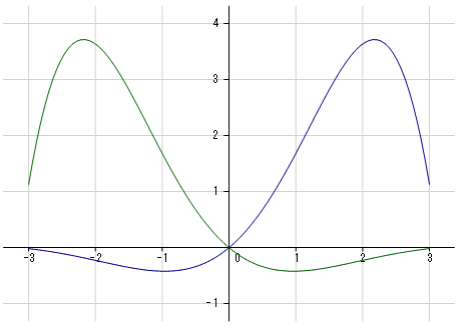
4） $y=x^2+x+1 \to y=x^2+x+6$　　縦に 5 移動

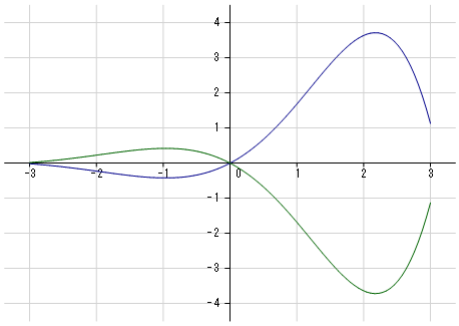
縦に 1 移動させるなら、$y \to y-5$ と変えます。即ち、右辺に 5 を加えます。実際にグラフを描いてみます。



グラフの対称移動

$y=f(x)$ を、$y=f(-x)$ や $y=-f(x)$（$-y=f(x)$）としたらグラフはどのように移動するでしょうか。上で述べた $y=2^x \sin x$ のグラフを使って見てみましょう。まず、$x \to -x$ とした $y=2^{-x}\sin(-x)$ です。ソフトの中では、2^(-x)*sin(-x)と表されます。次に、$y \to -y$ とした $y=-2^x \sin x$ です。これらを並べて描いてみましょう。





$x \to -x$ の場合は、y 軸対称、$y \to -y$ の場合は x 軸対称になります。これらから、両方の変換を行うと、原点対称なグラフが描かれることも分かります。

3.3　３次関数と４次関数

一般に、n 次関数は以下のように書かれます。

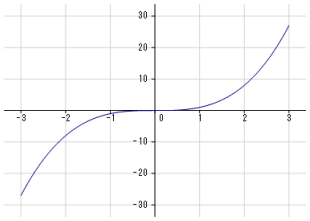
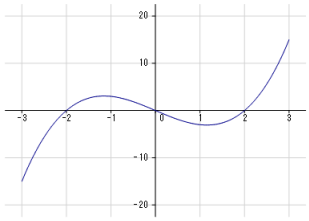
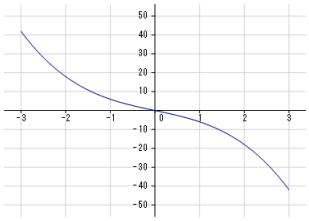
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

この中で 3 次関数と 4 次関数について、どんなものかグラフを見てみましょう。

下限を-3、上限を 3 にして実際にグラフを書いてみて下さい。

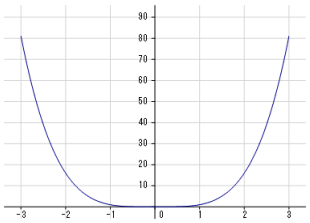
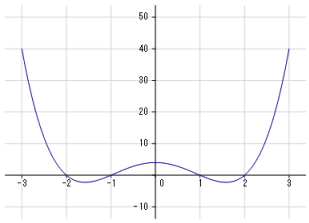
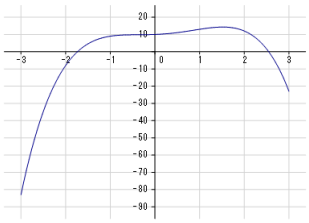
いろいろな３次関数

例　$y = x^3$,　$y = x(x-2)(x+2)$,　$y = -x(x^2+5)$

いろいろな４次関数

例　$y = x^4$,　$y = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$,　$y = -x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 10$

演習

１）以下の変換でグラフはどのように移動するか。

$y = x^2 + x \rightarrow y = (x-2)^2 + (x-2)$　　［横・縦］に［　　］移動

２）$y = -(x+2)(x-1)(x-3)$ の概形を描け。

y 軸との交点を求めよ。

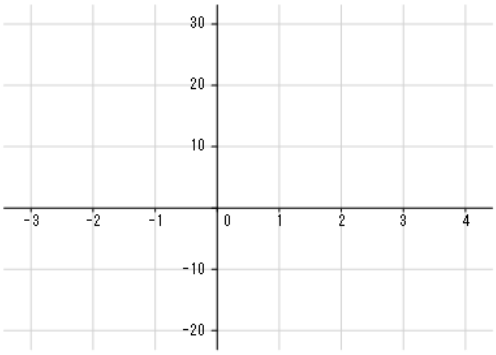
$x = 0$ とおいて、

$y =$

x 軸との交点を３つ求めよ。

$y = 0$ とおいて、（または図から）

$x =$　　,　　,



3.4　指数関数　【動画】

1.　指数の性質

ここでは一般に a^x で表される指数関数の規則や性質について、見て行きたいと思います。まず指数計算の規則を考えましょう。

1）$a^m \times a^n = a^{m+n}$

以下の計算を見てください。

$$2^1 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8 = 2^3$$

$$2^2 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32 = 2^5$$

これらから、ひとつの規則が推測されます。それは、以下のような関係です。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

これは、m, n が自然数（1，2，3，…）の場合に成り立ったものですが、これがすべての数に拡張できると考えることにしましょう。

2）$a^0 = 1$

次の例を見て下さい。計算は 1）のルールに従いました。

$$2^0 \times 2^3 = 2^{0+3} = 2^3 \qquad \text{ゆえに、} 2^0 = 1$$

同様に考えるとすべての正の数 a に対して上の計算は成り立ちます。即ち、1)のルールに従うと以下のように考えるのが自然です。

$$a^0 = 1$$

3）$a^{-n} = 1/a^n$

次の例は指数部分が負の場合です。計算は 1)と 2)のルールに従っています。

$$2^3 \times 2^{-3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1 \qquad \text{ゆえに、} 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

これから、指数部分が負の場合は正にして分母に移ることが分かりました。一般に以下のような規則が導かれます。

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

4）$(a^m)^n = a^{m \times n}$

最後に 1)のルールから離れて、以下の計算を見てみましょう。

$$(2^2)^3 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6$$

これから一般に以下のルールになることが分かります。

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

このルールも一般の数に拡張します。これを使うと $(2^{1/2})^2 = 2^1 = 2$ となり、2 乗して 2 になることから、$2^{1/2} = \sqrt{2}$ であることになります。これは、$2^{1/2} \times 2^{1/2} = 2^1 = 2$ の計算とも合っています。

以下に結果をまとめておきましょう。

公式

1） $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2） $a^0 = 1$

3） $a^{-n} = 1/a^n$

4） $(a^m)^n = a^{m\times n}$　　特に、$a^{1/2} = \sqrt{a}$

問題 1

以下の値を求めよ。

1） $3^2 =$

2） $2^{-1} =$

3） $9^{0.5} =$

4） $0.678^0 =$

5） $2^2 \times 2^{-3} =$

6） $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$

問題 1 解答

1） $3^2 = 3\times 3 = 9$

2） $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

3） $9^{0.5} = \sqrt{9} = 3$

4） $0.678^0 = 1$　（0 乗は 1）

5） $2^2 \times 2^{-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

6） $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 3^2 = 9$

2.　指数関数のグラフ

ここでは $y = a^x$（$a > 0$）で表される指数関数のグラフについて、例を使って考えてみましょう。ソフトへの入力は、2^x,（1/2）^x，2^(−x)（負の場合は括弧を付ける）のようにします。

例　$y = 2^x$，　$y = 3^x$　のグラフ

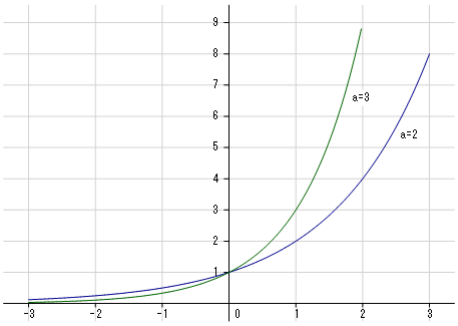


図 1　$y = 2^x, y = 3^x$（グラフの y 軸は 0 から 9 に設定してあります）

例　$y=(1/2)^x=1/2^x=2^{-x}$，　$y=(1/3)^x=1/3^x=3^{-x}$　のグラフ

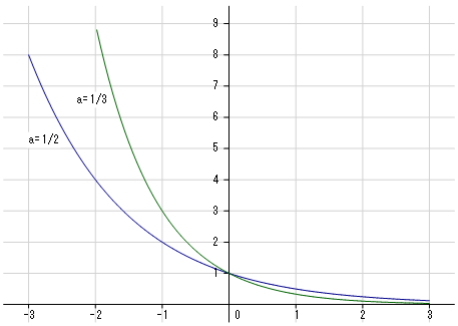


図 2　$y=(1/2)^x$，$y=(1/3)^x$（グラフの y 軸は 0 から 9 に設定してあります）

このグラフで分かることは、

$a>1$のときは右上がり（傾きは$x>0$で急激に変化）

$(0<)a<1$のときは右下がり（傾きは$x<0$で急激に変化）

重要な式と値

$y=a^x$で非常に重要なaの値があります。それは、ネーピアの数と呼ばれる値です。

$y=e^x$（<u>ネーピアの数</u>　$e=2.71828\cdots$）

特にこの関数を Excel などでも、exp(x) と表します。C.Analysis も同様に exp(x) で表しますが、ネーピアの数を ep で表しますので、ep^x でも同じです。exp は exponential（指数関数的）の略です。

