４章　極限

ある数が限りなく大きくなるとか、限りなく 0 に近づくとか、そんな場合にその数を使った関数がどんな値に近づくかを考えることを関数の極限と言います。

ある数nが限りなく大きくなる場合、数学ではnが無限大に近づくと言います。無限大は∞という記号で表し、$n \to \infty$という形で表現されます。また、負の側に無限に大きく（小さくと言うべきか）なっていく場合、nはマイナス無限大に近づくと言い、$n \to -\infty$で表します。このnという記号は整数を表す場合が多く、実数を強調したい場合にはxなどを用いて、$x \to \infty$などとします。

この矢印の記号はある数aに限りなく近づくときにも使われ、xがaに限りなく近づくとき$x \to a$と表されます。特にaが 0 の場合によく使われますが、0 への近づき方が正の側から近づくことをはっきりとさせたい場合$x \to +0$、負の側から近づくことをはっきりとさせたい場合$x \to -0$と表すことがあります。

以後、限りなく大きくなる（正負の側に）場合とある数に限りなく近づく場合とに分けて、例を多く用いて極限での関数のふるまいを見てみましょう。

4.1　無限大に関する極限

さて、次の式を見て下さい。

１）$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

これは、nが限りなく大きくなるとき（$n \to \infty$のとき）、$1/n$はどんな値に近づくか、という式です。言い換えると$1/n$はどんな極限になるかとも言えます。ここに$\lim$は limit の略で、極限の意味です。nが、10, 100, 1000,10000, … となるとき、$1/n$はどうなるでしょうか。

$$\frac{1}{10},\frac{1}{100},\frac{1}{1000},\frac{1}{10000},\cdots \to 0$$

以上のように0に近づいて行くことが分かります。即ち、$n \to \infty$のとき、$1/n \to 0$です。これを数式で表現したものが１）の式になります。等号は0になるではなく、0に限りなく近づくという意味です。ある値に限りなく近づくことをその値に収束（収斂）するとも言います。

この関係に類似したものを見て行きましょう。

２）$\displaystyle \lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n}=0$,　　３）$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$,　　４）$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$,　　５）$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n}=0$

$n \to -\infty$になると$1/n$は負の側から 0 に近づきますが、行きつく先はやはり 0 です。分母がn^2になると、分母が大きくなる割合が増し、速く 0 に収束します。分母が$\sqrt{n}$では、大きくなり方はnよりゆっくりですが、やはり 0 に収束します。分子が 1000 の場合もnが 1000 倍

になれば良いだけのことですから、結果は同じです。

6） $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b}{n+a}=0$,　　7） $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$,　　8） $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=1$

分子が一般に何であっても、分母に任意の数を足しても結果は変わりません。また、収束する項に 1 を足しても、収束した値に 1 を足した値になるだけです。収束するものが分母に来ても分母をその収束する値として計算するだけです。

9） $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$,　　10） $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n-1}=2$

11） $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2-1}=1$,　　12） $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+1}{3n^2-2n-1}=\dfrac{2}{3}$

これまでは形式的に表現して $\pm1/\infty$ のような形になる式について学んできましたが、次は ∞/∞ の形になる式を考えてみましょう。以下の例を見て下さい。分母も分子もともに無限大になるので収束性は一見不明です。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$

このような場合、分母の最も次数の高い項で分母分子を割るのがうまいやり方です。即ち、以下のようにすると分母の第 2 項は 0 になり、全体は 1 に収束することが分かります。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n}=1$$

以下の例も分母分子を n で割って答えを求めます。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{1-1/n}=2$$

次の場合は、分母分子を n^2 で割ります。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n^2}{1-1/n^2}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{3n^2-2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3/n+1/n^2}{3-2/n-1/n^2}=\frac{2}{3}$$

さて、もう気づかれたかも知れませんが、分母と分子が n の多項式で、次数が等しいとき、収束する値は最大次数の項の係数だけを見ていれば（その他の項を捨てれば）分かります。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{2}n^2+3n+1}{\mathbf{3}n^2-2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{2}n^2}{\mathbf{3}n^2}=\frac{2}{3}$$

実際の計算では、このようにして暗算で解答します。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=2,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$$

13) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$,　　14) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{-n^3+1}=0$

15) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}\to\infty$,　　16) $\displaystyle\lim_{n\to-\infty}\frac{n^2}{n+1}=-\infty$

次に分母と分子の次数が違う場合を見てみましょう。ここでも最大次数だけを見る方法は使えます。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{-n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{-n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}n\to\infty$$

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{n^2}{n+1}=\lim_{n\to-\infty}\frac{n^2}{n}=\lim_{n\to-\infty}n\to-\infty$$

ここで後ろの２式は特定の値に収束せず、$\pm\infty$になりますので、最後は「→」を使いました。ただ、この授業では「=」を使ってもよいことにしましょう。このように極限値が$\pm\infty$になる場合、極限値は発散すると言います。

これまでの計算で得られたことを一言で言うと以下になります。

直感的方法（ある変数が$\pm\infty$になる場合）

分母分子の最大次数の項の係数に注目（その他の項はすべてなくしてみる）

4.2　定数の極限

さて、次の式を見てみましょう。

$$\lim_{x\to a}f(x)$$

これは、xが限りなくaに近づくとき、$f(x)$がどのような振る舞いをするかを表すものですが、$x=a$で$f(x)$が連続の場合、その収束先は$f(a)$となります。しかし、連続性が保証されていない場合、xが大きい側から近づくのか、小さい側から近づくのかによって値が異なる場合もあります。

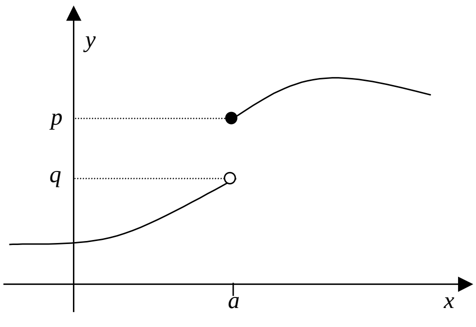


図1　不連続点への収束

例えば図 1 を見て下さい。黒丸は $x=a$ の点での関数の値ですが、左側から a に近づく（$x \to a-0$）と q に限りなく近づき、右側から近づく（$x \to a+0$）と p になります。

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=q\,, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=p$$

それでは例をやってみましょう。

1）$\displaystyle\lim_{x\to 0} x=0$　　　2）$\displaystyle\lim_{x\to 1} x^2=1$

3）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(x^2+2x+3\right)=3$　　　4）$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}$

これらの例は連続性のある場合ですから、値を代入すると簡単に結果は求まります。関数を使った複雑そうな場合でも同様です。

$$\lim_{x\to 0} a^x=a^0=1, \qquad \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)=\log_a 1=0$$

5）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+x}=1,$　　6）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{2x^2-3x}=-\frac{2}{3},$　　7）$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$

上は、単純に代入すると分子と分母が共に 0 になる場合です。まず最初に通分できるときは極力やっておく必要があります。残った式で収束を調べます。以下の例は問題なく理解できると思います。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{2x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{2x-3}=-\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

分子が有限で分母が 0 になる場合、状況によって結果は±∞になります。関数の符号を検討しながら見極める必要があります。

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty\,, \qquad \lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty$$

最後に、代入などで簡単に求められない極限で、重要な式が２つあります。これらは後に習う微分のところで使われます。

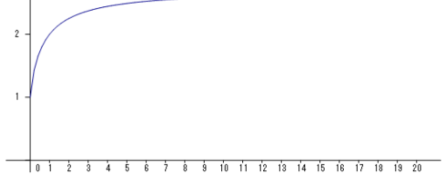
覚えておく例

1）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

（e=2.71828…ネーピア(Napier)の数）

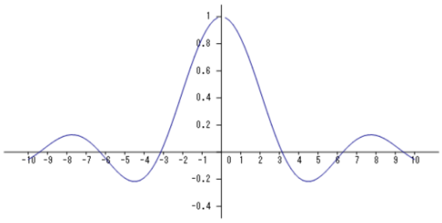
注）これは $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ の書き換えです。

グラフの関数形は、(1+1/x)＾x です。



２） $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{x} = a \right)$

グラフの関数形は、sin(x)/x です。



演習

１） $\lim_{n \to \infty} \frac{100}{n} =$

２） $\lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{3n+1} =$

３） $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - n + 1}{n+2} =$

４） $\lim_{x \to 0} \left(x^2 + 3x + 4 \right) =$