

社会システム分析のための統合化プログラム 3 8 —経済時系列分析—

福山平成大学経営学部紀要
第 17 号 (2021), *-* 頁

社会システム分析のための統合化プログラム 3 8 —経済時系列分析—

福井 正康^{*1}・兎内 祥子^{*1}

*1 福山平成大学経営学部経営学科

要旨：我々は教育分野での利用を目的に社会システム分析に用いられる様々な手法を統合化したソフトウェア College Analysis を作成してきた。今回は、経済学で利用される時系列分析についてプログラムを作成した。経済分野での時系列分析は、自己回帰・分布ラグモデルと呼ばれる重回帰分析を元にしたモデルであるが、推定誤差について、時系列的な変動や相関を含む形となっており、複雑な処理を必要とする。

キーワード：経済時系列分析、自己回帰・分布ラグモデル、ADL、ADF テスト、QLR 統計量、HAC 標準誤差、ADL, GLS アプローチ、ベクトル自己回帰 VAR

1. はじめに

時系列分析は分野によって様々な手法が考えられているが、College Analysis にはこれまで 2 つの手法を取り入れてきた。1 つは、データを傾向変動、振幅変動、季節変動に分解して予測する変動の分解モデルで、基本的に単一のデータの過去のふるまいから未来を予測するパターン分析モデルである^[1]。しかし、時系列データは自身の過去のデータだけに影響されるわけではなく、他の指標からの影響も受けている。そのため、我々は自己回帰モデルに他の変数を加えた自己回帰・分布ラグモデルを考え、それを元にして簡単な変動の分解モデルを加えたパネル時系列分析というプログラムを作った^[2]。しかし、このプログラムは、ラグ次数の設定がすべての変数で固定されていたり、誤差相関などの統計的な処理が単純であったりと経済の分野で使用するには機能が不十分であった^{[3]、[4]}。そのため、新しく経済時系列分析で使われる手法に特化したプログラムの開発を進めることにした。

経済分野での時系列分析は、自己回帰・分布ラグモデルと呼ばれる、目的変数のタイムラグとその他の変数のタイムラグを含んだ、重回帰分析を元にしたモデルであるが、推定誤差について、時系列的な変動や相関を含む形となっている。

ここでは、不均一分散も仮定した自己回帰・分布ラグ (ADL) モデル、確率トレンドの有無を検定する ADF テスト、ブレイクを検定するための QLR 統計量、誤差に系列相関がある場合の HAC 標準誤差、系列相関を考える他の手法である ADL アプローチ及び、GLS アプローチ、自己回帰・分布ラグモデルの予測を考えるベクトル自己回帰 (VAR) モデルなどを扱う。

2. 自己回帰・分布ラグ (ADL) モデル

経済分野で使われる時系列分析では自己回帰に基づく重回帰分析が基本で、その利用には変数の階差変換や変数ごとの時間的なラグ次数の設定など、柔軟な対応を必要とする。メニュー【分析－多变量解析他－経済・経営手法－経済時系列分析】を選択すると、図 1 に与えられる分析実行画面が表示される。

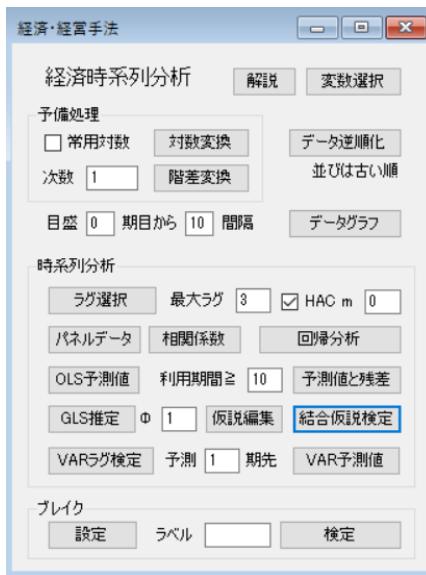


図 1 経済時系列分析実行画面

この分析の変数選択は通常のものと異なり、変数を選択する部分とそのラグを設定する部分とに分かれる。右上の「変数選択」ボタンでは利用する変数を選択し、そのラグは「時系列分析」グループボックス内の「ラグ選択」ボタンで設定する。

まずここでは変数自体の変換について述べ、その後ラグの選択について説明する。時系列分析の変数変換では、対数変換がよく利用される。これは変数の変化率についての変動をみる場合に用いられる変換である。以後図 2 のデータを用いて説明を行う。

	機器	他指標
1	10	21
2	20	10
3	21	10
4	17	5
5	17	4
6	15	9
7	15	15
8	18	24
9	21	17
10	26	4

図 2 データ (経済時系列分析 1.txt)

変数「機器」は、自己回帰を与える部分で、「他指標」は自己回帰以外を代表した「機器」

社会システム分析のための統合化プログラム 3.8
—経済時系列分析—

に影響を与える変数として理解してもらいたい。

変数選択ですべての変数を選択し、「対数変換」ボタンをクリックすると図 3 のような結果を、次数を 1 として「階差変換」をクリックすると図 4 のような結果を得る。

	ln機器	ln他指標
1	2.3026	3.0445
2	2.9957	2.3026
3	3.0445	2.3026
4	2.8332	1.6094
5	2.8332	1.3963
6	2.7081	2.1972
7	2.7081	2.7081
8	2.8904	3.1781
9	3.0445	2.8332
10	3.2581	1.3863

図 3 対数変換結果

	df1機器	df1他指標
1		
2	10	-11
3		0
4		-5
5	0	-1
6	-2	5
7	0	6
8	3	9
9	3	-7
10	5	-13

図 4 階差変換結果

これらの結果は、結果グリッドのメニュー「編集—エディタ全列追加」または「編集—エディタ指定列追加」を用いて、図 2 のグリッドエディットのデータに図 5 のように簡単に追加できる。

	機器	他指標	df1機器
1	10	21	
2	20	10	10
3	21	10	1
4	17	5	-4
5	17	4	0
6	15	9	-2
7	15	15	0
8	18	24	3
9	21	17	3
10	26	4	5

