# ３章　関数　【第１回】

## 3.1　関数とは

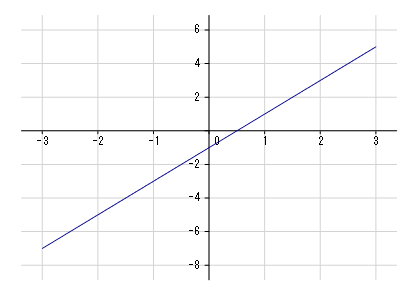


のように、いくつかの変数の値を与えたら１つの値が決まる対応関係のことである。

## 3.2　1次関数



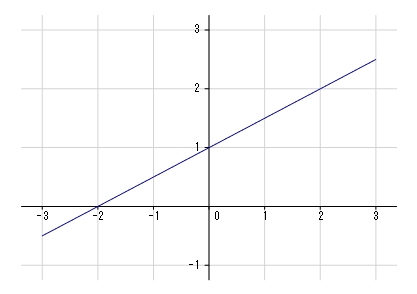
傾き：  　　軸との交点： 　　軸との交点：

例１　　のグラフ

傾き

軸との交点

軸との交点

例２　　のグラフ

傾き

軸との交点

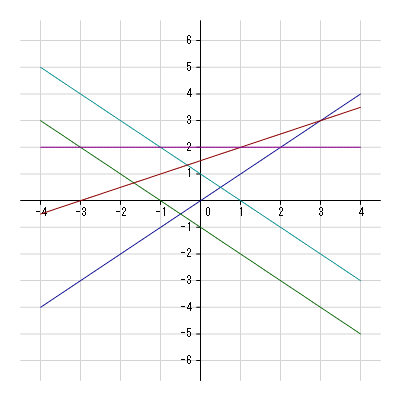
軸との交点

問題　以下のグラフを表示せよ。

1)  2) 

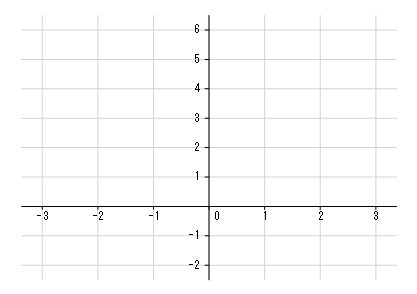
3)  4) 

5) 