この数の特徴として、以下のグラフのように、$x=0$での接線の傾きが 1（接線の式は$y=x+1$）になります。

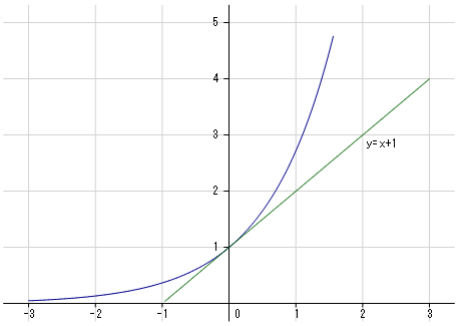


図 3　$y=e^x$（グラフの y 軸は 0 から 5 に設定してあります）

この段階で、この特徴は特に気を引くようなものではありませんが、後に勉強する微分のところでかなり重要になってきます。

問題２　グラフと接線

以下のグラフを描いて、$x=0$ での接線の式を求めよ。

$y=2^x$　　接線の式　$y=$

問題２解答

接線の式　$y=0.693x+1$

まずグラフ描画画面のテキストに 2^x を書いてグラフを表示します。次に、下の方にある「接線」ボタンの左の「x:」に 0 を入れます。その後、「接線」ボタンをクリックすると下のテキストボックスに（y=）「0.693*x+1.000」と表示されます。これが接線を表す式で、隣の「追加」ボタンで、グラフ描画に追加され、描画すると以下のようなグラフになります。

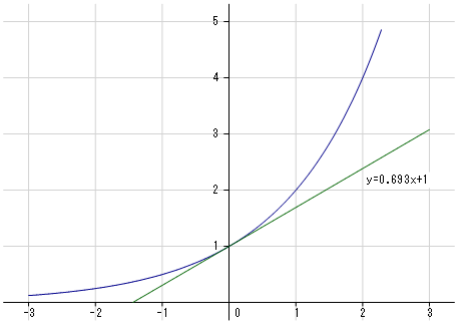


図 4　$y=2^x$（グラフの y 軸は 0 から 5 に設定してあります）

演習１　以下の値を求めよ。

１）$4^2=$　　２）$5^{-1}=$

３）$16^{0.5}=$　　４）$5.239^0=$

演習２　以下のグラフは右上がりか、右下がりか。

１）$y=4^x$　　右［上がり・下がり］

２）$y=0.2^x$　　右［上がり・下がり］

３）$y=4^{-x}=(1/4)^x$　　右［上がり・下がり］

４）$y=1.5^{x-1}-2$　　右［上がり・下がり］

3.5　対数関数　【動画】

対数は後で話すように指数の逆です。指数が a の x 乗の値 $y\ (=a^x)$ を求めるものであったのに対して、対数 $y=\log_a x$ は値 x が a の何乗になるかを求めるものです。実用上では、小さな値（例えば 10）と大きな値（例えば 1, 000, 000）が混在する場合、これを同じグラフの中に表示するのは通常は困難です。しかし、対数を使うとそれが可能になります。例えば $\log_{10}10=1$ と $\log_{10}1{,}000{,}000=6$ ですので、十分グラフとして描けます。規模の大きく異なる会社の売上推移などをグラフで表示する場合、特に有効です。ここでは対数の性質について見て行こうと思います。

1.　対数の性質

ここでは一応証明を付けていますが、使えることが第一なので、特に分からなくても結構です。

１）$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$

以下の例を見て下さい。左側は普通の指数の関係ですが、これを逆の立場で見たものが対数です。

$$2^3=8 \Leftrightarrow \log_2 8=3$$

$$3^4=81 \Leftrightarrow \log_3 81=4$$

即ち、2^3 が 8 であることを、8 は 2 の何乗であるかと言っているのが $\log_2 8$ の表式です。このように対数は指数の見方を変えたもので、log という記号で「難しいもの」などと惑わされてはいけません。ここで $\log_2 8$ の下に付いた 2 を対数の底（てい）といいます。上の関係を文字で一般的に表したものが以下の関係です。

$$a^y=x \Leftrightarrow \log_a x=y$$

これを書き換えて、最初の定義としましょう。

$$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$$

ここで対数関数は指数関数の逆関数になっていることに注意して下さい。つまり、指数と対数は x と y を入れ替えたような関係にあります。指数のところでも述べましたが、対数の底 a については $a>0$、変数 x についても $x>0$（$-\infty<y<\infty$）であることを忘れないで下さい。

２）$\log_a a=1$

これは１）の定義を応用した簡単な例ですが、覚えておくと結構役に立つ公式です。

$$a^1=a \Leftrightarrow \log_a a=1$$

３）$\log_a x^n=n\log_a x$

この公式は非常に重要なものです。以下の式は１）の定義を利用しています。

$$a^y=x^n \Leftrightarrow \log_a x^n=y$$

上の式の左側を書き換えると、$a^{y/n}=x$ ですが、これに１）の定義を利用すると以下の関係

も成り立ちます。

$$a^{y/n} = x \Leftrightarrow \log_a x = \frac{y}{n}$$

上下の式を比較すると、以下の関係があることが分かります。

$$y = \log_a x^n = n \log_a x$$

４） $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

この公式もよく使われます。１）の定義を利用して以下のような関係を示しておきます。

$$x = a^p \Leftrightarrow p = \log_a x$$

$$y = a^q \Leftrightarrow q = \log_a y$$

左側の式で $xy = a^p a^q = a^{p+q}$ を作り、対数をとります。

$$\log_a xy = \log_a a^{p+q}$$

これに３）と２）の関係を使って、以下を得ます。

$$= (p+q)\log_a a = p+q$$

ここで p と q に最初の右側の式を代入すると以下のようになります。

$$= \log_a x + \log_a y$$

これを整理すると、次のようになります。

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

５） $a^{\log_a x} = x$

この関係はそれほど重要ではありませんが、微分などで利用すると便利なので示しておきます。まず１）の定義を利用して、以下の式を与えます。

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$$

右側の式を左側の式に代入すると、以下のようになります。

$$a^{\log_a x} = x$$

６） $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

この公式は対数の底の変換として重要な関係です。５）と３）の関係を用いると以下のような変形が可能です。

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \times \log_b a$$

これから、以下の関係を得ます。

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

これは、対数の底 a を任意の底 b に変える公式になっています。

対数に関する公式をまとめておきましょう。対数の関係は直感的に理解しづらく覚えにくいと思います。

公式

1） $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

2） $\log_a a = 1$

3） $\log_a x^n = n \log_a x$

4） $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

5） $a^{\log_a x} = x$

6） $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

これから対数の具体的な値を計算しますが、そのときに必要な簡単なプログラムを紹介しておきます。C.Analysis のメニュー［分析－数学－簡易計算］を選ぶと以下の簡易的な電卓が表示されます。

図 1　下院に計算実行画面

これは、式を数式のテキストボックスに入れて、「実行」ボタンを押すだけの簡単なものです。数式の入力法は順次見て行きましょう。

問題

1） $\log_3 9 =$　　2） $\log_{10} 1000 =$

3） $\log_2 1/16 = \log_2 2^{-4} =$

4） $\log_e 5 =$　（自然対数　log( ) 関数）

5） $\log_{10} 5 =$　（常用対数　log10( ) 関数）

6） $\log_2 5 = \log_e 5 / \log_e 2 =$　公式６）利用

問題解答

1） $\log_3 9 = 2$　　2） $\log_{10} 1000 = 3$

3） $\log_2 1/16 = \log_2 2^{-4} = -4 \log_2 2 = -4$

4） $\log_e 5 = 1.60944$　（自然対数　log( ) 関数、計算は log(5) ）

5） $\log_{10} 5 = 0.698970$　（常用対数　log10( ) 関数、計算は log10(5) ）

6） $\log_2 5 = \log_e 5 / \log_e 2 = 2.32193$　（公式６）利用、計算は log(5)/log(2)

2.　対数関数のグラフ

自然対数　$y=\log_e x$ のグラフ　　常用対数　$y=\log_{10} x$　のグラフ

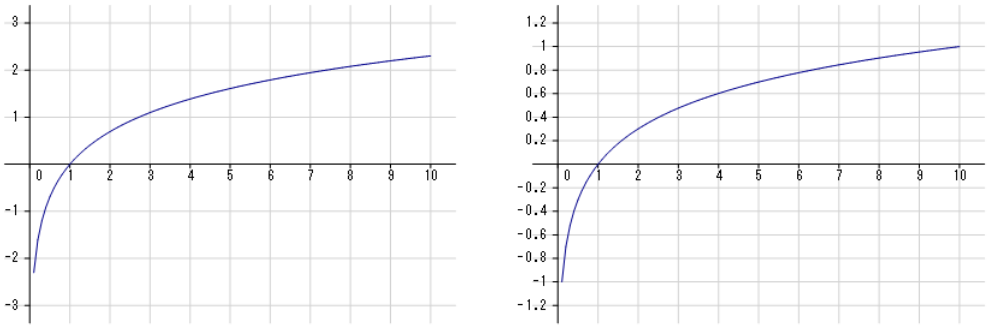


図 2　対数関数グラフ（$y=\log_e x$，$y=\log_{10} x$）

これは、メニュー［分析－グラフ－1 変数関数グラフ］で、下限を 0、上限を 10 として、「グラフ描画」をクリックします。関数は左が「log(x)」、右が「log10(x)」です。

次に指数関数 $y=a^x$ と対数関数 $y=\log_a x$ の関係を見て行きましょう。対数関数は、書き換えると、$x=a^y$ とも書けますので、指数関数について $x \leftrightarrow y$ の交換を行ったことになります。これはグラフの上では $y=x$ について軸対称な図形を描くことになります。実際、例として、$y=e^x$ と $y=\log_e x$ のグラフを描いてみましょう。対称性がよく分かります。