図 5 機器の 1 階階差データの追加

このデータの中から例えば「機器」を選択し、「データグラフ」ボタンをクリックすると、図 6 のようなグラフが表示される。

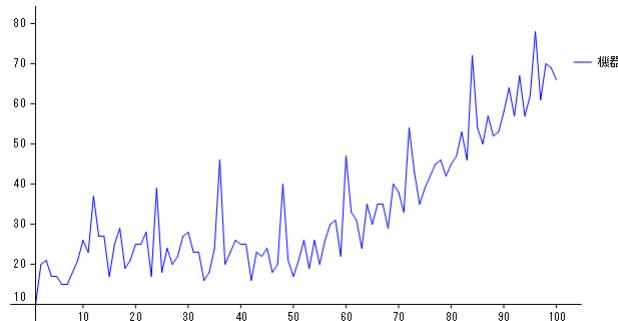


図 6 グラフ表示結果

時系列分析は多くのデータを扱うことから、軸のメモリは間隔をあけて表示することもできるし、凡例の表示・非表示、補助線の描画、グラフポイントの描画など、表示には一応の機能が付いている。

次に「機器」と「他指標」を選択し、「時系列分析」グループボックス内の最大ラグを3にして、図7のようにラグを選択する。ここでは最初に選択した変数について、最大ラグまでのすべてのラグを個別に選択できるようになっている。

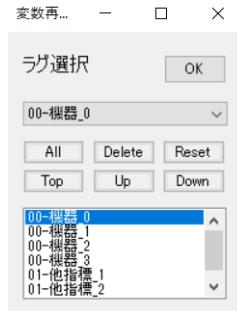


図7 ラグ選択画面

ラグの選択後「パネルデータ」ボタンをクリックすると、図8のようなパネルデータが出力される。

パネルデータ							
	機器	機器_1	機器_2	機器_3	他指標_1	他指標_2	他指標_3
▶ 4	17	21	20	10	10	10	21
5	17	17	21	20	5	10	10
6	15	17	17	21	4	5	10
7	15	15	17	17	9	4	5
8	18	15	15	17	15	9	4
9	21	18	15	15	24	15	9
10	26	21	18	15	17	24	15

図8 分析用パネルデータ

これが時系列分析の元となるデータである。「変数名_番号」の番号がラグを表している。また、ラグの付いていない変数はラグなしの元データである。ラグを取ったために、データはすべて使えるわけではなく、最大ラグの次の位置から始まっている。

「相関係数」ボタンをクリックすると図9で与えられたパネルデータの相関係数が図9のように表示される。

相関係数 N=97						
	機器	機器_1	機器_2	機器_3	他指標_1	他指標_2
▶ 機器	1.000	0.824	0.833	0.834	-0.052	0.105
機器_1	0.824	1.000	0.817	0.825	-0.095	-0.054
機器_2	0.833	0.817	1.000	0.807	-0.093	-0.099
機器_3	0.834	0.825	0.807	1.000	-0.019	-0.094
他指標_1	-0.052	-0.095	-0.093	-0.019	1.000	-0.056
他指標_2	0.105	-0.054	-0.099	-0.094	-0.056	1.000
他指標_3	-0.146	0.102	-0.060	-0.113	-0.137	-0.060

図9 パネルデータ相関係数

パネルデータを使った重回帰分析では、「回帰分析」ボタンをクリックすると図10aの結

社会システム分析のための統合化プログラム 3.8
—経済時系列分析—

果が表示される。これは均一分散の結果であるが、単純な不均一分散の場合の結果は「HAC」チェックボックスをクリックし、テキストボックス「m」を 0 にすると図 10b のようになる。「m」の値を変えると 4 節に述べるように時系列相関が考慮される。

偏回帰係数と検定							
機器	偏回帰係数	標準化係数	標準誤差	t値 (df=90)	p値	95.0%下限	95.0%上限
▶ 機器_1	0.3258	0.3200	0.0940	3.4654	0.0008	0.1390	0.5126
機器_2	0.3579	0.3433	0.0867	4.1283	0.0001	0.1857	0.5302
機器_3	0.3166	0.2978	0.0932	3.3981	0.0010	0.1315	0.5017
他指標_1	0.0243	0.0112	0.0962	0.2531	0.8008	-0.1668	0.2154
他指標_2	0.3891	0.1784	0.0955	4.0746	0.0001	0.1994	0.5798
他指標_3	-0.2432	-0.1121	0.1023	-2.3768	0.0196	-0.4465	-0.0399
切片	-1.2488	0.0000	3.1862	-0.3919	0.6960	-7.5788	5.0811
N=97	0.912	0.833	0.906	0.821	74.6128	0.0000	
	R	R^2	調整済R	調整済R^2	有効性F値	有効性p値	

図 10a 重回帰分析結果（均一分散の場合）

偏回帰係数と検定							
機器	偏回帰係数	標準化係数	標準誤差	z値	p値	95.0%下限	95.0%上限
▶ 機器_1	0.3258	0.3200	0.0968	3.3657	0.0008	0.1361	0.5156
機器_2	0.3579	0.3433	0.0893	4.0081	0.0001	0.1829	0.5329
機器_3	0.3166	0.2978	0.0941	3.3652	0.0008	0.1322	0.5010
他指標_1	0.0243	0.0112	0.0912	0.2670	0.7895	-0.1544	0.2031
他指標_2	0.3891	0.1784	0.0973	3.9985	0.0001	0.1984	0.5798
他指標_3	-0.2432	-0.1121	0.0929	-2.6176	0.0089	-0.4253	-0.0611
切片	-1.2488	0.0000	3.0134	-0.4144	0.6786	-7.1549	4.6572
N=97	0.912	0.833	0.906	0.821	88.5922	0.0000	
	R	R^2	調整済R	調整済R^2	有効性F値	有効性p値	

図 10b 重回帰分析結果（不均一分散の場合）

重回帰分析に用いたラグ次数について適正な値を得るために、分析結果の図 10 には BIC (Bayes Information Criterion) と AIC (Akaike Information Criterion) の値を示してある。これらは値が小さくなるほど良いモデルとして知られた指標である。一般に $BIC > AIC$ となる。ここで用いたこれらの指標の定義は、モデルに使われた係数の数を k (定数項を含む)、利用した時刻数を T 、回帰式の残差の 2 乗和を SSR として以下で与えられる。この他に全体に T を掛けたものなどもある。

$$BIC = \ln(SSR/T) + k(\ln T/T)$$

$$AIC = \ln(SSR/T) + k(2/T)$$

データの予測については、時系列分析の場合、通常の重回帰分析のようにすべての計算データを使った予測とその時点までのデータを使った予測を分けて考えなければならない。前者を推測または「OLS 予測」と呼び、後者を単に予測または「準サンプル外予測」と呼ぶ。「OLS 予測」ボタンをクリックすると、図 11 のように OLS 予測値と OLS 残差が表示される。