演習　　のグラフについて以下を求め、グラフを描け。

傾き

軸との交点

軸との交点

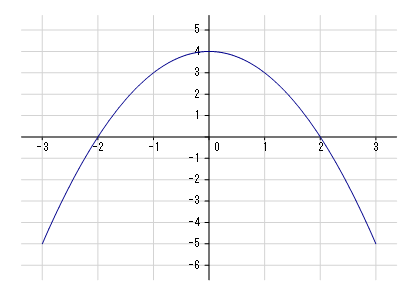
## 3.3　2次関数　【第２回】

例１　　のグラフ

軸との交点

軸との交点

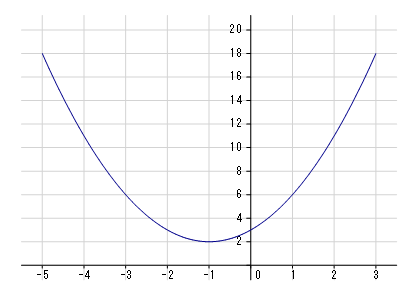
頂点（下に凸）

例２　　のグラフ

軸との交点

軸との交点

頂点（上に凸）

例３　　のグラフ

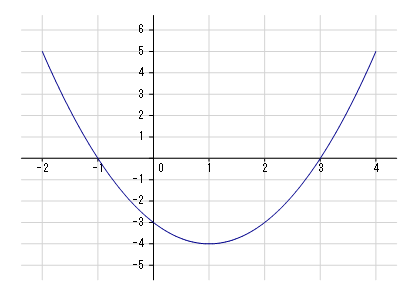
軸との交点

軸との交点

頂点（下に凸）

　この形で書くと頂点が分かり易い。

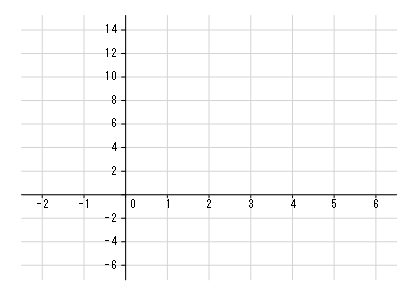
例４　　のグラフ

軸との交点

軸との交点

頂点（下に凸）

演習　　のグラフについて以下を求めよ。

軸との交点

軸との交点

頂点（下に凸）

公式　　のグラフ

軸との交点



軸との交点　　より（2次方程式）、



頂点（ のとき下に凸， のとき上に凸）

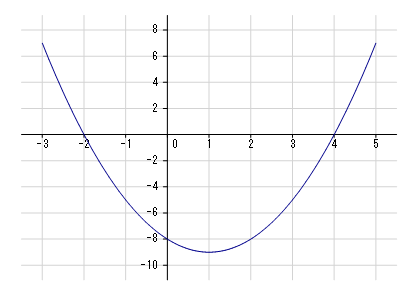
　と変形して、

### 2.　2次関数のグラフの性質【第３回】

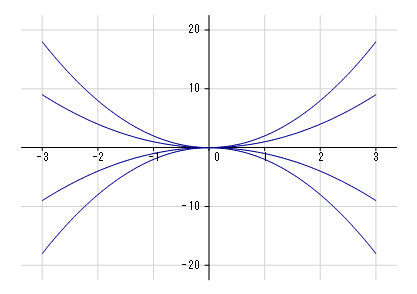
例1　 のグラフ

 の形で書くと頂点がはっきりする。

 の形で書くと 軸との交点がはっきりする。



例２　　（, , , ）のグラフを比較する



グラフの移動

 　横に  移動する

 ［］ 　縦に  移動する

例

１） ［横・縦］に［　　　］移動

２） ［横・縦］に［　　］移動

３） 　　横に 1 移動

４） 　　縦に 5 移動

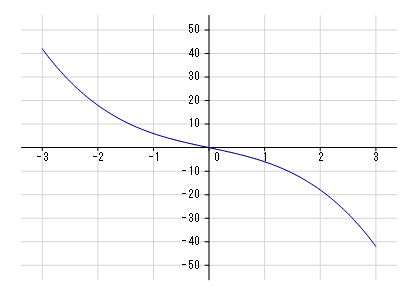
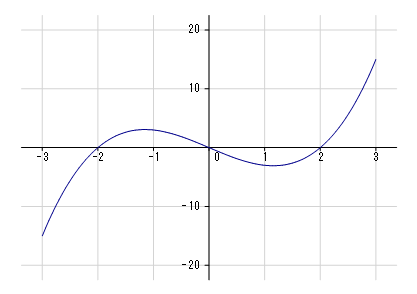
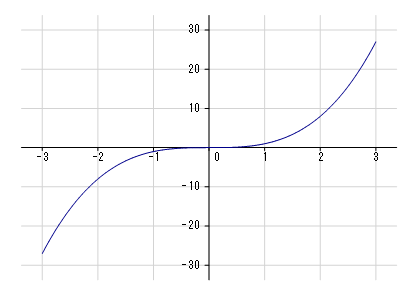
## 3.3　３次関数と４次関数

一般に、 次関数



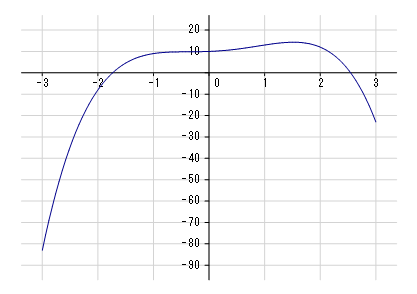
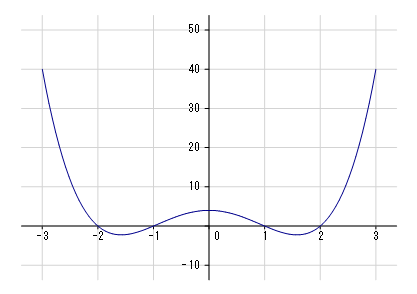
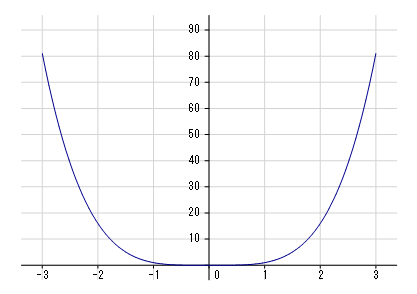
いろいろな３次関数

例　, , 



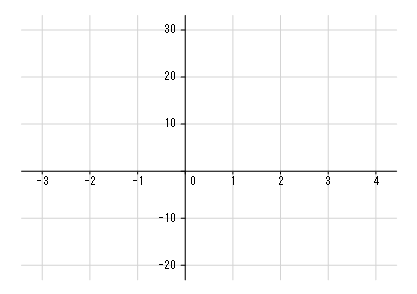
いろいろな４次関数

例　, , 



演習

１） ［横・縦］に［　　　］移動

２） の概形を描け。

軸との交点を求めよ。

とおいて、



軸との交点を３つ求めよ。

とおいて、（または図から）



## 3.4　指数関数　【第４回】

### 1.　指数の性質

１） 公式

２） より、 

３） より、 

４） 

５） 

６） 

７） より、 

問題1

以下の値を求めよ。

１） ２）

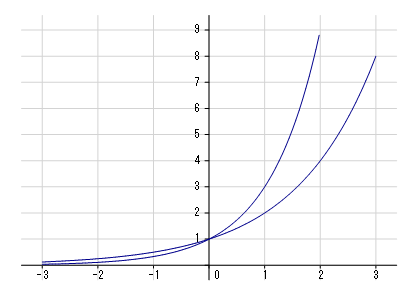
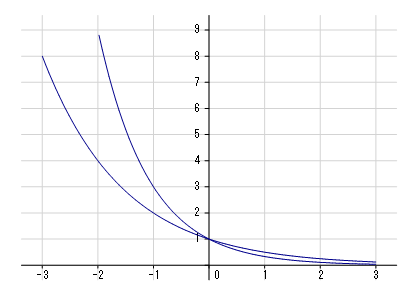
３） ４）

５） ６）

### 2.　指数関数のグラフ

例　

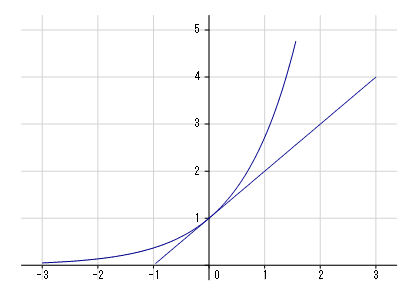
,  のグラフ　　　　　　　,  のグラフ

のときは右上がり　　　　　　　　のときは右下がり

重要な式と値

（ネーピアの数 ）



特徴　での接線の傾きが1　（接線の式は）

問題２　グラフと接線

以下のグラフを描いて、での接線の式を求めよ。

 接線の式　

演習１　以下の値を求めよ。

１） ２）

３） ４）

演習２　以下のグラフは右上がりか、右下がりか。

１） 右［上がり・下がり］

２） 右［上がり・下がり］

３） 右［上がり・下がり］

４） 右［上がり・下がり］

## 3.5　対数関数　【第５回】

### 1.　対数の性質

１） 注） の  を対数の底と呼ぶ

4 公式

２） 

３）　

４），



５），　 

６）

 　重要

問題

１） ２）

３）

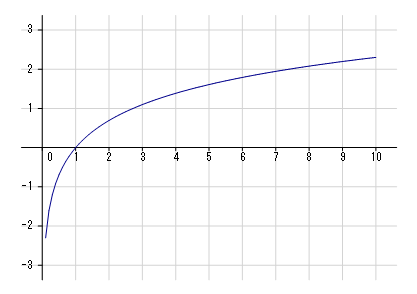
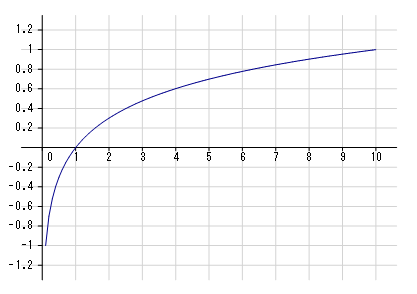
４） （自然対数　log( ) 関数）