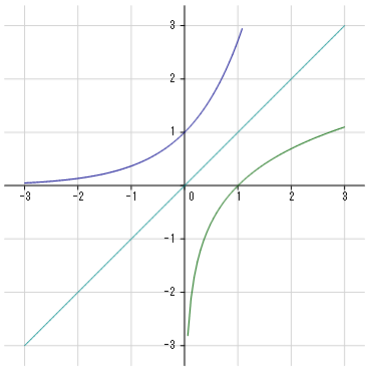


図 3　$y=e^x$ と $y=\log_e x$ グラフの対称性

演習 1

1）$\log_5 25=$

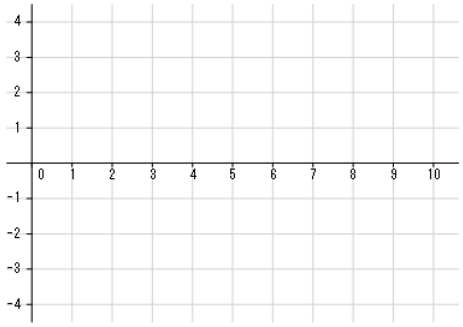
2）$\log_3 1/3=\log_3 3^{-1}=$

3）$\log_e 10=$　　（log( ) 関数）

4）$\log_{10} 1234=$　　（log10( ) 関数）

演習２

$y = \log_2 x \quad (= \log_e x / \log_e 2)$ のグラフを描け。



注） $x = 1, 2, 4, 8$ のグラフの位置に気を付けること（例： $\log_2 8 = 3$ など整数）

3.6　三角関数　【動画】

三角関数の話を始める前に、ラジアンと呼ばれる角度の測り方について話します。

図 1 の左は角度ラジアンの定義です。この角度の測り方は弧の長さと半径との関係を利用するものです。即ち、角度＝弧の長さ÷半径、で与えられます。円周率を π として、半径 r の円の円周は $2\pi r$ で与えられますから、一周 360° は 2π で表わされます。これが基本になり、図 1 の右のような、度とラジアンの関係が得られます。主な角度としては、$30° = \pi/6$, $45° = \pi/4$, $60° = \pi/3$ 等で与えられます。特に後に述べる微分に関する三角関数の表記はこのラジアンが単位になっています。

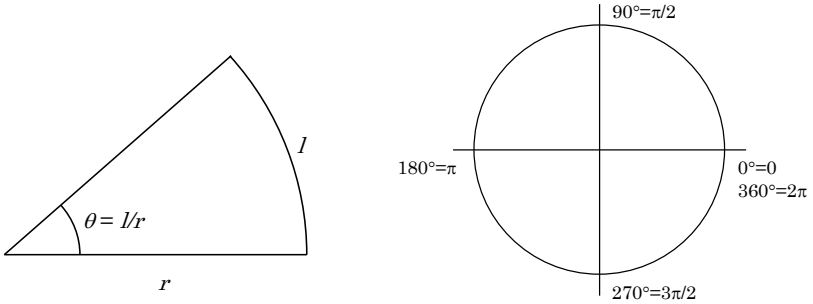


図 1　ラジアンによる角度表現

ラジアンによる角度表現

$$360° = 2\pi,\quad 180° = \pi,\quad 90° = \pi/2$$
$$30° = \pi/6,\quad 45° = \pi/4,\quad 60° = \pi/3$$

重要

三角関数とは

次に三角関数の定義を見てみましょう。図 2 のように原点を中心とした半径 r の円を考えます。

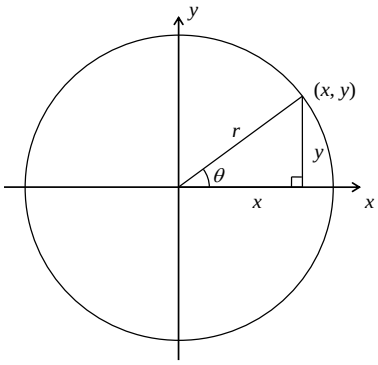


図 2　三角関数の定義

円上の点の座標を (x, y)、x 軸の正の向きとの角度を θ として、三角関数を以下のように定義します。

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{y/r}{x/r} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad (r > 0)$$

三角関数と符号

三角関数は角度によって正負の値をとります。これは、座標値 x, y の符号によって決まっています。図 3 に各三角関数の各象限における符号を示します。

例えば、$\sin\theta = y/r$ より、$\sin\theta$ の符号は $y>0$ である第 1 象限と第 2 象限で正、$y<0$ である第 3 象限と第 4 象限で負です。他の関数も確認して下さい。

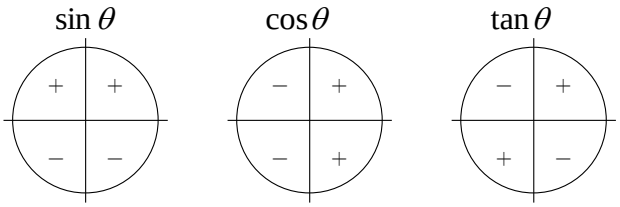


図 3　三角関数と符号

三角関数の代表的な値

三角関数でよく使われるのは $\pi/6\,(30°)$，$\pi/4\,(45°)$，$\pi/3\,(60°)$ 等です。これらは三角定規で表わされている角度で、各辺の長さが以下のように表わされることから計算されます。この関係は**必ず覚えておきましょう。**また、$\theta=\pi/2$，$\theta=3\pi/2$ のときの $\tan\theta$ の値は分母が 0 になることから求まりません。

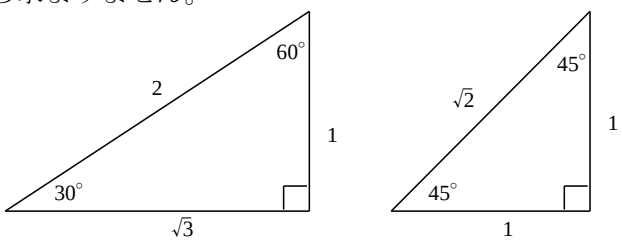


図 4　辺の長さと角度

問題

1）$\sin 30° =$　　2）$\sin 45° =$　　3）$\sin 60° =$

4）$\cos 30° =$　　5）$\cos 45° =$　　6）$\cos 60° =$

7）$\sin \pi/3 =$　　8）$\cos 3\pi/4 =$

問題解答

1）$\sin 30° = 1/2$　　2）$\sin 45° = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$　　3）$\sin 60° = \sqrt{3}/2$

4）$\cos 30° = \sqrt{3}/2$　　5）$\cos 45° = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$　　6）$\cos 60° = 1/2$

7）$\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$　　8）$\cos 3\pi/4 = -1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}/2$

7）、8）のラジアンを使った値は、パソコンを使って求めてみましょう。C.Analysis でも、メニュー［分析－数学－簡易計算］で簡単に求めることができます。パソコンでの結果を下にカッコ付きで示しておきます。

7）$\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$

(sin(pi/3) = 0.86603)

8）$\cos 3\pi/4 = -1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}/2$

(cos(3*pi/4) = -0.70711)

度を使った三角関数の計算で、C.Analysis では、sind(30), cosd(30), tand(45) などが使えます。ここで、d は degree（度）を表しています。

三角関数の計算に使われる代表的な角度について、表 1 にまとめておきます。

表 1　三角関数の代表的な値

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	3π/4	π	5π/4	3π/2	7π/4	2π
$\sin\theta$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	1
$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$		-1	0	1		-1	0

特に重要な三角関数の関係

ここでは受験で覚えるような三角関数の公式については触れていませんが、以下の公式だけは覚えておきましょう。

$$\sin(\pi/2-\theta)=\cos\theta \qquad \cos(\pi/2-\theta)=\sin\theta$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

三角関数のグラフ

図 5a, 5b, 5c に三角関数のグラフを表示しておきます。特に $y=\sin x$ と $y=\cos x$ が $\pi/2$ だけずれていることに注意して下さい。

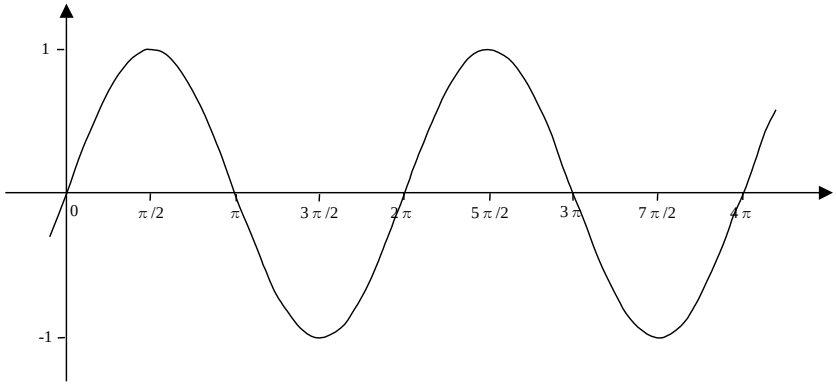


図 5a　$y=\sin x$ のグラフ

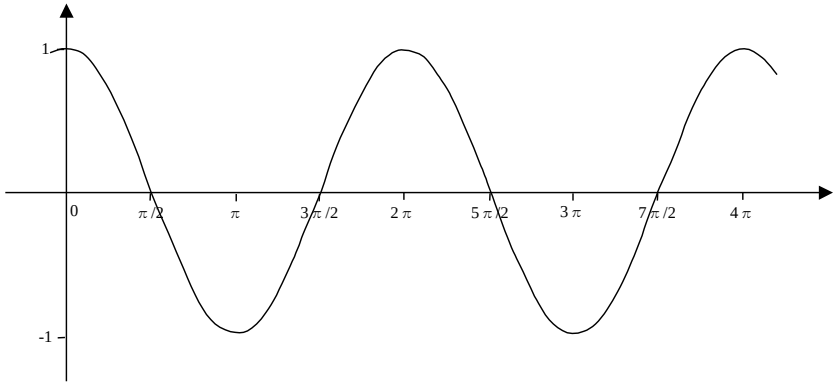


図 5b　$y=\cos x$ のグラフ

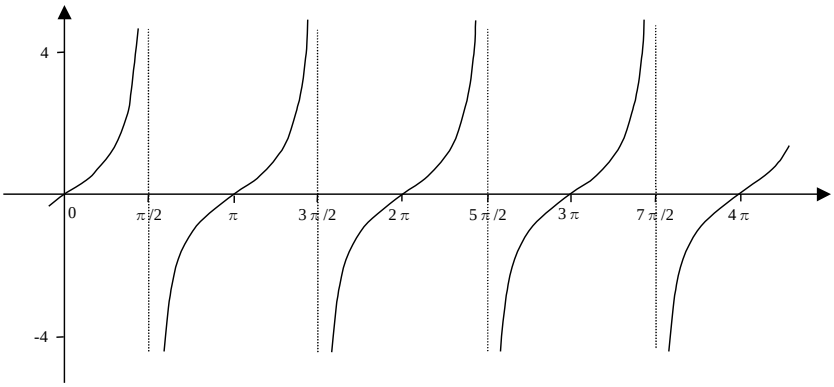


図 5c　$y = \tan x$ のグラフ

$y = \sin x$　と　$y = \cos x$　を正弦波と呼びますが、これら 2 つは、形は同じでずれているだけです。これを波の位相が違うといいます。

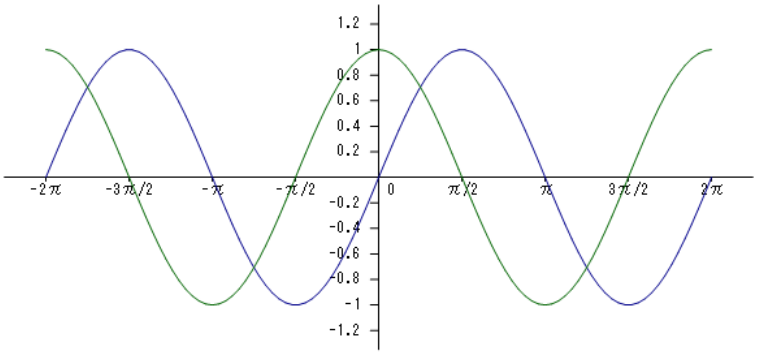


図 6　$y = \sin x,\ y = \cos x$

この図を C.Analysis を使って書いてみます。実行画面は、メニュー［分析－数学－グラフ－1 変数関数グラフ］で表示されます。関数の表示は、sin(x) と cos(x) ですが、ポイントは x 軸の下限と上限と目盛間隔です。この部分にそれぞれ、-2*pi，2*pi，pi/2 と書くと上のようなグラフが表示されます。