その時点までのデータを使った予測値は、「予測値と残差」ボタンで求められる。その際、過去にデータのないところでは予測が計算できないので、最低限必要な過去のデータを「データ期間」で指定しておく必要がある。例えばこれを 10 とすると、10 番目の古いデータから計算をはじめるので、最低限過去の 9 個のデータを用いて計算することになる。結果を図 12 に示す。結果は 4 番目から 12 番目が計算されないため空欄になっている。但し、

あまり形式はよくないが、4 列目に予測値と残差の差の 2 乗平均の平方根である RMSFE や実測と予測の相関係数 R などの結果を加えている。RMSFE は予測誤差の推定値であるので、以下の式を用いて予測の 95%信頼区間を求める事もできる。

$$\hat{y}_{t+1} - 1.96 \times RMSFE \leq y_{t+1} \leq \hat{y}_{t+1} + 1.96 \times RMSFE$$

OLS 予測値と残差			
	実測値	OLS 予測値	OLS 残差
4	17	14.9450	2.0550
5	17	19.7193	-2.7193
6	15	16.6345	-1.6345
7	15	15.6650	-0.6650
8	18	17.2839	0.7161
9	21	18.9658	2.0342
10	26	22.0891	3.1109
11	23	21.3128	1.6872
12	37	20.1817	16.8183
13	27	35.8314	-8.8314
14	27	31.8665	-4.8665

図 11 OLS 予測値と OLS 残差

予測値と残差			
	実測値	予測値	残差
4	17		RMSFE
5	17		6.013
6	15		R
7	15		0.933
8	18		R^2
9	21		0.871
10	26		
11	23		
12	37		
13	27	27.0820	-0.0820
14	27	27.9062	-0.9062
15	17	20.3265	-3.3265
16	25	25.5641	-0.5641
17	29	22.7334	6.2666

図 12 予測値と残差

さて、ここで目的変数のラグと他指標のラグを用いた回帰分析を考えたが、他指標はどれが必要であろうか。これを調べる検定は「グレンジャーの因果性テスト」と呼ばれる。この検定は他指標のラグに関する係数がすべて 0 かどうかを調べる結合仮説検定に帰着する。結合仮説検定は他の場面でも利用されるため、ここでも重回帰分析やロジスティック回帰分析と同様のメニューを追加している。簡単にその利用法を説明する。

「仮説編集」ボタンをクリックすると図 13 のような結合仮説編集画面が表示される。

結合仮説編集						
	機器_1	機器_2	機器_3	他指標_1	他指標_2	他指標_3
制約1	1					= 0
制約2		1				= 0
制約3			1			= 0
制約4				1		= 0
制約5					1	= 0
制約6						1
制約7						= 0

図 13 結合仮説編集画面

結合仮説は、各制約行で与えられた線形制約の積事象の検定となる。例えば、グレンジャーの因果性テストでは、他指標の係数がすべて 0 を検定するので、結合仮説編集画面は、

社会システム分析のための統合化プログラム 3.8 —経済時系列分析—

図 14 のようになる。

	機器_1	機器_2	機器_3	他指標_1	他指標_2	他指標_3	切片	
▶ 制約1	1							
制約2								
制約3								
制約4				1			=	0
制約5					1		=	0
制約6						1	=	0
制約7								

図 14 グレンジャーの因果性テストの編集画面

ここで、制約は制約 4 のところから始まっているが、これは全体を上にあげて、制約 1 のところから始めてもよいし、このままでもよい。この編集画面を表示したまま「結合仮説検定」ボタンをクリックすると、図 15 のような結果が得られる。この結果によると「他指標」は回帰式に必要であることになる。

結合仮説検定	
結合仮説の検定（係数は変数名で表します）	
結合係数	
他指標_1=0, 他指標_2=0, 他指標_3=0	
結合仮説検定	
F 検定値	8.2387
自由度	3, 90
確率値	0.0001

図 15 結合仮説検定（グレンジャーの因果性テスト）結果

3. augmented Dickey-Fuller (ADF) テスト

ここでは時系列のトレンドの問題について考える。時系列データのトレンドには決定論的トレンドと確率トレンドがある。決定論的トレンドは時間に関して線形の関数で表され、ある時系列データはこの直線の周りで変動することになる。これに対して確率トレンドは、変動に定常性はなく、時間と共に変化する。例えばある時期まで上昇でそれ以後下降に変わるものである。経済現象に関するトレンドは多くの場合、確率トレンドである。

確率トレンドの最も単純なモデルはランダムウォークモデルである。最も単純なランダムウォークモデルは以下の形式である。

$$y_t = y_{t-1} + u_t, \quad u_t \text{ は i.i.d.}$$

乱数を変えた 2 つの例を図 1 に示す。このような不規則な変動が確率トレンドである。

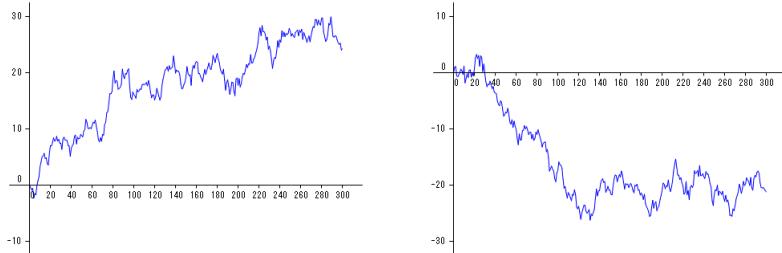


図 1 ランダムウォークモデル

このモデルでは、 y_t の分散は時間と共に変化し、際限なく増加する。これは右辺の y_{t-1} の係数が 1 になっていることが原因である。このようなランダムウォークモデルが採択された場合、データそのものより、データの階差を用いて分析を進める。