５） （常用対数　log10( ) 関数）

６） 　　　公式６）利用

### 2.　対数関数のグラフ

　　自然対数　のグラフ　　　　　常用対数　 のグラフ

演習１

１）

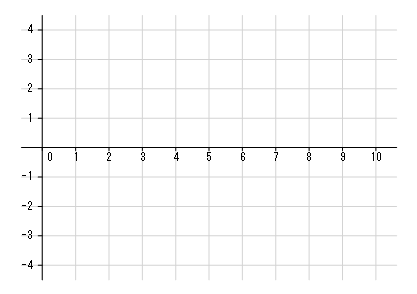
２）

３） 　　（log( ) 関数）

４） 　　（log10( ) 関数）

演習２

 のグラフを描け。



注） のグラフの位置に気を付けること（例：など整数）

## 3.6　三角関数　【第６回】

角度の単位

ラジアンによる角度表現 　　　　重要

三角関数とは





三角関数と符号

必ず覚えておく値

1

1

1

2

問題

１） ２） ３）

４） ５） ６）

以後はパソコンを使って

７） 　　８）

特に重要な三角関数の角度の関係

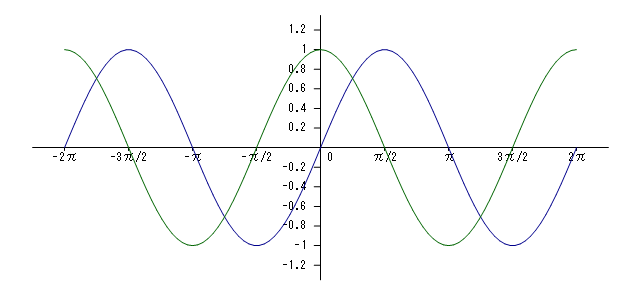
 　



三角関数のグラフ

 と  を正弦波と呼ぶ。

２つは、形は同じでずれているだけ（位相が違うという）



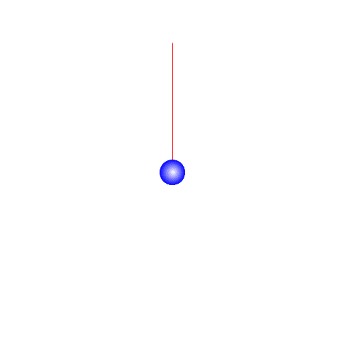
演習　以下の値を求めよ。

１） 　　２）

３） 　　４）

５） 　　６）

### 三角関数の応用（幾何アニメーション）　【第７回】

例１　三角関数とバネ

define y=sin(0)

connect (0, 3)-(0, y), red, 1

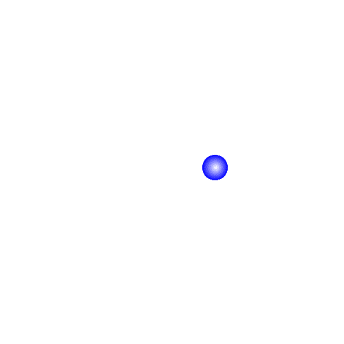
ball (0, y), 0.3, blue

問題

１）2行目の最後の1を5に変えて、ひもをバネにせよ。

２）1行目の sin(0) を sin(time) に変えて、バネを動かせ。

３）バネの速さを２倍にせよ。

例２　三角関数と円運動

define x=cos(time)

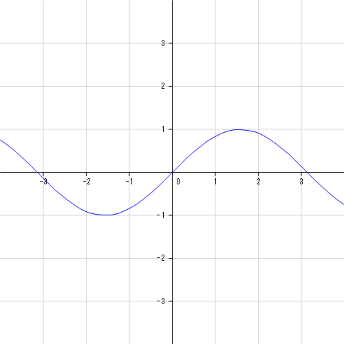
define y=sin(time)

ball (x, y), 0.3, blue

問題

１）円運動の半径を2倍にせよ。

２）円運動の速さを2倍にせよ。

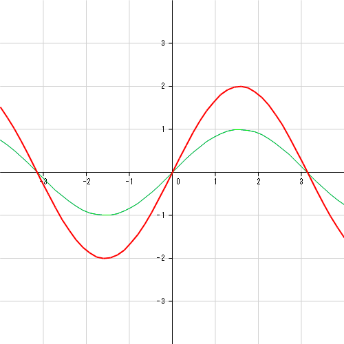
例３　三角関数の移動

axis

func y=sin(x-time), blue

問題

１）波を左向きに動かせ。

例４　三角関数の重ね合わせ

axis

define y1=sin(x-time)

define y2=sin(x)