演習　以下の値を求めよ（答えは数値でもよい）。

1）$\sin \pi/6 =$　　2）$\cos \pi/4 =$

3）$\sin 2\pi/3 =$　　4）$\cos 5\pi/3 =$

5）$\tan \pi/4 =$　　6）$\tan(-4\pi/3) =$

三角関数の応用（幾何アニメーション）

今回は少し肩の力を抜いて、三角関数の性質を視覚的に感じてもらえるように、三角関数を使った簡単な動画を作って行きましょう。C.Analysis のメニュー［分析－数学－幾何アニメーション－２次元幾何アニメーション］を選択すると、以下のような実行画面が表示されます。

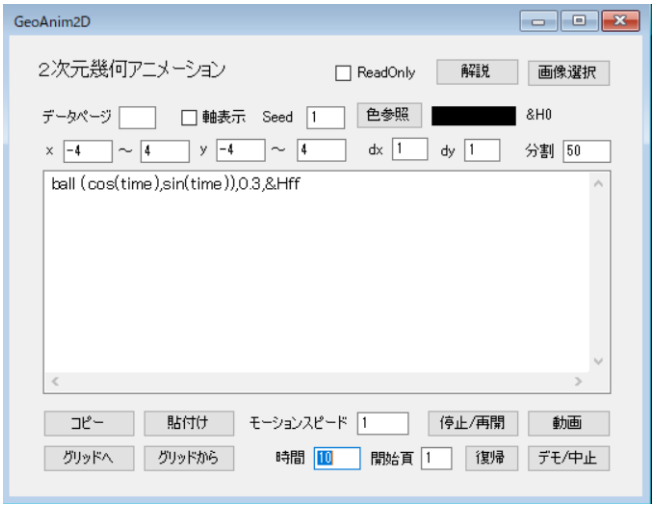


図１　２次元幾何アニメーション実行画面

これは、簡単な数式によるプログラムで、図形を動かせるプログラムです。ここでは２次元のものを使いますが、３次元のものや物理シミュレーションを含んだものもあります。

実行は簡単で、中央のテキストボックス内にプログラムを書いて、「動画」ボタンをクリックすると、動画画面が現れるというものです。まず、何も設定せずに、「動画」ボタンをクリックしてみましょう。下の動画に動きのリンクが貼ってあります。

【動画 a】

では、では少しずつ意味を説明して行きましょう。

例１　三角関数とバネ

```
define y=sin(0)
connect (0, 3)-(0, y), red, 1
ball (0, y), 0.3, blue
```

１行目、define は定義するの意味です。これは、y と出てきたら sin(0) に置き換えろということです。y は２行目と３行目に出て来るのでそこを sin(0) に置き換えます。但し、sin(0)=0 です。２行目、connect はつなぐの意味です。(0,3)の位置から(0,y)の位置をつなぎます。つなぐのは、次の red, 1、赤色の線という意味です。最後の１を変えることで他のものでつながります。３行目、ball は文字通りボールを描けです。その位置は (0,y)

です。次の 0.3 はボールの半径です。blue はもちろん青色です。これで右側の図ができます。まずは、テキストボックスに“間違えないように”入力して、以後は動画を見て下さい。

問題

１）２行目の最後の１を５に変えて、ひもをバネにせよ。

２）１行目の sin(0) を sin(time) に変えて、バネを動かせ。

３）バネの速さを２倍にせよ。

【動画 b】

例２　三角関数と円運動

```
define x=cos(time)
define y=sin(time)
ball (x, y), 0.3, blue
```

今度は三角関数と円運動との関係です。1 行目、x の定義です。今回は始めから time が入っています。x は time=0 では 1 にいます。2 行目、y の定義です。y は time=0 では 0 にいます。以下の図と見比べてみて下さい。意味が分かります。

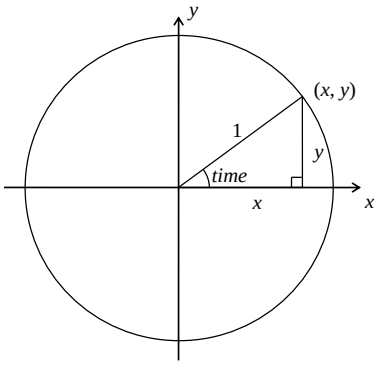


図 1　円と三角関数

３行目、ボールの描画です。位置は（x, y）ですから、time=0 では、(1,0) です。半径は 0.3、色は青色です。入力して、以後は動画を見て下さい。

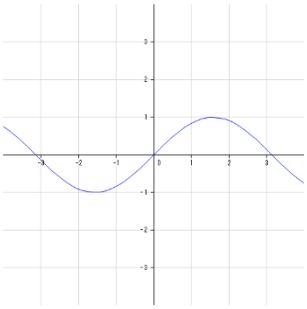
問題

１）円運動の半径を 2 倍にせよ。

２）円運動の速さを 2 倍にせよ。

【動画 c】

例３　三角関数の移動



```
axis
func y=sin(x-time), blue
```

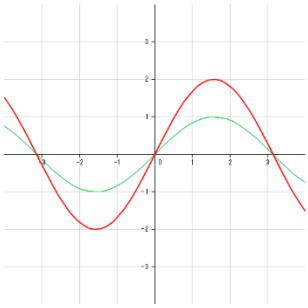
今度は三角関数のグラフを描いてみましょう。1 行目、axis は座標を描くコマンドです。２行目、func は関数（function）を描け、という意味です。
その形が、y=sin(x-time) です。これは関数の移動のところで見たように、通常の三角関数を右に時間と共にずらせるようになっています。描画の色は青色です。「y=」の部分はあってもなくても同じです。入力して、以後は動画を見て下さい。

問題

１）波を左向きに動かせ。

【動画 d】

例４　三角関数の重ね合わせ



```
axis
define y1=sin(x-time)
define y2=sin(x)
func y1, blue
func y2, green
func y1+y2, red, 2
```

高校の数学では三角関数の重ね合わせというのを勉強します。その中で、高さの違う波を重ね合わせたものもまた三角関数になると学びます。また、高校の物理ではギターの弦の振動は、左右からやってきた同じ波が重なってできる定常波というものであると学びます。それを実際にやってみましょう。

2 行目、y1 は右へ動く正弦波の定義です。3 行目、y2 はその場に止まった正弦波の定義です。４行目と５行目で、それらを青色と緑色で描いています。最後に、６行目で、２つの関数を足したもの y1+y2 を表示するようにしています。色は赤色で、２番というのは太い線になります。入力して、以後は動画を見て下さい。

問題

１）３行目の y2=sin(x) を y2=2*sin(x) にして、足した波の波形を調べよ。
２）３行目の y2=sin(x) を y2=sin(x+time) にして、足した波の波形を調べよ。

結果をまとめると、以下になります。

位相（関数グラフでは位置）のずれた正弦波（sin 関数）を足しても正弦波

同じ波が左右からぶつかると定常波（ギターの弦など）

【動画 e】

演習　波長の違う波の重ね合わせ

例４で、３行目の y2=sin(x) を y2=sin(2*x) にしても（波長をかえても）、足した波の形は正弦波（sin 関数）になるか。どちらか〇を付けよ。

注）例４の形に戻してから変更すること。

［正弦波になる・正弦波にならない］

最後に２次元幾何アニメーションのデモ動画を見てみて下さい。

【動画 f】

４章　極限

ある数が限りなく大きくなるとか、限りなく 0 に近づくとか、そんな場合にその数を使った関数がどんな値に近づくかを考えることを関数の極限と言います。

ある数 n が限りなく大きくなる場合、数学では n が無限大に近づくと言います。無限大は ∞ という記号で表し、$n \to \infty$ という形で表現されます。また、負の側に無限に大きく（小さくと言うべきか）なっていく場合、n はマイナス無限大に近づくと言い、$n \to -\infty$ で表します。この n という記号は整数を表す場合が多く、実数を強調したい場合には x などを用いて、$x \to \infty$ などとします。

この矢印の記号はある数 a に限りなく近づくときにも使われ、x が a に限りなく近づくとき $x \to a$ と表されます。特に a が 0 の場合によく使われますが、0 への近づき方が正の側から近づくことをはっきりとさせたい場合 $x \to +0$、負の側から近づくことをはっきりとさせたい場合 $x \to -0$ と表すことがあります。

以後、限りなく大きくなる（正負の側に）場合とある数に限りなく近づく場合とに分けて、例を多く用いて極限での関数のふるまいを見てみましょう。

4.1　無限大に関する極限

さて、次の式を見て下さい。

１）$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

これは、n が限りなく大きくなるとき（$n \to \infty$ のとき）、$1/n$ はどんな値に近づくか、という式です。言い換えると $1/n$ はどんな極限になるかとも言えます。ここに $\lim$ は limit の略で、極限の意味です。n が、10, 100, 1000,10000, … となるとき、$1/n$ はどうなるでしょうか。

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \cdots \to 0$$

以上のように 0 に近づいて行くことが分かります。即ち、$n \to \infty$ のとき、$1/n \to 0$ です。これを数式で表現したものが１）の式になります。等号は 0 になるではなく、0 に限りなく近づくという意味です。ある値に限りなく近づくことをその値に収束（収斂）するとも言います。