ラグ次数 1 の自己回帰モデル (AR(1)モデル) は以下の形で与えられるが、

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + u_t$$

この係数 β_1 が 1 より小さいことが y_t の分散が発散しない (y_t が定常である) 条件である。

$\beta_1 = 1.5$ と $\beta_1 = 0.5$ の例を図 2 に示す。前者は期間を 1/10 に設定してある。結果の違いは明らかだろう。

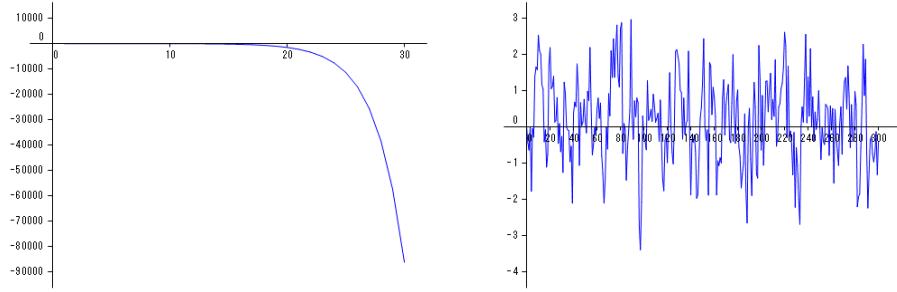


図 2 AR(1)モデル ($\beta_1 = 1.5, \beta_1 = 0.5$)

一般のラグ次数 p の自己回帰モデル (AR(p)モデル) は以下の形で与えられる。

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \beta_3 y_{t-3} + \cdots + \beta_p y_{t-p} + \beta_0 + u_t$$

このモデルが定常であるための条件は、以下の方程式の解 z が $|z| > 1$ となることである。

$$1 - \beta_1 z - \beta_2 z^2 - \cdots - \beta_p z^p = 0$$

以後、この問題を理解しやすくするため、 $p = 3$ とする。モデルは以下となる。

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \beta_3 y_{t-3} + \beta_0 + u_t \quad (1)$$

この式を変形すると以下となる。

$$y_t + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + b_3 = c(y_{t-1} + b_1 y_{t-2} + b_2 y_{t-3} + b_0) + u_t \quad (2)$$

この変形はいつでも可能である。例えば、 $p = 3$ の場合以下の手順で行う。

$$c b_0 - b_0 = \beta_0 \rightarrow b_0 = \beta_0 / (c - 1)$$

$$c b_2 = \beta_3 \rightarrow b_2 = \beta_3 / c$$

$$c b_1 - b_2 = \beta_2 \rightarrow b_1 = (b_2 + \beta_2) / c = \beta_3 / c^2 + \beta_2 / c$$

$$c - b_1 = \beta_1 \rightarrow c = b_1 + \beta_1 = \beta_3 / c^2 + \beta_2 / c + \beta_1$$

これより、 c は、 $\beta_3 / c^3 + \beta_2 / c^2 + \beta_1 / c = 1$ の解であることが分かる。

改めて、 $Y_t = y_t + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + b_3$ とおくと、(2)式は以下のように書ける。

$$Y_t = c Y_{t-1} + u_t \quad (3)$$

これを書き下すと、

社会システム分析のための統合化プログラム 3.8
—経済時系列分析—

$$Y_t = c^n Y_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} c^i u_{t-i}$$

となり、 $n \rightarrow \infty$ で Y_t の分散が収束するためには $|c| < 1$ が必要である。今、 $z = 1/c$ とおくと、収束条件は以下となる。

$$\beta_1 z + \beta_2 z^2 + \beta_3 z^3 = 1 \quad \text{の解が } |z| > 1 \quad (4)$$

これを一般的の p に拡張するのは容易である。

上の(4)式は $z = 1$ として結合仮説の検定によって $|z| \neq 1$ を調べることもできるが、 $|z| < 1$ の可能性は捨てられない。しかし、以下のような変形によって結合仮説を用いず、直接調べることもできる。(2)式より、

$$Y_t - Y_{t-1} = (c-1)Y_{t-1} + u_t$$

となるが、左辺と右辺を分けて展開すると、 $(c-1)b_0 = \beta_0$ として、

$$\text{左辺: } Y_t - Y_{t-1} = \Delta y_t + b_1 \Delta y_{t-1} + b_2 \Delta y_{t-2}$$

$$\text{右辺: } (c-1)Y_{t-1} + u_t = (c-1)(y_{t-1} + b_1 y_{t-2} + b_2 y_{t-3} + b_0) + u_t$$

$$= (c-1)(y_{t-1} + b_1 y_{t-2} + b_2 y_{t-3}) + \beta_0 + u_t$$

$$= (c-1)y_{t-1} + (c-1)\{b_1 \Delta y_{t-2} + (b_1 + b_2)y_{t-3}\} + \beta_0 + u_t$$

以上より、

$$\Delta y_t + b_1 \Delta y_{t-1} + b_2 \Delta y_{t-2} = (c-1)y_{t-1} + (c-1)\{b_1 \Delta y_{t-2} + (b_1 + b_2)y_{t-3}\} + \beta_0 + u_t$$

これをまとめて、

$$\Delta y_t = (c-1)y_{t-1} - b_1 \Delta y_{t-1} + \{(c-1)b_1 - b_2\} \Delta y_{t-2} + (c-1)(b_1 + b_2)y_{t-3} + \beta_0 + u_t$$

$$= \delta y_{t-1} + \gamma_1 \Delta y_{t-1} + \gamma_2 \Delta y_{t-2} + \gamma_3 y_{t-3} + \beta_0 + u_t$$

として $\delta = 0$ を検定すればよいことになる。

しかし、上の式はそのまま使うことができない。なぜなら、上の式に以下の多重共線性が見られるからである。

$$y_{t-1} - \Delta y_{t-1} - \Delta y_{t-2} - y_{t-3} = 0$$

そのため、 $\gamma_3 y_{t-3}$ の項は捨てて以下の式とする。

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \gamma_1 \Delta y_{t-1} + \gamma_2 \Delta y_{t-2} + \beta_0 + u_t$$

この式には Δy_{t-2} 項があるため、 y_{t-3} の情報も含まれている。

ここで注意することは、検定では対立仮説が $\delta < 0$ となる片側検定を用いることである（結果として $-2 < \hat{\delta} < 0$ なら問題ないであろう）。検定確率は誤差の相関などから、通常の t 検定の検定確率を用いることができず、後に表 1 で示す、参考文献 [3] に与えられた数値を用いる。プログラムでは解説の中に示している。

