１．線形計画法　【動画】

1.1　LP の例

経営についての数学モデルで、ある条件のもとに、最大の利益を探る問題を数理計画問題といいます。特に利益を表す式と条件を表す式がいくつかの変数の 1 次式で表される場合を線形計画問題といいます。また、その問題を解く手法のことを線形計画法と呼びます。

簡単な例として、ある工場で２つの製品 1 と 2 を作っている場合を考えます。その製品を作るには 3 つの原料A，B，Cを使用するとして、原料の供給量には上限があるとします。また、それぞれの製品を 1 単位（個でもよい）作るための原料にも必要量があり、それらは表 1 のようになっているとします。

表 1　製品と原料

原料＼製品	1 (x1)	2 (x2)	原料の供給量 (kg)
A	1	3	６０
B	3	4	１００
C	2	1	５０
製品１単位当りの利益（万円）	5	6	最大化

製品 1 を 1 単位作るには原料Aを 1kg、原料Bを 3kg、原料Cを 2kg 使い、製品 2 を 1 単位作るには原料Aを 3kg、原料Bを 4kg、原料Cを 1kg 使うとします。

原料の供給量の上限はAが 60kg、Bが 100kg、Cが 50kg です。製品を作ると 1 単位作るごとに、製品 1 では 5 万円、製品 2 では 6 万円の利益が出るものとします。最大の利益をあげるためには製品 1 と 2 をいくらずつ作ればよいでしょうか。

これは条件の付いた利益最大化の問題です。

利益を表す式を目的関数、条件を表す式を制約条件といい、x_1 と x_2 をそれぞれ製品 1 と製品 2 の製造量として、この問題を式で表すと以下のようになります。

目的関数（objective function）

$z = 5x_1 + 6x_2$　　最大化　　　　利益が 5 万円と 6 万円

制約条件（constraints）

$$x_1 + 3x_2 \le 60$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 100$$　　上から原料 A,B,C の制約、製造量は非負
$$2x_1 + x_2 \le 50$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

目的関数も制約条件もすべて 1 次式なので、この問題は線形計画問題と呼ばれます。

College Analysis を用いてこの問題を解いてみることにしましょう。ここでは問題を解くためのプログラムの使い方を簡単に説明します。メニュー［分析－ＯＲ－線形計画法」を選択すると、以下に示される分析実行画面が表示されます。。

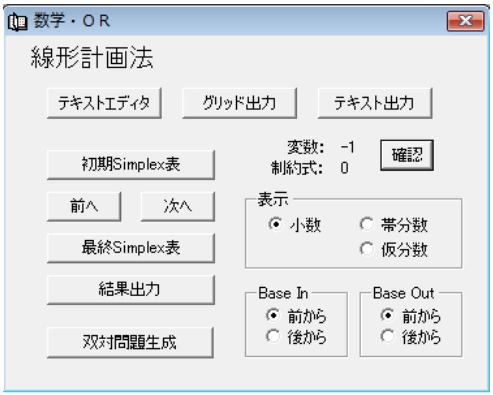


図１　線形計画法の実行画面

プログラムの実行には、グリッド（表入力画面）に書かれた表１によく似た形式のデータが必要ですが、「テキストエディタ」に式を書き込み、それをグリッドの形式に変換する方法もあります。ここでは後者の方法を採用し、まず「テキストエディタ」ボタンをクリックします。表示されたメモ帳のようなところに、以下のように半角英数で式を書きこみます。上の数式から意味は理解できると思います。

z=5*x1+6*x2　max

x1+3*x2<=60

3*x1+4*x2<=100

2*x1+x2<=50

x1, x2>=0

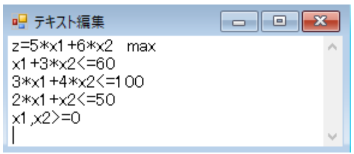


図２　テキスト入力

一番上が目的関数で「max」の前は１つ空欄を入れて下さい。２番目以降は制約条件です。「≦」は「<=」のように打ち込みます。「*」記号などを忘れないようにして下さい。

打ち終わったら、実行画面の「グリッド出力」ボタンをクリックします。そうすると、正しく打てていると以下のようなデータになります。これ以外だと、テキストの入力のどこかにミスがあります。訂正して再度「グリッド出力」ボタンをクリックします。

図３　グリッドデータ

正しく打てているようなら、「結果出力」ボタンをクリックします。以下のような計算結果が表示されます。

LP 最適解

	STEP数	最大値(Z)	
▶	3	160.000	
変数	値	被約費用	
x1	20.000	0.000	
x2	10.000	0.000	
行	スラック	双対価格	
1	10.000	0.000	
2	0.000	1.400	
3	0.000	0.400	
係数範囲			
変数	現在値	減少下限	増加上限
x1	5.000	-0.500	7.000
x2	6.000	-3.500	0.667
右辺範囲			