この関係に類似したものを見て行きましょう。

２）$\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} = 0$,　３）$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$,　４）$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,　５）$\lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n} = 0$

$n \to -\infty$ になると $1/n$ は負の側から 0 に近づきますが、行きつく先はやはり 0 です。分母が n^2 になると、分母が大きくなる割合が増し、速く 0 に収束します。分母が $\sqrt{n}$ では、大きくなり方は n よりゆっくりですが、やはり 0 に収束します。分子が 1000 の場合も n が 1000 倍

になれば良いだけのことですから、結果は同じです。

6） $\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n+a}=0$,　　7） $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$,　　8） $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$

分子が一般に何であっても、分母に任意の数を足しても結果は変わりません。また、収束する項に 1 を足しても、収束した値に 1 を足した値になるだけです。収束するものが分母に来ても分母をその収束する値として計算するだけです。

9） $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$,　　10） $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n-1}=2$

11） $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1}=1$,　　12） $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{3n^2-2n-1}=\frac{2}{3}$

これまでは形式的に表現して $\pm 1/\infty$ のような形になる式について学んできましたが、次は ∞/∞ の形になる式を考えてみましょう。以下の例を見て下さい。分母も分子もともに無限大になるので収束性は一見不明です。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$

このような場合、分母の最も次数の高い項で分母分子を割るのがうまいやり方です。即ち、以下のようにすると分母の第 2 項は 0 になり、全体は 1 に収束することが分かります。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n}=1$$

以下の例も分母分子を n で割って答えを求めます。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{1-1/n}=2$$

次の場合は、分母分子を n^2 で割ります。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n^2}{1-1/n^2}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{3n^2-2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3/n+1/n^2}{3-2/n-1/n^2}=\frac{2}{3}$$

さて、もう気づかれたかも知れませんが、分母と分子が n の多項式で、次数が等しいとき、収束する値は最大次数の項の係数だけを見ていれば（その他の項を捨てれば）分かります。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{2}n^2+3n+1}{\mathbf{3}n^2-2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{2}n^2}{\mathbf{3}n^2}=\frac{2}{3}$$

実際の計算では、このようにして暗算で解答します。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=2,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$$

13）$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$,　　14）$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{-n^3+1}=0$

15）$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}\to\infty$,　　16）$\lim_{n\to-\infty}\frac{n^2}{n+1}=-\infty$

次に分母と分子の次数が違う場合を見てみましょう。ここでも最大次数だけを見る方法は使えます。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{-n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{-n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}n\to\infty$$

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{n^2}{n+1}=\lim_{n\to-\infty}\frac{n^2}{n}=\lim_{n\to-\infty}n\to-\infty$$

ここで後ろの２式は特定の値に収束せず、±∞になりますので、最後は「→」を使いました。ただ、この授業では「=」を使ってもよいことにしましょう。このように極限値が±∞になる場合、極限値は発散すると言います。

これまでの計算で得られたことを一言で言うと以下になります。

直感的方法（ある変数が±∞になる場合）

分母分子の最大次数の項の係数に注目（その他の項はすべてなくしてみる）

4.2　定数の極限

さて、次の式を見てみましょう。

$$\lim_{x\to a}f(x)$$

これは、x が限りなく a に近づくとき、$f(x)$ がどのような振る舞いをするかを表すものですが、$x=a$ で $f(x)$ が連続の場合、その収束先は $f(a)$ となります。しかし、連続性が保証されていない場合、x が大きい側から近づくのか、小さい側から近づくのかによって値が異なる場合もあります。

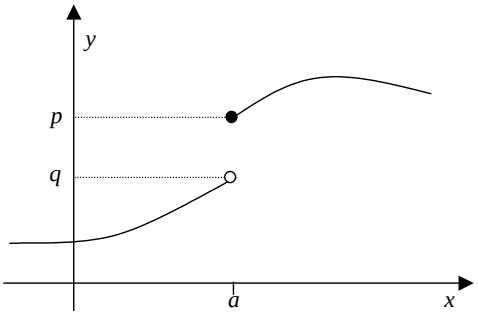


図 1　不連続点への収束

例えば図 1 を見て下さい。黒丸は $x=a$ の点での関数の値ですが、左側から a に近づく（$x \to a-0$）と q に限りなく近づき、右側から近づく（$x \to a+0$）と p になります。

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=q, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=p$$

それでは例をやってみましょう。

1）$\lim_{x\to 0} x=0$　　2）$\lim_{x\to 1} x^2=1$

3）$\lim_{x\to 0}\left(x^2+2x+3\right)=3$　　4）$\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{3}$

これらの例は連続性のある場合ですから、値を代入すると簡単に結果は求まります。関数を使った複雑そうな場合でも同様です。

$$\lim_{x\to 0} a^x=a^0=1, \qquad \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)=\log_a 1=0$$

5）$\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2+x}=1$,　　6）$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{2x^2-3x}=-\dfrac{2}{3}$,　　7）$\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$

上は、単純に代入すると分子と分母が共に 0 になる場合です。まず最初に通分できるときは極力やっておく必要があります。残った式で収束を調べます。以下の例は問題なく理解できると思います。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{2x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{2x-3}=-\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

分子が有限で分母が 0 になる場合、状況によって結果は $\pm\infty$ になります。関数の符号を検討しながら見極める必要があります。

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty$$

最後に、代入などで簡単に求められない極限で、重要な式が 2 つあります。これらは後に習う微分のところで使われます。

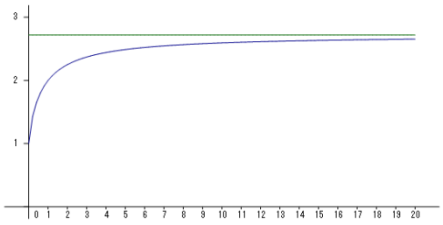
覚えておく例

1）$\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

(e=2.71828…ネーピア(Napier)の数)

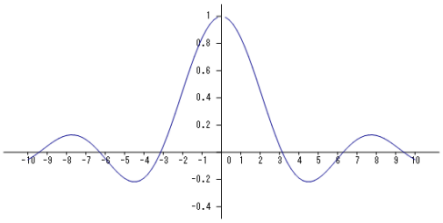
注）これは $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$ の書き換えです。

グラフの関数形は、(1+1/x)^x です。



2） $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　$\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a\right)$

グラフの関数形は、sin(x)/x です。



演習

1） $\lim_{n\to\infty}\frac{100}{n}=$

2） $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n+1}=$

3） $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{n+2}=$

4） $\lim_{x\to 0}\left(x^2+3x+4\right)=$

５章　微分

5.1 微分とは

微積分は自然科学だけでなく経済学などの社会科学においても重要な基礎知識です。特に微分は様々な分析で必要不可欠です。この節では微分の定義とその意味を考えてみます。

ある関数 $y = f(x)$ について、x における微分 $\dfrac{dy}{dx}$ というのは以下のように定義されます。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

上式の意味を考えてみましょう。以下の図を見て下さい。

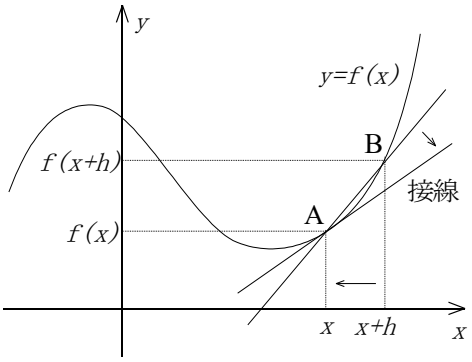


図 1　接線の傾きと微分

図 1 は関数 $y = f(x)$ の x における微分の定義を表したものです。定義式の分子 $f(x+h) - f(x)$ は $x+h$ と x における y の値の差です。分母の h は $x+h$ と x との差と考えられます。これらを合わせると微分の定義式における分数式は、y 軸上の差を x 軸上の差で割ったものであり、A 点と B 点を結ぶ直線の傾きを表わすと考えられます。$\lim_{h \to 0}$ は $x+h$ を x に限りなく近づけることを意味しますが、これは A 点と B 点の間隔を縮めて行くことになります。その際２点を結ぶ直線は、この場合次第に傾きが小さくなって行きます。これが極限まで近づいたとき、この直線は A 点における接線に一致することが分かると思います。即ち、微分の定義式 (1) は x における接線の傾きに一致します。これは非常に大事で決して忘れてはならないので標語のようにまとめておきましょう。

微分は接線の傾きである。

ここで１つ注意すべき重要なことがあります。それは微分の定義式が値を持つかどうかです。微分の定義式が、ある一つの値を持てば、$f(x)$ は x において微分可能であると言います。また、結果が発散する場合や極限の取り方（左や右から近づける）によって値が異なるときは、x において微分可能でないと言います。グラフがある点において不連続な場合や、

折れ曲がっている場合は、その点において微分可能でありません。例えば、図 2 に見るように、$y=|x|$ は $x=0$ において微分可能ではありません。

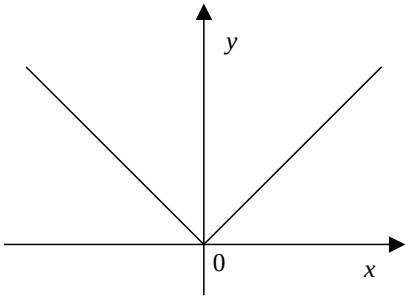


図 2　$y=|x|$ のグラフ

微分を表す書式はいろいろで、以下によく使われている例を書きます。

$$\frac{dy}{dx}=dy/dx=\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=y'=f'(x)$$

この授業では状況に応じて使い分けますので、ご容赦下さい。

さて、これからべき乗関数（$y=x^n$ の関数）に微分の定義を適用してみましょう。最初の例は $y=f(x)=1$ という定数の関数です。定義に従って計算すると $f(x)=f(x+h)=1$ であり、x における微分は常に 0 になります。

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

これは $y=1$ が傾き 0 の（x 軸に平行な）直線になることから納得できます。

次は $y=f(x)=x$ ですが、$f(x)=x$，$f(x+h)=x+h$ を利用すると、以下のように微分は常に 1 になります。

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

これは $y=x$ の傾きが常に 1 になることと一致しています。

関数が $y=f(x)=x^2$ の場合は、接線の傾きは場所によって異なってきます。実際に計算してみると、$f(x)=x^2$，$f(x+h)=(x+h)^2$ より、以下のようになることが分かります。