最後に、以下の関係を実際のデータで調べてみる。

検定 1

$$\beta_1 z + \beta_2 z^2 + \beta_3 z^3 = 1 \quad \text{の解が } |z| = 1 \quad \text{即ち、} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 \text{ の結合仮説検定}$$

検定 2

$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \gamma_1 \Delta y_{t-1} + \gamma_2 \Delta y_{t-2} + \beta_0 + u_t$ として、 $\delta = 0$ の検定

ここでは図 1 のデータを解析し、2 つの検定の一貫性を見てみよう。このデータでは、「機器」とその階差である「df1_機器」を利用する。階差データは、実行メニューの「階差変換」ボタンで簡単に求められる。

図 1 データ (経済時系列分析 1.txt)

最初に検定 1 を調べる。

まず変数選択で、「機器」を選択する。次にラグを設定するために、「ラグ選択」で、「機器_0, 機器_1, 機器_2, 機器_3」を順番に選択する。その後、「結合仮説編集」ボタンで、出てきた結果を図 2 のように書き換える。これを開いたままで実行メニューの「結合仮説検定」をクリックすると、図 3 のような結果が得られる。

図 2 結合仮説編集

図 3 結合仮説検定結果

ここで注目するのは、F 検定値 (0.0585) と検定確率値 (0.8094) である。検定確率値は定常性がない場合には利用できないが、比較には使える。

次に検定 2 を調べる。

変数選択で、「df1_機器と機器」を選択する。次にラグを設定するために、「変数ラグ選択」で、「df1_機器_0, 機器_1, df1_機器_1, df1_機器_2」を順番に選択する。そのまま、「回帰分析」ボタンをクリックすると図 4 の結果が表示される。

図 4 ADF テスト結果

社会システム分析のための統合化プログラム 3.8 —経済時系列分析—

ここでは、「機器_1」の t 値 (-0.2419) と p 値 (0.8094) に注目する。結果としては、確率トレンドがないと言えないとなるが、 t 値の 2 乗 (0.0585) と p 値はともに結合仮説検定の結果に一致する。

ADF 検定の検定確率は分布のずれのため通常の t 検定の検定確率とは異なる。利用者は ADF テスト結果の t 値を参考文献 [3] に掲載されている表 1 と比較して判定する。

表 1 ADF テストの検定値

	10%	5%	1%
定数項のみ	-2.57	-2.86	-3.43
定数項と時間トレンド	-3.12	-3.41	-3.96

4. Quandt Likelihood Ratio (QLR) 統計量

時系列データのブレイクとは、ある時点で回帰直線の傾きまたは切片が変化する現象である。これには制度や政策または経済情勢などの変化が原因する。このブレイクの有無は以下のようにして調べることができる。

ある時点 τ でブレイクが起こっているかどうか調べたい場合、以下のようなダミー変数 $D_\tau(t)$ を利用する。

$$D_\tau(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ 1 & t \geq \tau \end{cases}$$

目的変数 y_t に対して、例えば以下のような回帰式を考える。 $D_\tau(t)$ のかかった項は交差項である。

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \cdots + \beta_p y_{p-1} + \beta_0 + \gamma_1 y_{t-1} D_\tau(t) + \cdots + \gamma_p y_{t-p} D_\tau(t) + \gamma_0 D_\tau(t) + u_t$$

この式は交差項を持った自己回帰モデルであるが、別の変数のラグを加えても構わない。この回帰分析において、以下の結合仮説が棄却されるとき、

$$\gamma_1 = 0, \dots, \gamma_p = 0, \gamma_0 = 0$$

回帰式にはブレイクがあると判定される。

ブレイクが起こっている時点が特定できない場合、分析期間 T の中で $0.15T$ と $0.85T$ までの間で、結合仮説検定最大の F 値を与える時刻 τ を取って検定を行う。その際、最大の F 値は正規性を持たないため、参考文献[3]で示された表から臨界値を求めるが、プログラム中でも対応する値が表示される。

プログラムの動きを見てみよう。変数選択では「機器」、変数ラグ選択ではラグ 3 までのすべての変数を選び、分析実行メニューの「ブレイク」グループボックス内の「設定」ボタンをクリックすると、図 1 のようなブレイク編集画面が表示される。



図 1 ブレイク編集画面

図 1 で 1 が入力された変数の交差項がすべて 0 である検定を行うことになる。この場合制

約数は 4 である。ラベルテキストボックスに調べたい時点のラベルを入力するとその時点について、何も入力しないと期間 $0.15T$ から $0.85T$ の間で最大の F 値を探してブレイクの検定を行う。入力しない場合の結果は、テキスト表示と F 値の変化を示したグラフ表示になる。結果を図 2 と図 3 に示す。

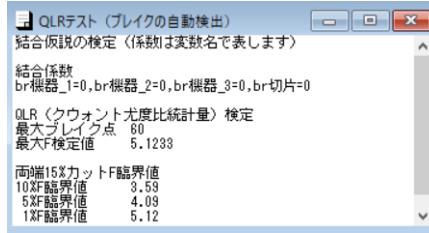


図 2 QLR 推定結果

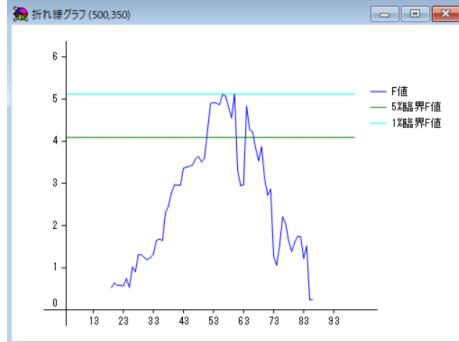


図 3 QLR 推定グラフ

結果は時刻 60 でブレイクが起こっていることになる。図 3 では F 値の変化がよく分かる。軸の目盛は分析実行画面の「データグラフ」の目盛の設定と共用にしている。使い勝手によって今後修正していく。