func y1, blue

func y2, green

func y1+y2, red, 2

問題

１）3行目の y2=sin(x) を y2=2\*sin(x) にして、足した波の波形を調べよ。

２）3行目の y2=sin(x) を y2=sin(x+time) にして、足した波の波形を調べよ。

位相（角度）のずれた正弦波（sin関数）を足しても正弦波

同じ波が左右からぶつかると定常波（ギターの弦など）

演習　波長の違う波の重ね合わせ

例４で、3行目の y2=sin(x) を y2=sin(2\*x) にしても（波長をかえても）、足した波の形は正弦波（sin関数）になるか。どちらか○を付けよ。

注）例４の形に戻してから変更すること。

［正弦波になる・正弦波にならない］

# ４章　極限　【第８回】

## 4.1　無限大に関する極限

例

１） ２）

３） ４）

５） ６）

７） ８）

９） 10）

11） 12）

13） 14）

15） 16）

　　直感的方法

分母の次数＝分子の次数　のとき、分母分子の最大次数の項の係数に注目

分母の次数＞分子の次数　のとき、極限は 0

分母の次数＜分子の次数　のとき、極限は 

## 4.2　定数の極限

例

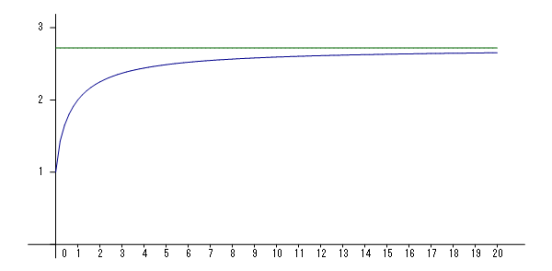
１） ２）

３） ４）

５） ６）

７）

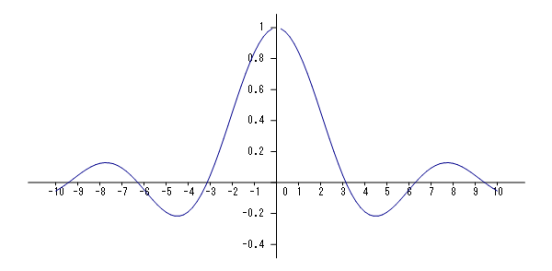
５）～７）通分できる場合は、先にやっておく。



覚えておく例

１）

(=2.71828…ネーピア(Napier)の数)



２） 

演習

１） ２）

３） ４）

# ５章　微分　【第９回】

## 5.1微分とは

のとき

　を関数の における微分という。

微分は点 における接線の傾きを表す。



図　接線の傾きと微分

微分の他の表現法



微分の例

公式

 のとき、

問題　以下の関数の における微分を求めよ。

１）

２）

３）

４）

５）

６）

７）

演習　以下の関数の における微分を求めよ。

１）

２）

３）

４）

５）

## 5.2　算術関数の微分　【第10回】

公式　重要

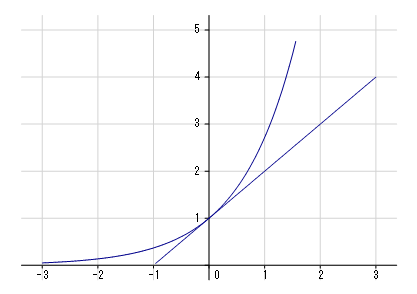
 



解説

a) の原点での接線の傾きを表す公式



（ のグラフでは  で接線の傾きが1）

これを使うと、



b) 



