5.5　汎関数の微分

汎関数とは、$y=f(z)$ という形の関数で、さらに z が $z=g(x)$ のように x の関数として表わされるものを言います。一まとめにして書くと、$y=f(g(x))$ の形になっている関数です。例えば、以下のように見ると、$y=(x^2+x+1)^5$ や $y=e^{x^2}$ などが汎関数です。

$y=(x^2+x+1)^5$ については、$y=z^5$，$z=x^2+x+1$

$y=e^{x^2}$ については、$y=e^z$，$z=x^2$

このような関数について微分を考えてみましょう。dy/dx は x の微小な変動に対する y の微小な変動の極限を表わしていますから、間に $z=g(x)$ についての微小な変動を加えることも可能です。即ち、以下となります。

公式

$y=f(g(x))$ の微分

$z=g(x)$，$y=f(z)$ として　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}\times\dfrac{dy}{dz}$　（最後に z は元に戻します。）

この公式を用いて、微分を行ってみましょう。

例１

$y=(x^2+x+1)^5$

$z=x^2+x+1$ とすると、$y=z^5$ とおけます。これに公式を適用すると、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}=\frac{d}{dx}(x^2+x+1)\times\frac{d}{dz}(z^5)=(2x+1)\times 5z^4$$

右辺には z があるので、それを元の x の関数に戻します。

$$=(2x+1)\times 5(x^2+x+1)^4=5(2x+1)(x^2+x+1)^4$$

例２

$y=e^{x^2}$

$z=x^2$ とすると、$y=e^z$ とおけます。これに公式を適用すると、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}=\frac{d}{dx}(x^2)\times\frac{d}{dz}(e^z)=2x\times e^z$$

右辺には z があるので、それを元の x の関数に戻します。

$$=2x\times e^{x^2}=2xe^{x^2}$$

ガイドラインに沿って、以下の問題をやってみましょう。

問題

１）$y=(2x+1)^3$　　$z=$　　　　　，$y=$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}=$$

２）　$y = \sin(x^2 + 1)$　　　$z =$　　　　　　，　$y =$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dz} =$$

３）　$y = x^2 e^{3x}$　　　（**複合問題**）

$y = x^2 u$　とすると掛け算の公式から、$y' =$

$u = e^{3x}$　とすると　　　$z =$　　　　　　，　$u =$

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx} \times \frac{du}{dz} =$$

組み合わせると

$y' =$

問題解答

１）　$y = (2x + 1)^3$　　　$z = 2x + 1$,　　$y = z^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dz} = \frac{d}{dx}(2x+1) \times \frac{d}{dz}(z^3) = 2 \times 3z^2$$

$$= 6(2x+1)^2$$

２）　$y = \sin(x^2 + 1)$　　　$z = x^2 + 1$,　　$y = \sin z$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dz} = \frac{d}{dx}(x^2+1) \times \frac{d}{dz}(\sin z) = 2x \times \cos z$$

$$= 2x \cos(x^2 + 1)$$

３）　$y = x^2 e^{3x}$　　　（**複合問題**）

$y = x^2 u$　とすると掛け算の公式から、$y' = (x^2)' u + x^2 u' = 2xu + x^2 u'$

まず u の微分を考えてみます。

$u = e^{3x}$　ですから、　　$z = 3x$,　　$u = e^z$

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx} \times \frac{du}{dz} = \frac{d}{dx}(3x) \times \frac{d}{dz}(e^z) = 3 \times e^z$$

$$= 3e^{3x}$$

組み合わせると

$$y' = 2xu + x^2 u' = 2xe^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x} \quad (= (2x + 3x^2) e^{3x})$$

最初は難しいですが、十分慣れてくると、どんな関数でも暗算で微分できるようになります。

演習

$y=(x^2+3x+1)^4$　　　　$z=$　　　　　　　　　，　$y=$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}=$$

微分公式まとめ

$y=\mathrm{c}\to y'=0$

$y=x^n\to y'=nx^{n-1}$

$y=e^x\to y'=e^x$

$y=\log_e x\to y'=1/x$

$y=\sin x\to y'=\cos x$

$y=\cos x\to y'=-\sin x$

$y=\tan x\to y'=1/\cos^2 x$

$y=af(x)\to y'=af'(x)$

$y=f(x)\pm g(x)$
　$\to y'=f'(x)\pm g'(x)$

$y=f(x)g(x)$
　$\to y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$y=f(x)/g(x)$
　$\to y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

$y=f(g(x))$
　$z=g(x)$，　$y=f(z)$　とおいて
　$\to y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}\times\dfrac{dy}{dz}$