5. Heteroscedasticity and Autocorrelation Constant (HAC) 標準誤差の導入

時系列データを用いた回帰分析において、誤差項は説明変数に依存した時間的な変化と時間についての系列相関を持つ可能性が高い。ここでは誤差が不均一分散で系列相関がある場合の重回帰分析について説明する。これは参考文献[3]で述べられた説明変数が 1 つの場合からの拡張である。プログラム上でこの機能を利用するためには、プログラム実行画面の「HAC」チェックボックスにチェックを入れるが、後に述べる trancation parameter について、右のテキストボックスを空欄にしておくと自動で値が設定される。必要な場合は空欄に数値を入れ自分で設定することもできる。特に 0 (または 1 も) と設定すると、通常の不均一分散の処理になる。

目的変数を p 個の説明変数と定数項で回帰する重回帰式を以下のように仮定する。

$$\mathbf{y} = \mathbf{Zd} + \mathbf{u}$$

ここに、 $\mathbf{y}(T \times 1)$, $\mathbf{Z} = (\mathbf{1} \ \mathbf{X}(T \times p))$, $\mathbf{d}' = (b_0 \ \mathbf{b}'(1 \times p))$, $\mathbf{u}(T \times 1) \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$

最小 2 乗法で以下の量の最小化を考える。

$$L = (\mathbf{y} - \mathbf{Zd})'(\mathbf{y} - \mathbf{Zd})$$

回帰係数 \mathbf{d} で微分して、回帰係数の推定値 $\hat{\mathbf{d}}$ を求めると以下となる。

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}} = -2\mathbf{Z}'(\mathbf{y} - \mathbf{Zd}) = \mathbf{0} \quad \text{より、} \quad \hat{\mathbf{d}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}$$

この $\hat{\mathbf{d}}$ を書き換えると、

$$\hat{\mathbf{d}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'(\mathbf{Zd} + \mathbf{u}) = \mathbf{d} + (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{u}$$

となり、これを用いると $\hat{\mathbf{d}}$ の平均と分散は以下となる。

$$E[\hat{\mathbf{d}}] = \mathbf{d} + (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'E[\mathbf{u}] = \mathbf{d}$$

$$Cov[\hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{d}}] = E[(\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{d})(\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{d})'] = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}E[\mathbf{Z}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{Z}](\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}$$

ここで、 $v_{i\lambda} = Z_{i\lambda}u_{\lambda}$ (i は変数、 λ は時刻の添え字) として、

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Z}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{Z}]_{ij} &= E\left[\sum_{\lambda=1}^T \sum_{\lambda'=1}^T Z_{i\lambda}Z_{j\lambda'}u_{\lambda}u_{\lambda'}\right] = E\left[\sum_{\lambda=1}^T \sum_{\lambda'=1}^T v_{i\lambda}v_{j\lambda'}\right] \\ &= E\left[\sum_{\lambda=1}^T v_{i\lambda}v_{j\lambda} + \sum_{\lambda=1}^T \sum_{k=1}^{\lambda-1} (v_{i\lambda}v_{j\lambda-k} + v_{j\lambda}v_{i\lambda-k})\right] \\ &= \sum_{\lambda=1}^T Cov[v_{i\lambda}, v_{j\lambda}] + \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{\lambda=k+1}^T \{Cov[v_{i\lambda}, v_{j\lambda-k}] + Cov[v_{j\lambda}, v_{i\lambda-k}]\} \end{aligned}$$

時間について系列相関は一定であると仮定すると、以下と考えられる。

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^T Cov[v_{i\lambda}, v_{j\lambda}] &= TCov[v_i, v_j] \\ \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{\lambda=k+1}^T \{Cov[v_{i\lambda}, v_{j\lambda-k}] + Cov[v_{j\lambda}, v_{i\lambda-k}]\} &= \sum_{k=1}^{T-1} (T-k) \{Cov[v_i, v_{j(k)}] + Cov[v_j, v_{i(k)}]\} \end{aligned}$$

ここで、 $Cov[v_i, v_{j(k)}]$ は、 v_i とその k 期前の v_j との共分散を表すものとする。この推定値としては Newey-West が与えた以下の形を採用する。

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Z}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{Z}]_{ij} &\rightarrow \frac{T}{T-p-1} \left[\sum_{\lambda=1}^T \hat{v}_{i\lambda}\hat{v}_{j\lambda} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m-k}{m} \sum_{\lambda=k+1}^T (\hat{v}_{i\lambda}\hat{v}_{j\lambda-k} + \hat{v}_{j\lambda}\hat{v}_{i\lambda-k}) \right] \\ &\equiv T(\tilde{\Sigma}_{\hat{v}})_{ij} \end{aligned}$$

ここに m は、truncation parameter と呼ばれ、ガイドラインとして以下の値が使われる。

$$m = 0.75T^{1/3}$$

但しこの m は系列相関の強弱によって変更してもよい。

以上より、回帰係数は以下の分布となる。

$$\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{d} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{\hat{d}}), \quad \Sigma_{\hat{d}} \equiv (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}E[\mathbf{Z}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{Z}](\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}$$

計算には上の推定値を用いて、

$$\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{d} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \tilde{\Sigma}_{\hat{d}}), \quad \tilde{\Sigma}_{\hat{d}} \equiv T(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\tilde{\Sigma}_{\hat{v}}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}$$

特に 1 変数回帰の場合は以下となり、参考文献 [3] に与えられた形となる。

$$E\left[\sum_{\lambda=1}^T \sum_{\lambda'=1}^T (x_{\lambda} - \bar{x}) u_{\lambda} u_{\lambda'} (x_{\lambda'} - \bar{x})\right] \rightarrow T \hat{\sigma}_{\hat{v}}^2 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m-k}{m} \tilde{\rho}_{(k)} \right] \equiv T \hat{\sigma}_{\hat{v}}^2 f_T \equiv T \tilde{\sigma}_{\hat{v}}^2$$

$$\hat{b}_1 - b_1 = \frac{1}{T \sigma_x^2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{u} \sim N(0, \sigma_{\hat{b}_1}^2), \quad \hat{\sigma}_{\hat{b}_1}^2 \equiv \frac{\hat{\sigma}_{\hat{v}}^2}{T(\hat{\sigma}_x^2)^2} f_T$$