注）半角の公式



## 5.3　関数の定数倍と和の微分

公式





問題

１）

２）

３）

４）

５）

６）

７）

演習

１）

２）

３）

４）

## 5.4　関数の積と商の微分　【第11回】

公式





証明（掛け算）











問題

１）

２）

３）

４）

５）

６）

７）

８）

注）　　括弧を忘れないこと。

|  |  |
| --- | --- |
| 公式 |  |

演習

１）

２）

３）

## 5.5　汎関数の微分【第12回】

汎関数とは、 の形になっているもの

　とおいて処理する。

例

公式

の微分

，として　　　　　（最後には元に戻す。）

例１



例２



問題

１）　　　　　　　　　　　，



２）　　　　　　　　　　　，



３）　　（複合問題）

　とすると掛け算の公式から、

　とすると　　　　　　　　　，



組み合わせると



演習

　　　　　　　　　　　　　，



微分公式まとめ

|  |  |
| --- | --- |
|  | ，　とおいて |

## 5.6　微分と極値　【第13回】



関数の増加、減少は接線の傾き、即ち微分の符号で分かる｡

極大点・極小点のy座標の値を極大値・極小値（総称：極値）という。

例１　　の極値を求めよ｡

微分を求める。



極値を求める。

 を解く。

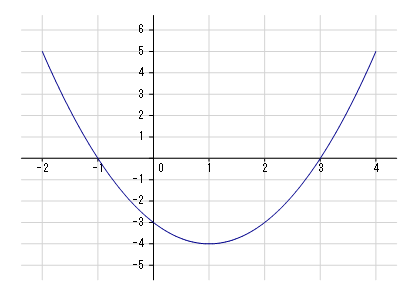
 これをの式に代入して、

関数増減表

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

極値

［極大・極小・停留点］



パソコンを利用する

軸との交点 　

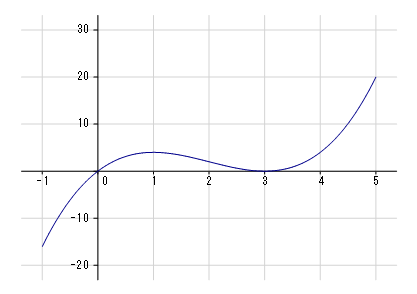
軸との交点 　

極値

［極大・極小・停留点］

グラフの概形

例２　 の極値とグラフを求めよ｡

パソコンを利用する。

軸との交点 　

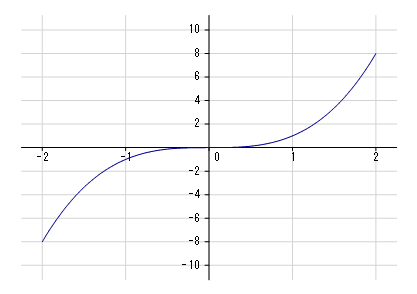
軸との交点 　

極値

［極大・極小・停留点］

［極大・極小・停留点］

グラフの概形

例３　 の極値とグラフを求めよ｡

パソコンを利用する。

軸との交点 　

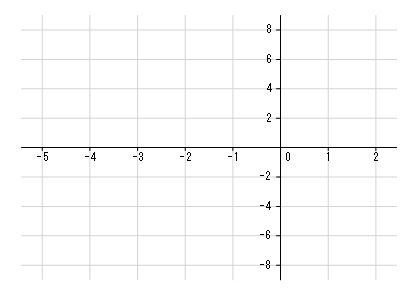
軸との交点 　

極値

［極大・極小・停留点］

グラフの概形

演習　 の極値とグラフを求めよ。

パソコンを利用する。

軸との交点 　

軸との交点 　

極値

［極大・極小・停留点］

グラフの概形

## 5.7　2階微分と変曲点【第14回】

２階微分とは

１階微分： → 

２階微分： → 

２階微分と変曲点の意味

　変曲点とは、関数の曲線の凸の向きが変化する点。

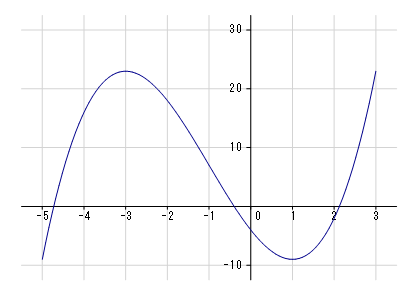
　　　　　　　　　

変曲点では 

例 以下の関数の変曲点を求める

→ 　→ 



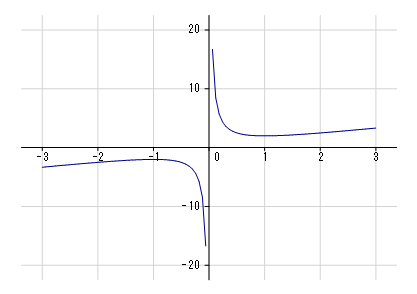
 のとき 　　　変曲点 

パソコンの利用

変曲点

一般的なグラフ

例１　　のグラフを描き極値を求めよ。

軸との交点 　

軸との交点 　

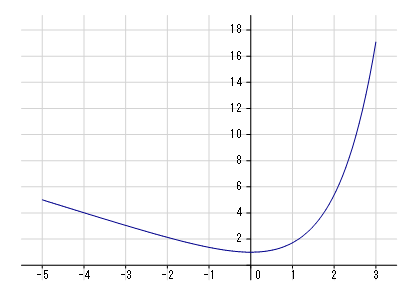
極値

［極大・極小］

［極大・極小］

グラフの概形

例２　　のグラフを描き、極値を求めよ。

軸との交点 　

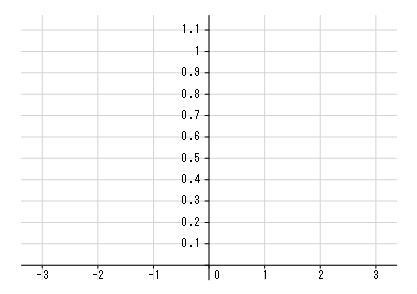
軸との交点 　

極値

［極大・極小］

グラフの概形

演習　　のグラフを描き、極値と変曲点を求めよ。

軸との交点 　

軸との交点 　

極値

［極大・極小］

変曲点





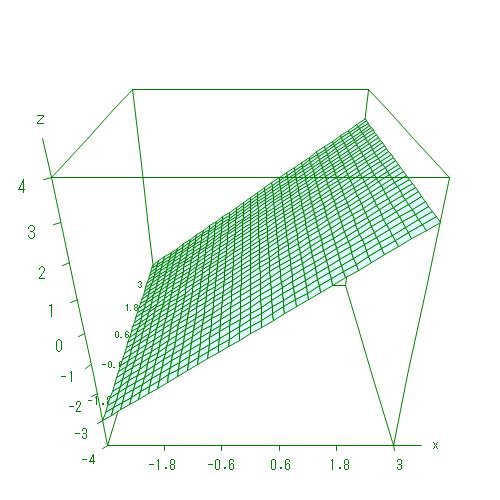
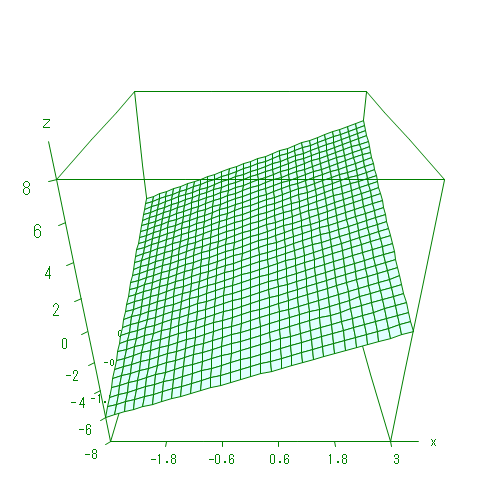
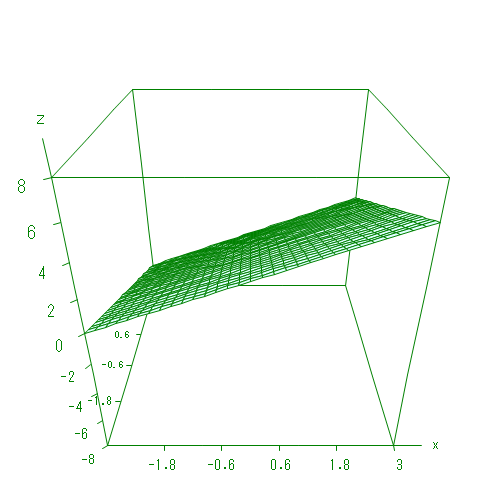
グラフの概形

