3.5　対数関数　【動画】

対数は後で話すように指数の逆です。指数が a の x 乗の値 $y\ (=a^x)$ を求めるものであったのに対して、対数 $y=\log_a x$ は値 x が a の何乗になるかを求めるものです。実用上では、小さな値（例えば 10）と大きな値（例えば 1, 000, 000）が混在する場合、これを同じグラフの中に表示するのは通常は困難です。しかし、対数を使うとそれが可能になります。例えば $\log_{10} 10=1$ と $\log_{10} 1{,}000{,}000=6$ ですので、十分グラフとして描けます。規模の大きく異なる会社の売上推移などをグラフで表示する場合、特に有効です。ここでは対数の性質について見て行こうと思います。

1.　対数の性質

ここでは一応証明を付けていますが、使えることが第一なので、特に分からなくても結構です。

１）$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$

以下の例を見て下さい。左側は普通の指数の関係ですが、これを逆の立場で見たものが対数です。

$$2^3=8 \Leftrightarrow \log_2 8=3$$

$$3^4=81 \Leftrightarrow \log_3 81=4$$

即ち、2^3 が 8 であることを、8 は 2 の何乗であるかと言っているのが $\log_2 8$ の表式です。このように対数は指数の見方を変えたもので、log という記号で「難しいもの」などと惑わされてはいけません。ここで $\log_2 8$ の下に付いた 2 を対数の底（てい）といいます。上の関係を文字で一般的に表したものが以下の関係です。

$$a^y=x \Leftrightarrow \log_a x=y$$

これを書き換えて、最初の定義としましょう。

$$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$$

ここで対数関数は指数関数の逆関数になっていることに注意して下さい。つまり、指数と対数は x と y を入れ替えたような関係にあります。指数のところでも述べましたが、対数の底 a については $a>0$、変数 x についても $x>0$（$-\infty<y<\infty$）であることを忘れないで下さい。

２）$\log_a a=1$

これは１）の定義を応用した簡単な例ですが、覚えておくと結構役に立つ公式です。

$$a^1=a \Leftrightarrow \log_a a=1$$

３）$\log_a x^n=n\log_a x$

この公式は非常に重要なものです。以下の式は１）の定義を利用しています。

$$a^y=x^n \Leftrightarrow \log_a x^n=y$$

上の式の左側を書き換えると、$a^{y/n}=x$ ですが、これに１）の定義を利用すると以下の関係

も成り立ちます。

$$a^{y/n} = x \Leftrightarrow \log_a x = \frac{y}{n}$$

上下の式を比較すると、以下の関係があることが分かります。

$$y = \log_a x^n = n\log_a x$$

４）$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

この公式もよく使われます。１）の定義を利用して以下のような関係を示しておきます。

$$x = a^p \Leftrightarrow p = \log_a x$$

$$y = a^q \Leftrightarrow q = \log_a y$$

左側の式で $xy = a^p a^q = a^{p+q}$ を作り、対数をとります。

$$\log_a xy = \log_a a^{p+q}$$

これに３）と２）の関係を使って、以下を得ます。

$$= (p+q)\log_a a = p+q$$

ここで p と q に最初の右側の式を代入すると以下のようになります。

$$= \log_a x + \log_a y$$

これを整理すると、次のようになります。

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

５）$a^{\log_a x} = x$

この関係はそれほど重要ではありませんが、微分などで利用すると便利なので示しておきます。まず１）の定義を利用して、以下の式を与えます。

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$$

右側の式を左側の式に代入すると、以下のようになります。

$$a^{\log_a x} = x$$

６）$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

この公式は対数の底の変換として重要な関係です。５）と３）の関係を用いると以下のような変形が可能です。

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \times \log_b a$$

これから、以下の関係を得ます。

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

これは、対数の底 a を任意の底 b に変える公式になっています。

対数に関する公式をまとめておきましょう。対数の関係は直感的に理解しづらく覚えにくいと思います。

公式

1） $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

2） $\log_a a = 1$

3） $\log_a x^n = n \log_a x$

4） $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

5） $a^{\log_a x} = x$

6） $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

　これから対数の具体的な値を計算しますが、そのときに必要な簡単なプログラムを紹介しておきます。C.Analysis のメニュー［分析－数学－簡易計算］を選ぶと以下の簡易的な電卓が表示されます。

