5.7　2 階微分と変曲点　【動画】

前節までで曲線の極大と極小を求める方法が分かりましたが、具体的にグラフを描こうとすると、曲線の増加、減少だけでなく、その曲がり方も気になります。そこで、この節ではグラフの曲がり方に関係する 2 階微分について考えてみます。

2 階微分とは、1 度微分した後、もう 1 度微分することです。2 階微分に対して最初の微分のことを 1 階微分と言うこともあります。例を見てみましょう。

1 階微分　$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 4 \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y' = 3x^2 + 6x - 9$

2 階微分　$\dfrac{dy}{dx} = y' = 3x^2 + 6x - 9 \rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = y'' = 6x + 6$

ここで、2 階微分を表わすには、以下のような表記法が使われます。

$y = f(x)$ に対して　$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2}{dx^2} f(x) = y'' = f''(x)$

2 階以上の微分もありますので、一般の n 階微分についてその表記法も示しておきましょう。

$y = f(x)$ に対して　$\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{d^n}{dx^n} f(x) = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$

n 階微分と言っても、微分を n 回繰り返すだけですから、計算量は増えるとしても、特に難しいものではありません。

さて、ではなぜこの 2 階微分が曲線の曲がり方と関係あるのでしょうか。微分は接線の傾き、即ち関数の増減を表わすと言いましたが、以下の図を見て下さい。左側の図では、x の値が増大するにつれて接線の傾きは増加していますが、右側の図では、接線の傾きは逆に減少しています。つまり、接線の傾きについて言えば、左は増加関数、右は減少関数となります。即ち、接線の傾きを表わす関数を微分すると、左は正、右は負の値が得られます。接線の傾きを表わす関数とは、元の関数の微分ですから、左の図は 2 階微分が正、右の図は 2 階微分が負になっています。

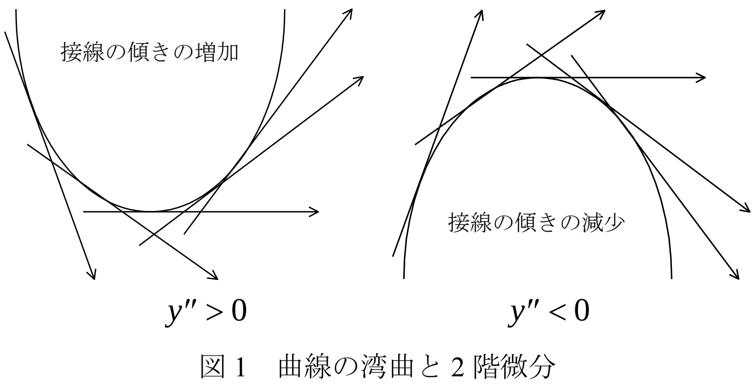


図 1　曲線の湾曲と 2 階微分

即ち、左のような下に凸のグラフでは 2 階微分が正、右のような上に凸のグラフでは 2 階微分が負になります。

さて、上の図のように上に凸と下に凸の曲線が混在する場合、その境界には曲線の曲がり方が変わる点が存在します。この点は変曲点と呼ばれ、そこでは $y''=0$ となっています。