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

ここに、$(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$ を利用しています。

最後に関数が $y=f(x)=x^3$ の場合を見てみましょう。難しかったら、ここは答えだけ見ても構いません。微分は $(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$ を用いて、以下のように求められます。

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

以上の結果を少し書き換えて並べてみましょう。

$$y=1 \to \frac{dy}{dx}=0,\quad y=x \to \frac{dy}{dx}=1,\quad y=x^2 \to \frac{dy}{dx}=2x,\quad y=x^3 \to \frac{dy}{dx}=3x^2$$

これを見るとある規則性があることが分かります。即ち、以下の関係です。

$$y=f(x)=x^n \text{ のとき } \quad \frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

上の計算は、$n=0,1,2,3$ の例です。特に、$n=1$ の場合、$dy/dx=1x^0=1$ です。この計算で n は 0 以上の整数ですが、実はどんな数でも（すべての実数）について上の関係が成り立つことが知られています。即ちどんな数 a に対しても以下の公式が得られます。

公式

$$y=x^a \text{ のとき } \quad \frac{dy}{dx}=ax^{a-1} \qquad (2)$$

問題　以下の関数の x における微分を求めよ。

1）$y=2 \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx}=$

2）$y=x^5 \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx}=$

3）$y=x^{20} \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx}=$

4）$y=x^{-3} \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx}=$

5）$y=\dfrac{1}{x}= \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx}=$

6）$y=\sqrt{x}= \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx}=$

7）$y=\sqrt{x^3}= \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx}=$

問題解答（分数を横に表示している）

1）$y=2 \quad \to \quad dy/dx=0$

2）$y=x^5 \quad \to \quad dy/dx=5x^4$

3）$y=x^{20} \quad \to \quad dy/dx=20x^{19}$

4）$y=x^{-3} \quad \to \quad dy/dx=-3x^{-4}$

5）$y=1/x=x^{-1} \quad \to \quad dy/dx=-x^{-2}$

6）$y=\sqrt{x}=x^{1/2} \quad \to \quad dy/dx=(1/2)x^{-1/2}$

7）$y=\sqrt{x^3}=x^{3/2} \quad \to \quad dy/dx=(3/2)x^{1/2}$

演習　以下の関数の x における微分を求めよ。

1） $y=-1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}=$

2） $y=x^{7} \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}=$

3） $y=x^{15} \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}=$

4） $y=x^{-4} \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}=$

5） $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{-1/2} \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}=$

5.2　算術関数の微分

前節で x のべき乗についての微分を学びましたが、その他のいわゆる算術関数を微分するとどうなるのでしょうか。ここではこれらの関数の中で代表的なものについて微分した式を公式として与えます。この中には他の式から導けるものもありますが、これくらいは覚えておいた方が役に立ちます。これら以外の関数については計算して求めることにします。この中に $y=e^x$ の形の指数関数がありますが、これは度々現われる基本的な関数で、定数 e は前節で説明したネーピアの数です。また、対数関数に対してもネーピアの数 e が使われています。底を 10 とする対数を**常用対数**、これに対して底を e とする対数を**自然対数**と言います。自然対数の場合は、底の e を省略して $\log x$ と書くこともありますし、自然 (**n**atural) を強調するために $\ln x$ と書くこともあります。しかし、混乱を避けるために、このテキストでは $\log_e x$ のように、底をきちんと書くことにします。

以下に算術関数の微分の公式を与えておきます。できれば覚えておきましょう。

公式　重要

$$y=\mathrm{c} \to \frac{dy}{dx}=0 \qquad y=x^n \to \frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

$$y=e^x \to \frac{dy}{dx}=e^x \qquad y=\log_e x \to \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$y=\sin x \to \frac{dy}{dx}=\cos x \qquad y=\cos x \to \frac{dy}{dx}=-\sin x$$

$$y=\tan x \to \frac{dy}{dx}=\frac{1}{cos^2 x}$$

$y=x^n$ の微分と同じことなのですが、$y=x \to dy/dx=1$，$y=x^2 \to dy/dx=2x$　もよく使うので覚えておいて下さい。

解説【Skip OK】

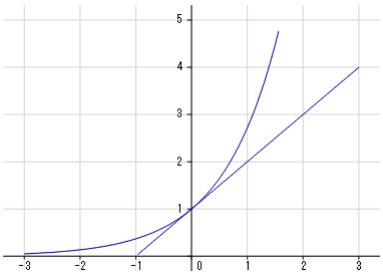
上の公式の中で重要なものを２つ解説しておきます。

a）$y=e^x \to \dfrac{dy}{dx}=e^x$　の証明

まず、指数関数のところで述べた関係を確認します。

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

（$y=e^x$　のグラフでは　$x=0$　で接線の傾きが 1）



これを使うと、

$$\frac{d}{dx}e^x=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\times 1=e^x$$

b）$y=\sin x \to \dfrac{dy}{dx}=\cos x$　の証明

$$\frac{d}{dx}\sin x=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}=\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\cos x$$

注）半角の公式を使って右辺第 1 項は 0

$$\sin^2(x/2)=\frac{1-\cos x}{2}$$

5.3　関数の定数倍と和の微分

算術関数の定数倍と和の微分は直感的に非常に分かり易いものです。これはやっていれば自然に身についてきます。結局関数が 2 倍なら微分した答えも 2 倍、関数が足されていれば、微分はそれぞれを微分して足すというだけのことです。上で述べた算術関数の微分の公式を見ながらやってみましょう。

公式

$$y=af(x)\to\frac{dy}{dx}=af'(x)$$

$$y=f(x)+g(x)\to\frac{dy}{dx}=f'(x)+g'(x)$$

問題

1）$y=ax+b \quad\to\quad \dfrac{dy}{dx}=$

2）$y=2x^2-3x+1 \quad\to\quad \dfrac{dy}{dx}=$

3）$y=4x^3+3x^2-5x+2 \quad\to\quad \dfrac{dy}{dx}=$

4）$y=2x^4-2x^3-3x+4 \quad\to\quad \dfrac{dy}{dx}=$

5）$y=\sin x-\cos x \quad\to\quad \dfrac{dy}{dx}=$

6）$y=e^x+\log_e x \quad\to\quad \dfrac{dy}{dx}=$

7）$y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}=$　　$\to\dfrac{dy}{dx}=$

問題解答

（の中の$\to$は、微分するとという意味）

1） $y = ax + b \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = a$ 　（$ax \to a \cdot 1 = a,\ b \to 0$）

2）$y = 2x^2 - 3x + 1 \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = 4x - 3$ 　（$2x^2 \to 2 \cdot 2x = 4x,\ -3x \to -3 \cdot 1 = -3,\ 1 \to 0$）

以後、定数項の微分は省いて書く。

3） $y = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2 \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = 12x^2 + 6x - 5$

（$4x^3 \to 4 \cdot 3x^2 = 12x^2,\ 3x^2 \to 3 \cdot 2x = 6x,\ -5x \to -5 \cdot 1 = -5$）

4） $y = 2x^4 - 2x^3 - 3x + 4 \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = 8x^3 - 6x^2 - 3$

（$2x^4 \to 2 \cdot 4x^3 = 8x^3,\ -2x^3 = -2 \cdot 3x^2 = -6x^2,\ -3x \to -3 \cdot 1 = -3$）

5） $y = \sin x - \cos x \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = \cos x + \sin x$

（$\sin x \to \cos x,\ -\cos x \to -(-\sin x) = \sin x$）

6） $y = e^x + \log_e x \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = e^x + \dfrac{1}{x}$

（$e^x \to e^x,\ \log_e x \to 1/x$）

7） $y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x} = x^{-1} + x^{1/2} \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = -x^{-2} + \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$

（$x^{-1} \to -x^{-2},\ x^{1/2} \to \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$）

演習

1） $y = 3x^4 + 5x \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} =$

2） $y = 2\sin x + \cos x \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} =$

3） $y = e^x + 2\log_e x \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} =$

4） $y = 3x^2 - \sin x + e^x \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} =$

5.4　関数の積と商の微分

前回で微分できる関数の範囲が少し広がりましたが、ここでは微分の分かっている関数同士の掛け算と割り算の微分について考えてみます。即ち、$f(x)$ と $g(x)$ との微分が分かっているとして、$y=f(x)\cdot g(x)$ や $y=f(x)/g(x)$ の微分を求めてみましょう。公式は以下の通りですが、掛け算については証明も付けておきます。

公式

$$y=f(x)g(x)\to\frac{dy}{dx}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}\to\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

証明（掛け算）

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$ 　微分の定義に従って、

間に、$-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)\ (=0)$ をはさみます。

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

前後２つの式をまとめます。

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

書き方を変えます。

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

微分の定義を使って、

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

割り算についても同じようにやれるのですが、ここでは省略します。

問題

１）$y=xe^x\quad\to$

２）$y=x^3\left(x^2+1\right)\quad\to$

３）$y=e^x\sin x\quad\to$

4） $y = x^2 \log_e x \quad \rightarrow$

5） $y = f(x)g(x)h(x) \quad \rightarrow$

6） $y = \dfrac{x}{x+1} \quad \rightarrow$

7） $y = \dfrac{e^x}{x} \quad \rightarrow$

8） $y = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \rightarrow$

注） $\mathrm{y} = e^x \cos x \rightarrow y' = e^x \cos x + e^x(-\sin x)$　　括弧を忘れないこと。

問題解答

1） $y = xe^x \quad \rightarrow dy/dx = (x)'e^x + x(e^x)' = 1 \cdot e^x + xe^x \ (= (1+x)e^x)$

2） $y = x^3\left(x^2+1\right) \quad \rightarrow dy/dx = (x^3)'(x^2+1) + x^3(x^2+1)' = 3x^2(x^2+1) + x^3(2x)$

$$(= 5x^4 + 3x^2)$$

3） $y = e^x \sin x \quad \rightarrow dy/dx = (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$

$$(= e^x(\sin x + \cos x))$$

4） $y = x^2 \log_e x \quad \rightarrow dy/dx = (x^2)'\log_e x + x^2(\log_e x)' = 2x\log_e x + x^2(1/x)$

$$(= x(2\log_e x + 1))$$

5） $y = f(x)g(x)h(x) \quad \rightarrow dy/dx = f(x)'g(x)h(x) + f(x)g(x)'h(x) + f(x)g(x)h(x)'$