## 3.7　２変数関数　【第７回】

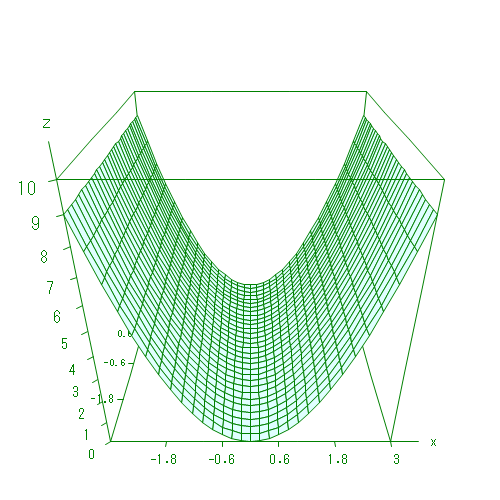
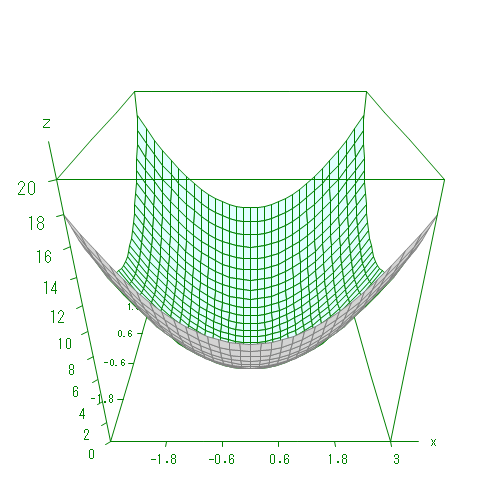
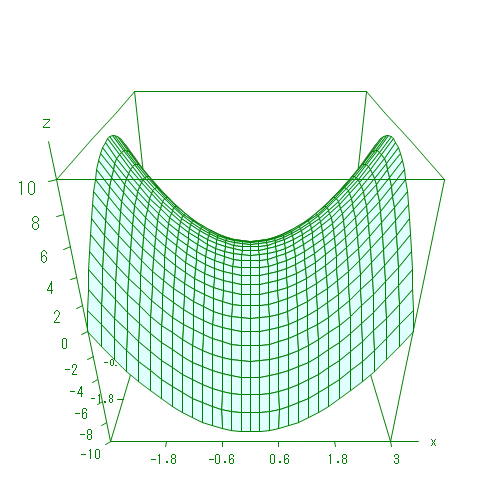
［分析－数学－グラフ－2変数関数グラフ］を利用する。

例

[z=] x　 [z=] x+y [z=] ？

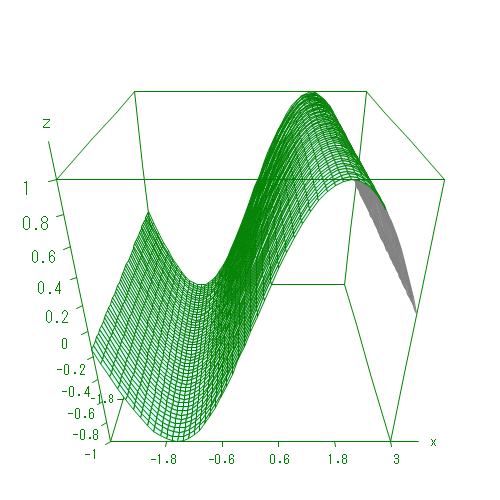
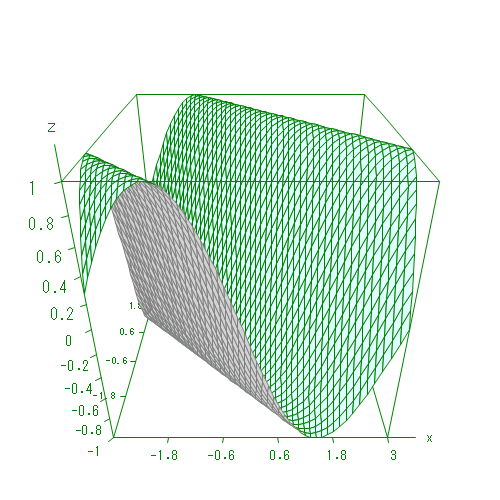
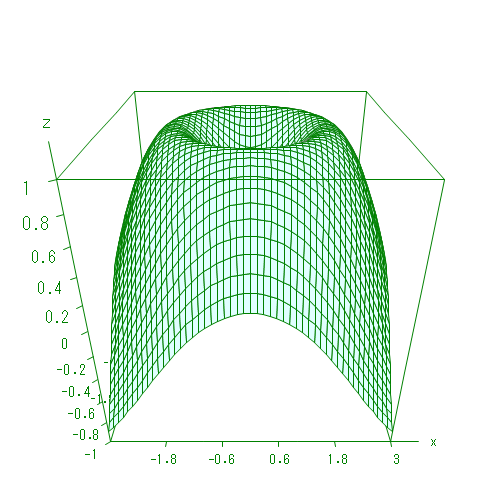
[z=] x^2 [z=] x^2+y^2 [z=] ？

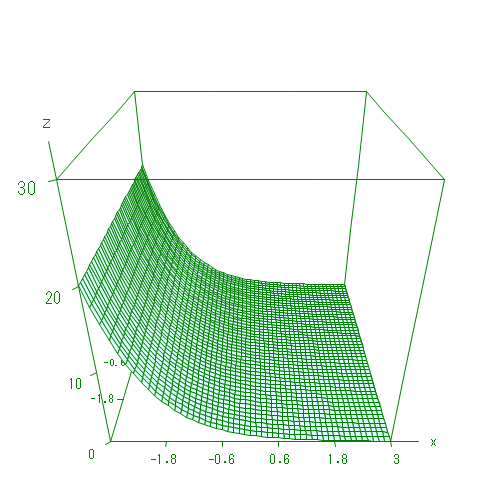
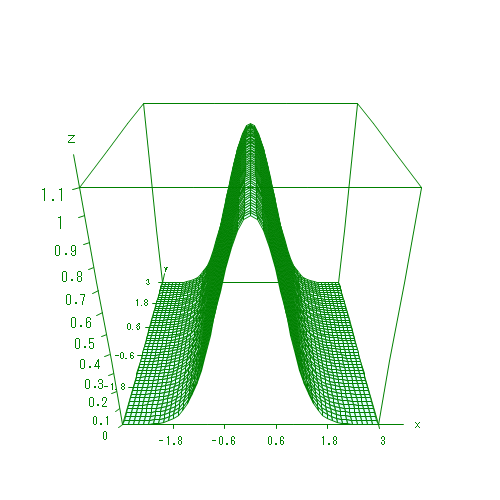
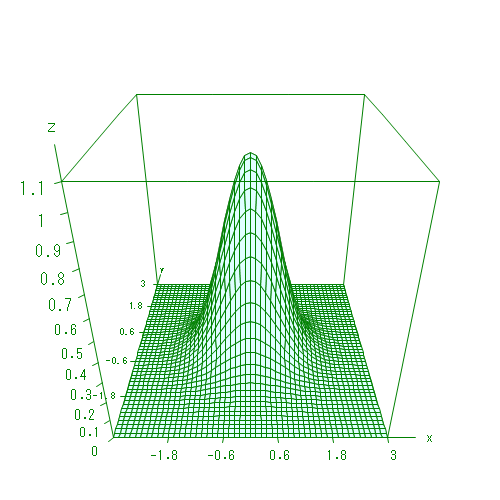
鞍点