ここに、

$$\hat{\sigma}_{\hat{v}}^2 \equiv \frac{1}{T-2} \sum_{\lambda=1}^T \hat{v}_{\lambda}^2, \quad \tilde{\rho}_{(k)} \equiv \sum_{\lambda=k+1}^T \hat{v}_{\lambda} \hat{v}_{\lambda-k} / \sqrt{\sum_{\lambda=1}^T \hat{v}_{\lambda}^2 \sum_{\lambda=1}^T \hat{v}_{\lambda}^2}, \quad m = 0.75T^{1/3}$$

ここからはプログラムの動作を紹介する。分布ラグモデルの OLS 推定と (HAC 標準誤差を用いた) HAC 推定を図 1 のデータを元に比較してみる。

	目的変数	説明変数
▶ 1	81.7	49.8
2	89.9	50.5
3	102.6	67.0
4	96.1	69.0
5	98.3	70.3
6	74.4	65.6
7	120.6	66.1
8	106.8	64.5
9	90.6	56.3
10	99.7	56.5

図 1 OLS 推定と HAC 推定の比較用データ（経済時系列分析 2(GLS).txt）

「最大ラグ」を 1 にして、1 次のラグまで考えた結果は、「変数選択」で 2 つの変数を選び、「ラグ選択」で、目的変数の 0 次と説明変数の 0 次と 1 次を選んで、「回帰分析」ボタンをクリックすると図 2 の OLS 推定結果が表示される。

目的変数	偏回帰係数	標準化係数	標準誤差	t値 (df=194)	p値	95.0%下限	95.0%上限	
▶ 説明変数	0.8139	0.5542	0.0905	8.9954	0.0000	0.6355	0.9924	BIC
説明変数_1	0.1367	0.0937	0.0899	1.5202	0.1301	-0.0407	0.3141	4.874
切片	40.3300	0.0000	6.6761	5.9598	0.0000	26.9836	53.6765	AIC
R	R²	調整済R	調整済R²	有効性F値	有効性p値			4.824
N=197	0.593	0.352	0.588	0.345	52.6751	0.0000		

図 2 OLS 推定結果

次に同じ設定で、「HAC」チェックボックスにチェックを入れて（ m は空欄）、「回帰分析」ボタンをクリックすると図 3 の HAC 推定結果が表示される。

目的変数	偏回帰係数	標準化係数	標準誤差	z値	p値	95.0%下限	95.0%上限	
▶ 説明変数	0.8139	0.5542	0.0792	10.2780	0.0000	0.6587	0.9691	BIC
説明変数_1	0.1367	0.0937	0.0939	1.4552	0.1456	-0.0474	0.3208	4.874
切片	40.3300	0.0000	6.6225	6.0898	0.0000	27.3501	53.3099	AIC
R	R²	調整済R	調整済R²	有効性F値	有効性p値	m(HAC)		4.824
N=197	0.593	0.352	0.588	0.345	64.1339	0.0000	4	

図 3 HAC 推定結果

社会システム分析のための統合化プログラム 3.8 —経済時系列分析—

ここで、2つの方法は偏回帰係数の値が同じで標準誤差の値が異なる。また、Newey-West 推定量の truncation parameter m の値は自動で与えられて 4 に設定されている。この値は利用者が設定することも可能である。

次に 3 次までのラグを取るとすると、「最大ラグ」を 3 にして、説明変数の 3 次のラグまで選択すると、OLS 推定結果と HAC 推定結果はそれぞれ図 4 と図 5 のように与えられる。

偏回帰係数と検定							
目的変数	偏回帰係数	標準化係数	標準誤差	t値 (df=190)	p値	95.0%下限	95.0%上限
▶ 説明変数	0.8111	0.5499	0.0917	8.8415	0.0000	0.6301	0.9920
説明変数_1	0.1338	0.0907	0.0965	1.3864	0.1673	-0.0566	0.3243
説明変数_2	0.0509	0.0347	0.0966	0.5271	0.5988	-0.1396	0.2414
説明変数_3	-0.0817	-0.0555	0.0919	-0.8886	0.3753	-0.2631	0.0997
切片	42.6845	0.0000	8.8005	4.8502	0.0000	25.3253	60.0437
R	R ²	調整済R	調整済R ²	有効性F値	有効性p値		
N=195	0.593	0.352	0.582	0.339	25.8225	0.0000	

図 4 OLS 回帰分析結果

偏回帰係数と検定							
目的変数	偏回帰係数	標準化係数	標準誤差	z値	p値	95.0%下限	95.0%上限
▶ 説明変数	0.8111	0.5499	0.0789	10.2789	0.0000	0.6564	0.9657
説明変数_1	0.1338	0.0907	0.0945	1.4169	0.1565	-0.0513	0.3190
説明変数_2	0.0509	0.0347	0.0903	0.5634	0.5732	-0.1262	0.2280
説明変数_3	-0.0817	-0.0555	0.0915	-0.8931	0.3718	-0.2610	0.0976
切片	42.6845	0.0000	9.5783	4.4564	0.0000	23.9114	61.4576
R	R ²	調整済R	調整済R ²	有効性F値	有効性p値	m(HAC)	
N=195	0.593	0.352	0.582	0.339	31.9821	0.0000	4

図 5 HAC 回帰分析結果

OLS 標準誤差と HAC 標準誤差を比較すると HAC 標準誤差の方が大きくなると思いがちであるが、そうとも限らない。

6. 分布ラグモデルの ADL 及び GLS アプローチ

時系列分析において、誤差項に系列相関がある分布ラグモデルでは、OLS 推定量は一致性を持つが、OLS 標準誤差は一致性を持たない。標準誤差の一致性を保証するため、Newey-West による HAC 標準誤差を導入したが、データに強い外生性がある場合は他の手法も考えられる。その中から我々は自己回帰・分布ラグモデル (autoregressive distributed lag model (ADL)) による方法と一般化最小 2 乗 (generalized least squares (GLS)) による方法を説明する。

r 期のラグと誤差相関を持つ分布ラグモデルは以下のように表される。

$$y_t = \sum_{k=0}^r b_{k+1} x_{t-k} + b_0 + u_t \quad (1)$$

ここで、説明変数は一般に複数変数であるが、説明の簡単化のために 1 種類としている。このモデルに対する OLS 推定は、誤差項に対して、以下の $AR(p)$ モデルが適用されると仮定する。ここで、 \tilde{u}_t には系列相関がないものとする。