6） $y = \dfrac{x}{x+1} \quad \rightarrow dy/dx = \dfrac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} \left(= \dfrac{1}{(1+x)^2}\right)$

7） $y = \dfrac{e^x}{x} \quad \rightarrow dy/dx = \dfrac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \dfrac{e^x x - e^x \cdot 1}{x^2} \left(= \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}\right)$

8） $y = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \rightarrow dy/dx = \dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

8）は $y = \tan x$ の微分になります。

毎回の演習用にこれまでの公式をまとめておきます。

公式

$y = \mathrm{c} \to y' = 0$

$y = x^n \to y' = nx^{n-1}$

$y = e^x \to y' = e^x$

$y = \log_e x \to y' = 1/x$

$y = \sin x \to y' = \cos x$

$y = \cos x \to y' = -\sin x$

$y = \tan x \to y' = 1/cos^2 x$

$y = af(x) \to y' = af'(x)$

$y = f(x) \pm g(x)$

$\to y' = f'(x) \pm g'(x)$

$y = f(x)g(x)$

$\to y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$y = f(x)/g(x)$

$\to y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

演習

１） $y = x^2 e^x \quad \to$

２） $y = \log_e x \sin x \quad \to$

３） $y = \dfrac{\sin x}{x+1} \quad \to$

5.5　汎関数の微分

汎関数とは、$y = f(z)$ という形の関数で、さらに z が $z = g(x)$ のように x の関数として表わされるものを言います。一まとめにして書くと、$y = f(g(x))$ の形になっている関数です。例えば、以下のように見ると、$y = (x^2 + x + 1)^5$ や $y = e^{x^2}$ などが汎関数です。

$y = (x^2 + x + 1)^5$ については、$y = z^5$，$z = x^2 + x + 1$

$y = e^{x^2}$ については、$y = e^z$，$z = x^2$

このような関数について微分を考えてみましょう。dy/dx は x の微小な変動に対する y の微小な変動の極限を表わしていますから、間に $z = g(x)$ についての微小な変動を加えることも可能です。即ち、以下となります。

公式

$y = f(g(x))$ の微分

$z = g(x)$，$y = f(z)$ として　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} \times \dfrac{dy}{dz}$　（最後に z は元に戻します。）

この公式を用いて、微分を行ってみましょう。

例 1

$y = (x^2 + x + 1)^5$

$z = x^2 + x + 1$ とすると、$y = z^5$ とおけます。これに公式を適用すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dz} = \frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) \times \frac{d}{dz}(z^5) = (2x + 1) \times 5z^4$$

右辺には z があるので、それを元の x の関数に戻します。

$$= (2x + 1) \times 5(x^2 + x + 1)^4 = 5(2x + 1)(x^2 + x + 1)^4$$

例 2

$y = e^{x^2}$

$z = x^2$ とすると、$y = e^z$ とおけます。これに公式を適用すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dz} = \frac{d}{dx}(x^2) \times \frac{d}{dz}(e^z) = 2x \times e^z$$

右辺には z があるので、それを元の x の関数に戻します。

$$= 2x \times e^{x^2} = 2xe^{x^2}$$

ガイドラインに沿って、以下の問題をやってみましょう。

問題

1）$y = (2x + 1)^3$　　$z =$　　，$y =$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dz} =$$

２） $y=\sin(x^2+1)$　　$z=$　　，$y=$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}=$$

３） $y=x^2e^{3x}$　　（**複合問題**）

$y=x^2u$　とすると掛け算の公式から、$y'=$

$u=e^{3x}$　とすると　　$z=$　　，$u=$

$$u'=\frac{du}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{du}{dz}=$$

組み合わせると

$y'=$

問題解答

１） $y=(2x+1)^3$　　$z=2x+1,\quad y=z^3$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}=\frac{d}{dx}(2x+1)\times\frac{d}{dz}(z^3)=2\times3z^2$$
$$=6(2x+1)^2$$

２） $y=\sin(x^2+1)$　　$z=x^2+1,\quad y=\sin z$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}=\frac{d}{dx}(x^2+1)\times\frac{d}{dz}(\sin z)=2x\times\cos z$$
$$=2x\cos(x^2+1)$$

３） $y=x^2e^{3x}$　　（**複合問題**）

$y=x^2u$　とすると掛け算の公式から、$y'=(x^2)'u+x^2u'=2xu+x^2u'$

まず u の微分を考えてみます。

$u=e^{3x}$　ですから、　　$z=3x,\quad u=e^z$

$$u'=\frac{du}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{du}{dz}=\frac{d}{dx}(3x)\times\frac{d}{dz}(e^z)=3\times e^z$$
$$=3e^{3x}$$

組み合わせると

$$y'=2xu+x^2u'=2xe^{3x}+x^2\cdot3e^{3x}\quad(=(2x+3x^2)e^{3x})$$

最初は難しいですが、十分慣れてくると、どんな関数でも暗算で微分できるようになります。

演習

$y=(x^2+3x+1)^4$　　$z=$　　，　$y=$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}=$$

微分公式まとめ

$y=\mathrm{c}\to y'=0$

$y=x^n\to y'=nx^{n-1}$

$y=e^x\to y'=e^x$

$y=\log_e x\to y'=1/x$

$y=\sin x\to y'=\cos x$

$y=\cos x\to y'=-\sin x$

$y=\tan x\to y'=1/\cos^2 x$

$y=af(x)\to y'=af'(x)$

$y=f(x)\pm g(x)$

$\to y'=f'(x)\pm g'(x)$

$y=f(x)g(x)$

$\to y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$y=f(x)/g(x)$

$$\to y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$y=f(g(x))$

$z=g(x)$，$y=f(z)$　とおいて

$$\to y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}$$

5.6　微分と極値　【動画】

これまで微分の方法を学んできましたが、なぜ微分が大切なのか考えてみましょう。関数の性質で最も重要なものは、どこでその関数が最大や最小となるかということです。例えば、経済や経営に関しては、経費を表わす関数ではそれが最小になるように、利益を表わす関数ではそれが最大になるようにと考えるのが自然の考えです。図 1 を見て下さい。関数 $y = f(x)$ の y の値は x の増加に連れ、増加したり、減少したりしています。増加が減少に変わるところを極大、減少が増加に変わるところを極小、それらの y 座標値をそれぞれ極大値、極小値（これらを総称して極値）と言いますが、最大や最小を求めるにはこれらの極大値や極小値を調べる必要があります。

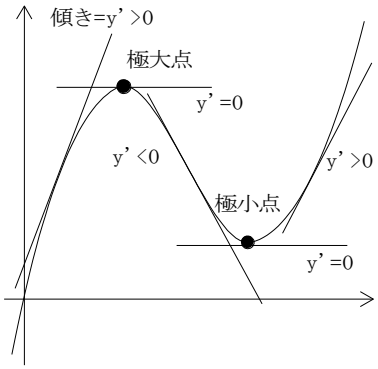


図 1　極大と極小

それでは関数の極大値や極小値を求めるにはどうすれば良いでしょうか。ここで微分の定義を思い出して下さい。微分とは接線の傾きであるということです。接線の傾きは関数が増加している場合には正、減少している場合には負です。つまり、微分した値の正負により関数の増減は判断できます。それでは極大や極小の位置での微分の値はいくらでしょうか。増加と減少の境界ですから、その値は 0 になります。図 1 の接線の傾きを見て下さい。0 になっていることが分かると思います。以下では具体的に関数の極値を求めてみましょう。