図 1　下院に計算実行画面

これは、式を数式のテキストボックスに入れて、「実行」ボタンを押すだけの簡単なものです。数式の入力法は順次見て行きましょう。

問題

1） $\log_3 9 =$　　　　2） $\log_{10} 1000 =$

3） $\log_2 1/16 = \log_2 2^{-4} =$

4） $\log_e 5 =$　　　（自然対数　log( ) 関数）

5） $\log_{10} 5 =$　　　（常用対数　log10( ) 関数）

6） $\log_2 5 = \log_e 5 / \log_e 2 =$　　　公式 6）利用

問題解答

1） $\log_3 9 = 2$　　　　2） $\log_{10} 1000 = 3$

3） $\log_2 1/16 = \log_2 2^{-4} = -4 \log_2 2 = -4$

4） $\log_e 5 = 1.60944$　　　（自然対数　log( ) 関数、計算は log(5) ）

5） $\log_{10} 5 = 0.698970$　　　（常用対数　log10( ) 関数、計算は log10(5) ）

6） $\log_2 5 = \log_e 5 / \log_e 2 = 2.32193$　　　（公式 6）利用、計算は log(5)/log(2)

2.　対数関数のグラフ

自然対数　$y = \log_e x$ のグラフ　　　　常用対数　$y = \log_{10} x$　のグラフ

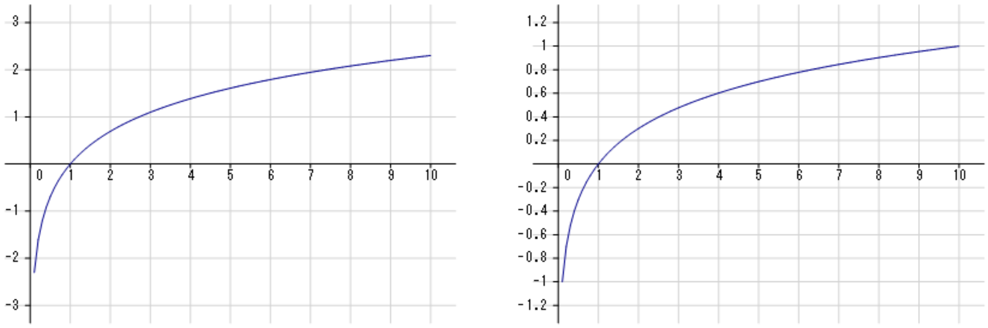


図 2　対数関数グラフ（$y = \log_e x$，　$y = \log_{10} x$）

これは、メニュー［分析－グラフ－1 変数関数グラフ］で、下限を 0、上限を 10 として、「グラフ描画」をクリックします。関数は左が「log(x)」、右が「log10(x)」です。

次に指数関数 $y = a^x$ と対数関数 $y = \log_a x$ の関係を見て行きましょう。対数関数は、書き換えると、$x = a^y$ とも書けますので、指数関数について $x \leftrightarrow y$ の交換を行ったことになります。これはグラフの上では $y = x$ について軸対称な図形を描くことになります。実際、例として、$y = e^x$ と $y = \log_e x$ のグラフを描いてみましょう。対称性がよく分かります。

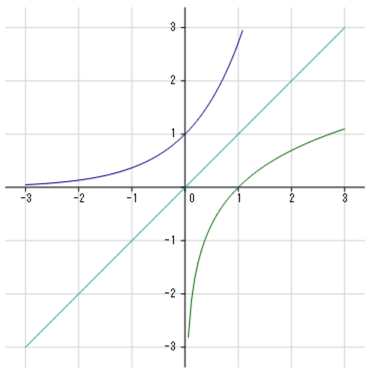


図 3　$y = e^x$ と $y = \log_e x$ グラフの対称性

演習 1

1）$\log_5 25 =$

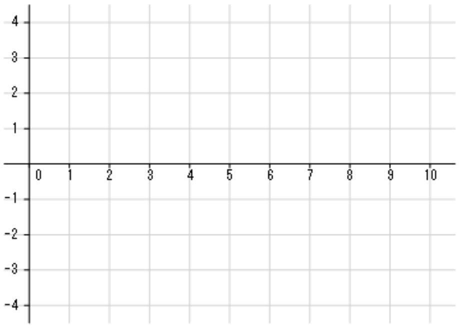
2）$\log_3 1/3 = \log_3 3^{-1} =$

3）$\log_e 10 =$　　　　　　　　　(log( ) 関数)

4）$\log_{10} 1234 =$　　　　　　　(log10( ) 関数)

演習２

$y = \log_2 x \quad (= \log_e x / \log_e 2)$　のグラフを描け。



注）$x = 1, 2, 4, 8$　のグラフの位置に気を付けること（例：$\log_2 8 = 3$ など整数）