極小点

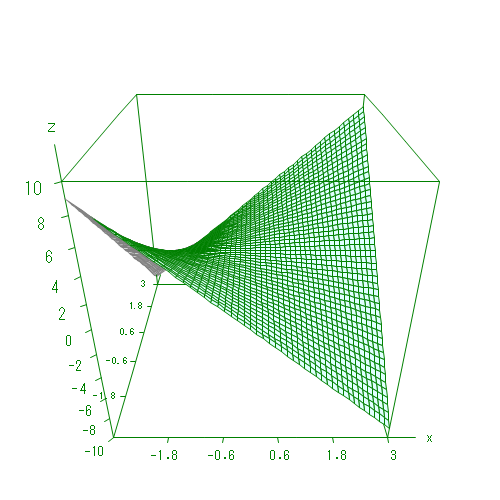
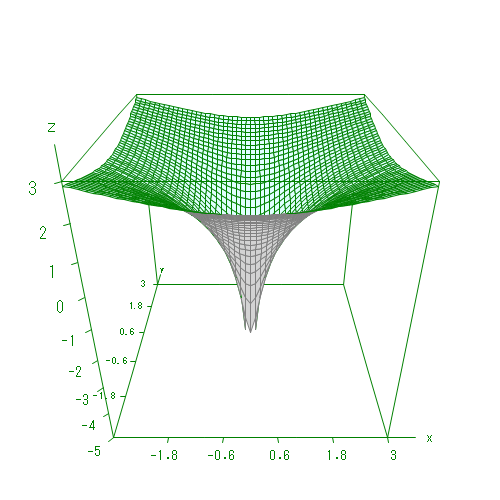
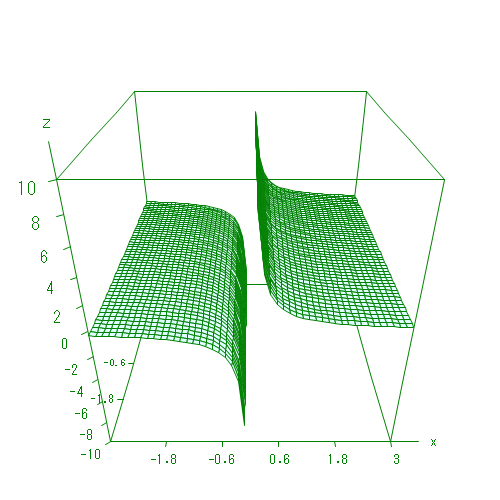
[z=] sin(x)　　　　　　 [z=] sin(？)　　　　　　[z=] sin((x^2+y^2)^0.5)

[z=] exp(-x) [z=] exp(-x^2) [z=] exp(？)

[z=] x ? y [z=] ？ [z=] ？(x^2+y^2)

演習　３次元幾何アニメーション

range -6, 6

define r=(x^2+y^2)^0.5

func z=sin(r ), cyan, -10, -10, 10, 10

これに時間（time）をうまく入れて、波が中心から周りに伝わるようにせよ。

よく分かる人は波のスピードも適当に設定してね。

## 3.8 パラメータ関数　【第９回】

 の形で円は描けるか。

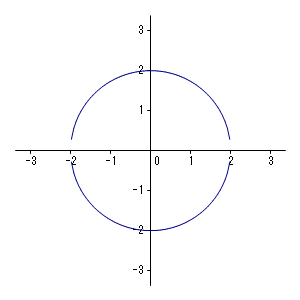
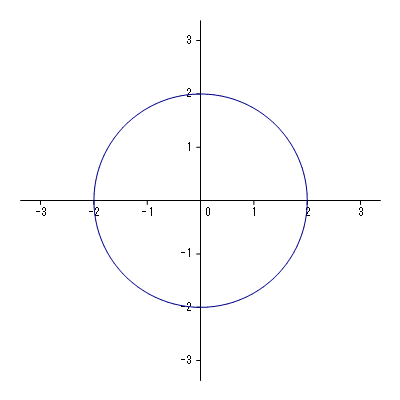
 として、 

 陰関数形式

問題点

 の記号が入り、１つの式では表せない。（数学上の問題点）

また実際に図を描こうとすると、立ち上がりの部分が難しい。



さらに、例えば、渦巻きなどはどうやって描くのか？

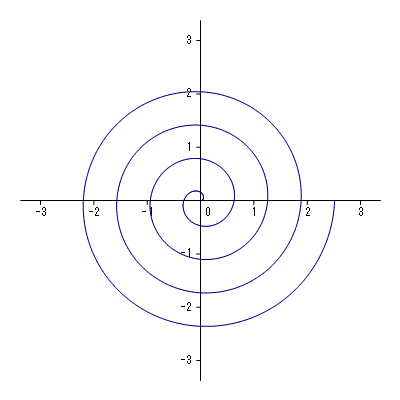
答　２次元パラメータ関数を使う。

　　　［　］内は書かない。

例１　円（含楕円）

[x=] 2\*cos(u)

[y=] 2\*sin(u)