例 1　$y = x^2 - 2x - 3$　の極値を求めよ。

高校で学ぶ方法を復習しておきましょう。まず、微分を求めます。

$$y' = 2x - 2 = 2(x-1)$$

この結果を使って、$y' = 0$ となる x の値を求め、その値を使って y の値を求めます。

$$y' = 2x - 2 = 2(x-1) = 0$$

解　$x = 1$　　これを y の式に代入して、$y = 1 - 2 - 3 = -4$

次は関数増減表についてです。まずこの値を関数増減表の枠の中に入れます。

関数増減表

x		1	
y'		0	
y		-4	

次に、$x=1$ の左右の適当な値をとり、y' の符号を調べて＋か－の記号を入れます。

関数増減表

x		1	
y'	－	0	＋
y		-4	

y' の符号を見て、y に ↘（下がる）か、↗（上がる）の記号を書きます。

関数増減表

x		1	
y'	－	0	＋
y	↘	-4	↗

これで関数増減表は完成です。これを見ながら極値やグラフを書いて行きます。

極値

$(1,-4)$ ［極大・$\boxed{\text{極小}}$・停留点］

次はパソコンを利用する方法です。

グラフの書き方はすでに学びました。

y 軸との交点や x 軸との交点も求められます。

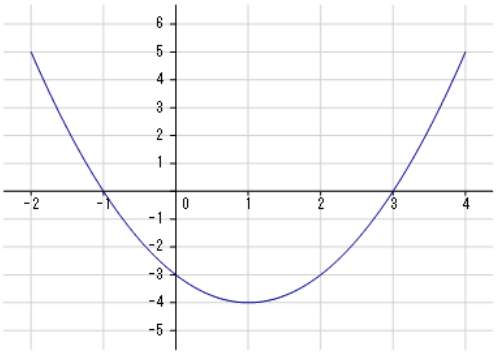
y 軸との交点　　$y=-3$

x 軸との交点　　$x=-1,3$

極値も「極値」ボタンで求められます。

$(1,-4)$ ［極大・$\boxed{\text{極小}}$・停留点］

グラフの概形も描いておきましょう。



以後はパソコンを利用して答えを求めます。

例２　$y=x^3-6x^2+9x$ の極値とグラフを求めよ。

y 軸との交点　　$y=0$

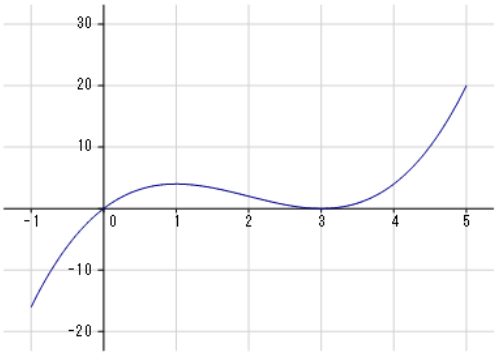
x 軸との交点　　$x=0,3$

極値

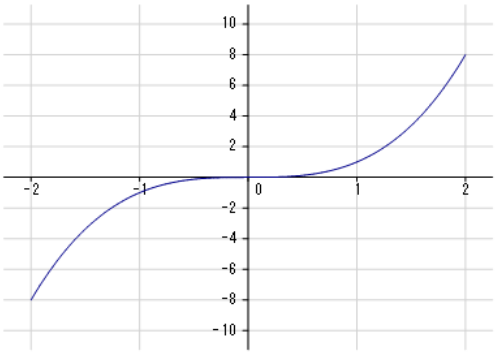
$(1,4)$ ［$\boxed{\text{極大}}$・極小・停留点］

$(3,0)$ ［極大・$\boxed{\text{極小}}$・停留点］

グラフの概形



例３　$y = x^3$ の極値とグラフを求めよ。



y 軸との交点　　$y = 0$

x 軸との交点　　$x = 0$

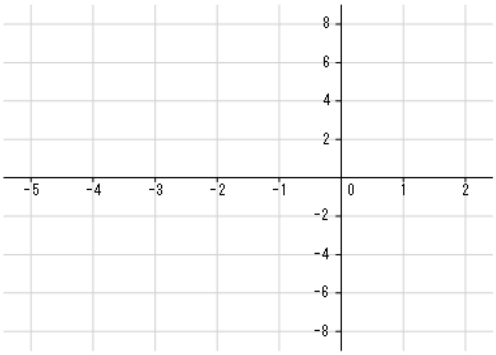
極値

$(0,0)$ ［極大・極小・$\boxed{\text{停留点}}$］

グラフの概形

演習　$y = -x^2 - 3x + 4$ の極値とグラフを求めよ。

パソコンを利用する。



y 軸との交点　　$y =$

x 軸との交点　　$x =$

極値

(　　,　　)［極大・極小・停留点］

グラフの概形

5.7　2 階微分と変曲点　【動画】

前節までで曲線の極大と極小を求める方法が分かりましたが、具体的にグラフを描こうとすると、曲線の増加、減少だけでなく、その曲がり方も気になります。そこで、この節ではグラフの曲がり方に関係する 2 階微分について考えてみます。

2 階微分とは、1 度微分した後、もう 1 度微分することです。2 階微分に対して最初の微分のことを 1 階微分と言うこともあります。例を見てみましょう。

1 階微分　$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 4 \ \rightarrow \ \dfrac{dy}{dx} = y' = 3x^2 + 6x - 9$

2 階微分　$\dfrac{dy}{dx} = y' = 3x^2 + 6x - 9 \ \rightarrow \ \dfrac{d^2y}{dx^2} = y'' = 6x + 6$

ここで、2 階微分を表わすには、以下のような表記法が使われます。

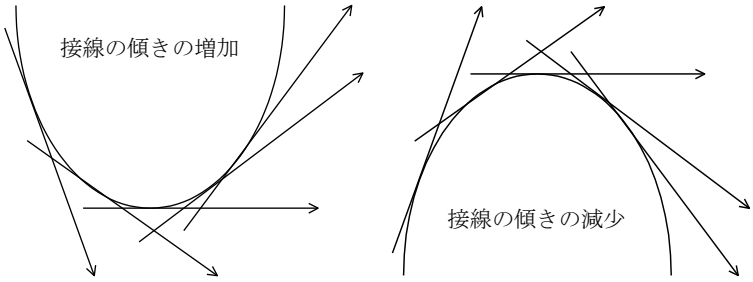
$y = f(x)$ に対して　$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2}{dx^2} f(x) = y'' = f''(x)$

2 階以上の微分もありますので、一般の n 階微分についてその表記法も示しておきましょう。

$y = f(x)$ に対して　$\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{d^n}{dx^n} f(x) = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$

n 階微分と言っても、微分を n 回繰り返すだけですから、計算量は増えるとしても、特に難しいものではありません。

さて、ではなぜこの 2 階微分が曲線の曲がり方と関係あるのでしょうか。微分は接線の傾き、即ち関数の増減を表わすと言いましたが、以下の図を見て下さい。左側の図では、x の値が増大するにつれて接線の傾きは増加していますが、右側の図では、接線の傾きは逆に減少しています。つまり、接線の傾きについて言えば、左は増加関数、右は減少関数となります。即ち、接線の傾きを表わす関数を微分すると、左は正、右は負の値が得られます。接線の傾きを表わす関数とは、元の関数の微分ですから、左の図は 2 階微分が正、右の図は 2 階微分が負になっています。



$y'' > 0$　　$y'' < 0$

図 1　曲線の湾曲と 2 階微分

即ち、左のような下に凸のグラフでは 2 階微分が正、右のような上に凸のグラフでは 2 階微分が負になります。

さて、上の図のように上に凸と下に凸の曲線が混在する場合、その境界には曲線の曲がり方が変わる点が存在します。この点は変曲点と呼ばれ、そこでは $y''=0$ となっています。

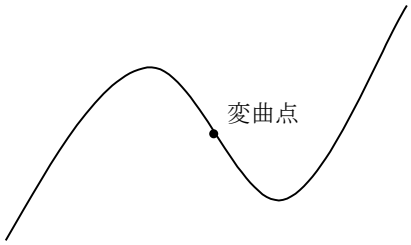


図 2　変曲点

例として、関数 $y=x^3+3x^2-9x-4$ の変曲点を求めてみましょう。

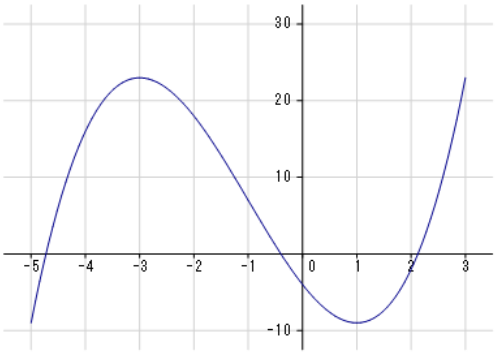
1 階微分して、$y'=3x^2+6x-9$

2 階微分して、$y''=6x+6=0$

これより、$x=-1$，この値を元の関数に代入した $y=7$ で与えられる点 $(-1,7)$ が変曲点となります。

ここでは曲線の曲がり方について検討してみます。以下のような表を作ると、曲がり方は明らかです。

x		-1	
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	7	下に凸



パソコンを利用利用する場合は、
1 変数関数グラフの実行画面で、
「変曲点」ボタンをクリックします。
　変曲点　$(-1,7)$

一般的なグラフ

ここからは多項式の形のグラフから離れて、もう少し一般的な算術関数のグラフを描いてみましょう。パソコンを用いると簡単ですが、一応式を解いて求めてみます。

<u>授業ではパソコンを使います。</u>

例 1　$y=x+\dfrac{1}{x}$　のグラフを描き極値を求めよ。

y 軸との交点　　$y=$なし

　$x=0$ にできません。

x 軸との交点　　$x=$ なし

　$x+1/x=0$　は $x^2=-1$ となり、

　実数の解はありません。

極値

$y' = 1 - x^{-2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 0$ を解くと、$x = \pm 1$　　これを元の式に代入して、$y = \pm 2$

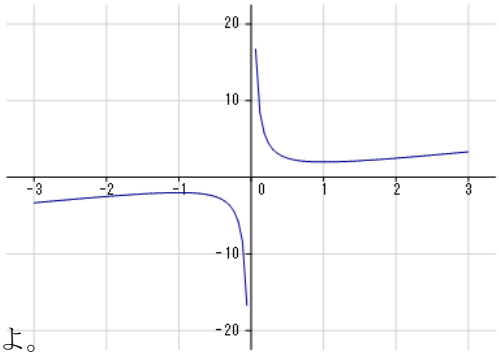
x		-1		0		1	
y'	＋	0	－		－	0	＋
y	↗	-2	↘		↘	2	↗

$(-1,-2)$ ［$\boxed{\text{極大}}$・極小］

$(1,2)$ ［極大・$\boxed{\text{極小}}$］

変曲点　$y'' = 2x^{-3} = 0$ 解がありません。

変曲点なし



例２　$y = e^x - x$　のグラフを描き、極値を求めよ。

y 軸との交点　　$y = e^0 - 0 = 1$

x 軸との交点　　$x =$ なし

$y = e^x$ は $y = x + 1$ と接するため、$y = x$ とは交わらないから。

極値

$y' = e^x - 1 = 0$　解は $x = 0$

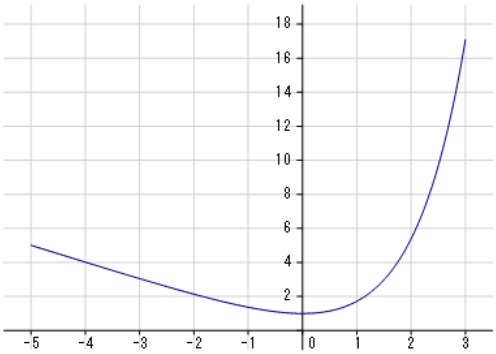
これより、$y = e^0 - 0 = 1$

x		0	
y'	－	0	＋
y	↘	1	↗

$(0,1)$ ［極大・$\boxed{\text{極小}}$］

変曲点　$y'' = e^x = 0$ 解がありません。

変曲点なし



演習　$y = e^{-x^2}$　のグラフを描き、極値と変曲点を求めよ。（パソコンで実施すること）

y 軸との交点　　$y =$

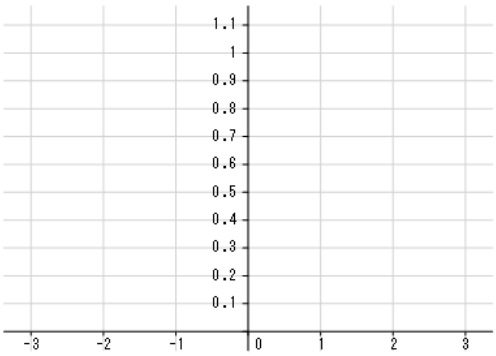
x 軸との交点　　$x =$

極値

(　　,　　)［極大・極小］

変曲点

(　　,　　)

(　　,　　)

この関数は統計に表れる正規分布を表す関数として非常に有名です。