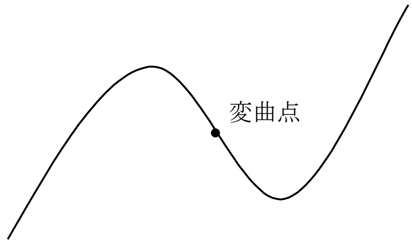


図 2　変曲点

例として、関数 $y=x^3+3x^2-9x-4$ の変曲点を求めてみましょう。

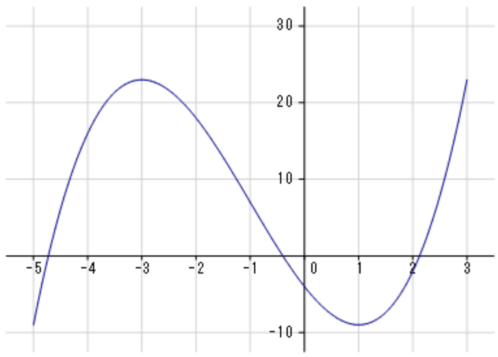
1 階微分して、 $y'=3x^2+6x-9$

2 階微分して、 $y''=6x+6=0$

これより、$x=-1$，この値を元の関数に代入した $y=7$ で与えられる点 $(-1,7)$ が変曲点となります。

ここでは曲線の曲がり方について検討してみます。以下のような表を作ると、曲がり方は明らかです。

x		-1	
y''	－	0	＋
y	上に凸	7	下に凸



パソコンを利用利用する場合は、
1 変数関数グラフの実行画面で、
「変曲点」ボタンをクリックします。
変曲点　$(-1,7)$

一般的なグラフ

ここからは多項式の形のグラフから離れて、もう少し一般的な算術関数のグラフを描いてみましょう。パソコンを用いると簡単ですが、一応式を解いて求めてみます。
授業ではパソコンを使います。

例 1　$y=x+\dfrac{1}{x}$　のグラフを描き極値を求めよ。

y 軸との交点　　　$y=$ なし

$x=0$ にできません。

x 軸との交点　　　$x=$ なし

$x+1/x=0$　は $x^2=-1$　となり、

実数の解はありません。

極値

$y' = 1 - x^{-2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 0$ を解くと、$x = \pm 1$　　これを元の式に代入して、$y = \pm 2$

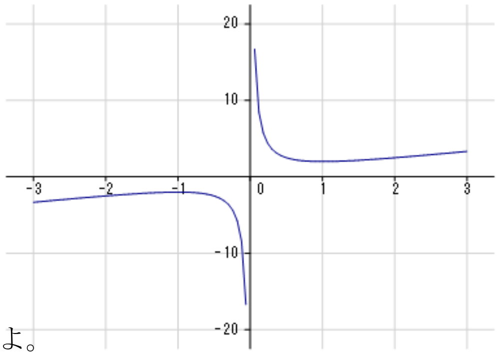
x		-1		0		1	
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	↗	-2	↘		↘	2	↗

$(-1,-2)$ ［$\boxed{\text{極大}}$・極小］

$(1,2)$ ［極大・$\boxed{\text{極小}}$］

変曲点　$y'' = 2x^{-3} = 0$　解がありません。

変曲点なし



例２　$y = e^x - x$　のグラフを描き、極値を求めよ。

y 軸との交点　　$y = e^0 - 0 = 1$

x 軸との交点　　$x =$ なし

$y = e^x$ は $y = x + 1$ と接するため、$y = x$ とは交わらないから。

極値

$y' = e^x - 1 = 0$　解は $x = 0$

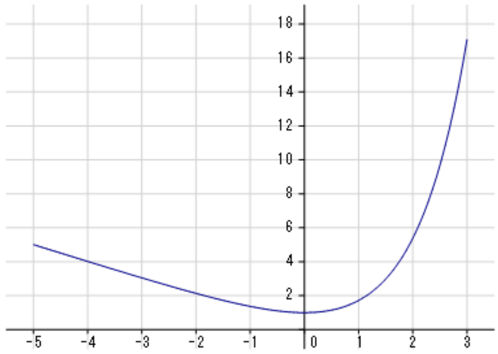
これより、$y = e^0 - 0 = 1$

x		0	
y'	$-$	0	$+$
y	↘	1	↗

$(0,1)$ ［極大・$\boxed{\text{極小}}$］

変曲点　$y'' = e^x = 0$　解がありません。

変曲点なし



演習　$y = e^{-x^2}$　のグラフを描き、極値と変曲点を求めよ。（パソコンで実施すること）

y 軸との交点　　$y =$

x 軸との交点　　$x =$

極値

(　　　　,　　　　) ［極大・極小］

変曲点

(　　　　,　　　　)

(　　　　,　　　　)

この関数は統計に表れる正規分布を表す関数として非常に有名です。