図 4　計算結果

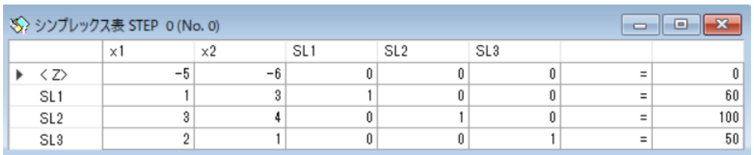
この中で最も重要なところは、黄色に網掛けされた部分で、目的関数の最大値（右上）と、それを実現する変数の値（左側）が表示されています。結果を以下にまとめておきます。

表 2　最適解

x1	x2	Z
20	10	160

ここでは、答えを一気に出しましたが、コンピュータは段階を追って目的関数を大きくしていき、最終的に一番大きくなるところでそれを答え（最適解といいます）としています。その過程を見て行きましょう。

図 3 の段階ですぐに「結果出力」ボタンをクリックせずに、「初期シンプレックス表」ボタンをクリックします。すると以下のような表が表示されます。

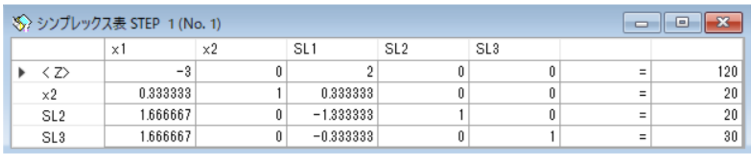


シンプレックス表 STEP 0 (No. 0)

	x1	x2	SL1	SL2	SL3		
▶ <Z>	-5	-6	0	0	0	=	0
SL1	1	3	1	0	0	=	60
SL2	3	4	0	1	0	=	100
SL3	2	1	0	0	1	=	50

図 5　初期シンプレックス表

これは、コンピュータが計算をしていくための最初の画面です。このくらいだったら手計算で以後の動きを追っていけるのですが、特に必要ないと思いますので省略します。一番上の行の右端の「0」は最初の目的関数 z の値です。ここに注目しながら、「次へ」ボタンをクリックします。すると次のような画面になります。



シンプレックス表 STEP 1 (No. 1)

	x1	x2	SL1	SL2	SL3		
▶ <Z>	-3	0	2	0	0	=	120
x2	0.333333	1	0.333333	0	0	=	20
SL2	1.666667	0	-1.333333	1	0	=	20
SL3	1.666667	0	-0.333333	0	1	=	30

図 6　シンプレックス表（step 1）

これを見ると、右上の目的関数の値は 120 になっています。同じく、「次へ」ボタンをクリックすると次の画面になります。

シンプレックス表 STEP 2 (No. 2)

	x1	x2	SL1	SL2	SL3		
<Z>	0	0	-0.4	1.8	0	=	156
x2	0	1	0.6	-0.2	0	=	16
x1	1	0	-0.8	0.6	0	=	12
SL3	0	0	1	-1	1	=	10

図７　シンプレックス表（step 2）

右上の目的関数の値が 156 に上がりました。再度「次へ」をクリックします。すると今度は以下となります。

最終シンプレックス表 STEP 3 (No. 3)

	x1	x2	SL1	SL2	SL3		
<Z>	0	0	0	1.4	0.4	=	160
x2	0	1	0	0.4	-0.6	=	10
x1	1	0	0	-0.2	0.8	=	20
SL1	0	0	1	-1	1	=	10

図８　最終シンプレックス表（step 3）

これが最終ですが、目的関数の値は 160 になりました。これ以上上げることはできません。そして、答えは２行目と３行目を見て下さい。２行目の左端 x2 の値が右端の 10 です。３行目の左端 x1 の値が 20 になります。

　このようにコンピュータは段階的に答えに近づいて行っているのです。このような方法をシンプレックス法と言って、後に説明する２段階シンプレックス法と合わせて、ノーベル賞を取った方法なのです。

問題１

以下の線形計画問題の最適解を求めよ。

目的関数

$z = x_1 + 2x_2 + x_3$　最大化

制約条件

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 600$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 300$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

最適解

x1	x2	x3	Z

問題２

製品１と２の製造のためには３つの原料Ａ，Ｂ，Ｃが必要である。各製品１単位製造するために必要な各原料の量（kg）、各原料の供給量の上限（kg）及び、各製品１単位生産するごとの利益（万円）は以下の表の通りである。原料の供給量の範囲内で、利益が最大となる各製品の生産量（単位）はいくらか。解答は少数で表せ。

	製品１	製品２	原料供給量上限
原料Ａ	1.5	3.2	60
原料Ｂ	3.4	4.3	100
原料Ｃ	2.1	1.4	50
利益（万円）	5.2	6.3	

目的関数

制約条件

最適解

製品１	製品２	利益

問題１解答

最適解

x1	x2	x3	Z
60	180	0	420

問題２解答

目的関数

z=5.2*x1+6.3*x2　max

制約条件（入力形式）

1.5*x1+3.2*x2<=60

3.4*x1+4.3*x2<=100

2.1*x1+1.4*x2<=50

x1,x2>=0

最適解

製品１	製品２	利益
17.564	9.368	150.351