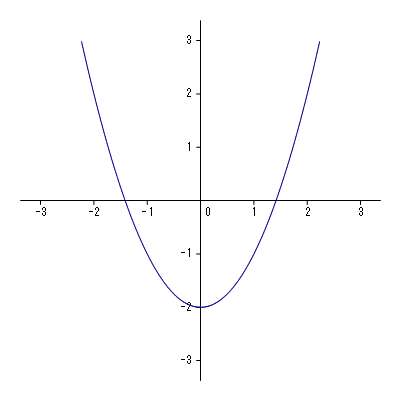


例２　渦巻き

u変数0～8\*pi、u分割数を500にする。

[x=] u/10\*cos(u)

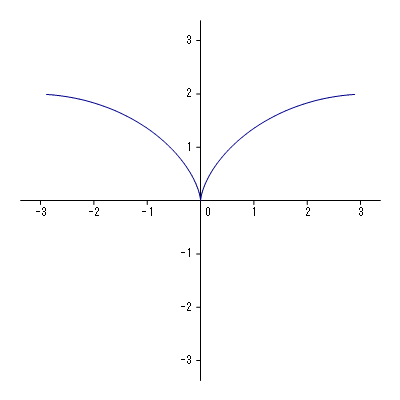
[y=] u/10\*sin(u)

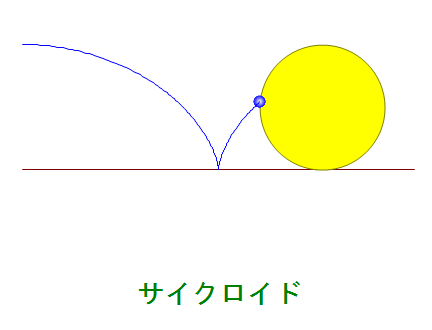
例３　普通の2次関数

u変数 -3 ～ 3、u分割数を100に戻す。

[x=] u

[y=] u^2-2

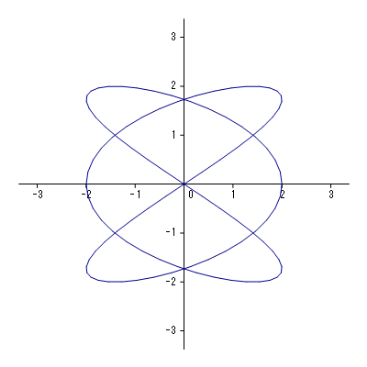


例４　サイクロイド

u変数 0 ～ 2\*pi

[x=] u+sin(u)-pi

[y=] 1+cos(u)



例５　リサージュ図形

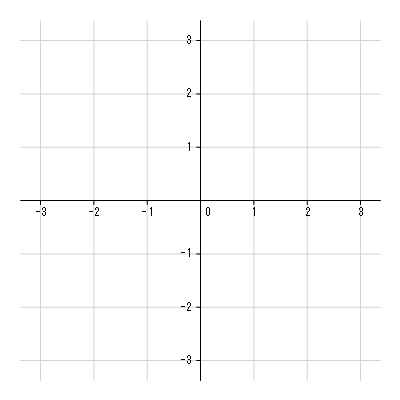
u変数 0 ～ 2\*pi

[x=] 2\*cos(3\*u)

[y=] 2\*sin(2\*u)

演習

リサージュ図形で1行目を 2\*cos(u) にすると図形はどうなるか描け。



## 付録　汎関数の微分

汎関数とは、（）の形になっているもの

例

,



公式



 とおくと 　　

例





## 付録　一般的な関数の微分

例













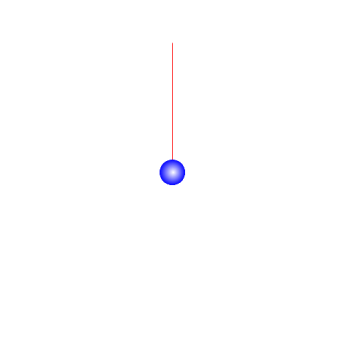




微分公式まとめ

|  |  |
| --- | --- |
|  | とおいて |

三角関数の応用　【第７回】

例１　三角関数とバネ

define y=sin(0)

connect (0, 3)-(0, y), red, 1

ball (0, y), 0.3, blue

問題

１）2行目の最後の1を5に変えて、ひもをバネにせよ。

２）1行目の sin(0) を sin(time) に変えて、バネを動かせ。

例２　三角関数と円運動

define x=cos(time)

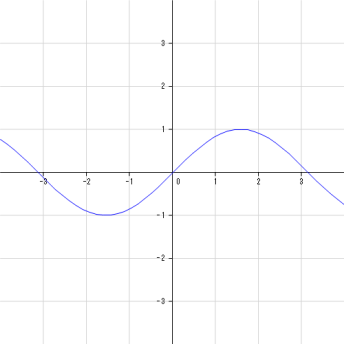
define y=sin(time)

ball (x, y), 0.3, blue

問題

１）円運動の半径を2倍にせよ。

２）円運動の速さを2倍にせよ。

例３　三角関数の移動

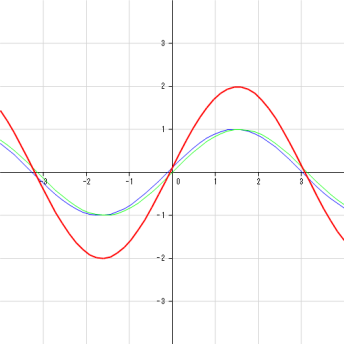
axis

func y=sin(x-time), blue

問題

１）波を左向きに動かせ。

例４　三角関数の重ね合わせ



axis

define y1=sin(x-time)

define y2=sin(x)

func y1, blue

func y2, green

func y1+y2, red, 2

問題

１）3行目の y2=sin(x) を y2=2\*sin(x) にして、足した波の波形を調べよ。

２）3行目の y2=sin(x) を y2=sin(x+time) にして、足した波の波形を調べよ。

位相（角度）のずれた正弦波（sin関数）を足しても正弦波

同じ波が左右からぶつかると定常波（ギターの弦など）

演習　波長の違う波の重ね合わせ

例４で、3行目の y2=sin(x) を y2=sin(2\*x) にしても、波の形は正弦波（sin関数）になるか。どちらか○を付けよ。

注）例４の形に戻してから変更すること。

［高さのそろった正弦波になる・正弦波にならない］