$$u_t = \sum_{k=1}^p \phi_k u_{t-k} + \tilde{u}_t \quad (2)$$

(2)の回帰式を(1)に代入し、 u_{t-k} に(1)のラグを取った式を代入すると以下になる。

$$\begin{aligned}
y_t &= \sum_{k=0}^r b_{k+1} x_{t-k} + b_0 + \sum_{j=1}^p \phi_j u_{t-j} + \tilde{u}_t \\
&= \sum_{k=0}^r b_{k+1} x_{t-k} + b_0 + \sum_{j=1}^p \phi_j \left(y_{t-j} - \sum_{k=0}^r b_{k+1} x_{t-j-k} - b_0 \right) + \tilde{u}_t \\
&= \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} + \sum_{k=0}^r b_{k+1} x_{t-k} - \sum_{k=0}^r b_{k+1} \phi_1 x_{t-1-k} - \cdots \\
&\quad - \sum_{k=0}^r b_{k+1} \phi_p x_{t-p-k} + b_0 \left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \right) + \tilde{u}_t \\
&= \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} + b_1 x_t + (b_2 - b_1 \phi_1) x_{t-1} + (b_3 - b_2 \phi_1 - b_1 \phi_2) x_{t-2} \\
&\quad + \cdots - b_{r+1} \phi_p x_{t-p-r} + b_0 \left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \right) + \tilde{u}_t \\
&= \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} + \sum_{j=0}^{p+r} \delta_{j+1} x_{t-j} + \delta_0 + \tilde{u}_t
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
b_1 &= \delta_1, \quad b_2 = \delta_2 + \delta_1 \phi_1 \quad (\delta_2 = b_2 - b_1 \phi_1), \\
b_3 &= \delta_3 + (\delta_2 + \delta_1 \phi_1) \phi_1 + \delta_1 \phi_2 \quad (\delta_3 = b_3 - b_2 \phi_1 - b_1 \phi_2), \quad \cdots
\end{aligned}$$

以上の操作により、系列相関のある分布ラグモデルは、系列相関のない以下のような自己回帰・分布ラグモデルになる。

$$y_t = \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} + \sum_{j=0}^{p+r} \delta_{j+1} x_{t-j} + \delta_0 + \tilde{u}_t \quad (3)$$

しかし、この回帰式は元の分布ラグモデルの回帰式と異なる。この回帰係数 ϕ_j, δ_k の推定値から元の回帰係数 b_k を推定することはできるが、その標準誤差を推定することはできない。そのためこれを書き直す。即ち、(3)式の右辺の y_{t-1} に(3)式のラグを代入すると以下となる。

$$\begin{aligned}
y_t &= \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} + \sum_{j=0}^{p+r} \delta_{j+1} x_{t-j} + \delta_0 + \tilde{u}_t \\
&= \phi_1 y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \phi_j y_{t-j} + \delta_1 x_t + \sum_{j=1}^{p+r} \delta_{j+1} x_{t-j} + \delta_0 + \tilde{u}_t \\
&= \phi_1 \left(\sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j-1} + \sum_{j=0}^{p+r} \delta_{j+1} x_{t-j-1} + \delta_0 + \tilde{u}_{t-1} \right) + \sum_{j=2}^p \phi_j y_{t-j} \\
&\quad + \delta_1 x_t + \sum_{j=1}^{p+r} \delta_{j+1} x_{t-j} + \delta_0 + \tilde{u}_t \\
&= (\phi_1^2 + \phi_2) y_{t-2} + \sum_{j=2}^{p-1} (\phi_1 \phi_j + \phi_{j+1}) y_{t-j-1} + \phi_1 \phi_p y_{t-p-1} \\
&\quad + \delta_1 x_t + (\delta_2 + \phi_1 \delta_1) x_{t-1} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{p+r-1} (\delta_{j+2} + \phi_1 \delta_{j+1}) x_{t-j-1} + \phi_1 \delta_{p+r+1} x_{t-p-r-1} \\
&\quad + \delta_0 (1 + \phi_1) + \tilde{u}_t + \phi_1 \tilde{u}_{t-1}
\end{aligned}$$

同様にして、上の y_{t-2} にまた(3)式のラグを代入し、それを繰り返すと以下となる。

社会システム分析のための統合化プログラム 3.8
—経済時系列分析—

$$\begin{aligned}
 y_t &= (\phi_1^2 + \phi_2) \left(\sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j-2} + \sum_{j=0}^{p+r} \delta_{j+1} x_{t-j-2} + \delta_0 + \tilde{u}_{t-2} \right) \\
 &\quad + \sum_{j=2}^{p-1} (\phi_1 \phi_j + \phi_{j+1}) y_{t-j-1} + \phi_1 \phi_p y_{t-p-1} + \delta_1 x_t + (\delta_2 + \phi_1 \delta_1) x_{t-1} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{p+r-1} (\delta_{j+2} + \phi_1 \delta_{j+1}) x_{t-j-1} + \phi_1 \delta_{p+r+1} x_{t-p-r-1} + \delta_0 (1 + \phi_1) + \tilde{u}_t + \phi_1 \tilde{u}_{t-1} \\
 &= \delta_1 x_t + (\delta_2 + \phi_1 \delta_1) x_{t-1} + \{ (\delta_3 + \phi_1 \delta_2) + (\phi_1^2 + \phi_2) \delta_1 \} x_{t-2} + \dots \\
 &\quad + \delta_0 \{ 1 + \phi_1 + (\phi_1^2 + \phi_2) \} + \dots \\
 &= b_1 x_t + b_2 x_{t-1} + b_3 x_{t-2} + \dots + \delta_0 \{ 1 + \phi_1 + (\phi_1^2 + \phi_2) \} + \dots
 \end{aligned}$$

最後の式において、 r 期よりも長い部分の係数は r 期ラグモデルが正確に成り立つければ0になる。しかし、現実はそのようにならない。ただ、係数は有意でないものになり、無視することが可能であると考える。このように、ラグ次数を長く取っておき、係数がある位置より有意でなくなることを確かめてラグを決めてもよい。その際、係数の標準誤差はOLS標準誤差とすることができます。

このようなアプローチは自己回帰・分布ラグモデル (autoregressive distributed lag model (ADL)) による方法と呼ばれている。我々はこれをADL推定と呼ぶ。

次にGLS法について説明する。(1), (2)式を合わせたものは以下のようにも書き換えられる。

$$\begin{aligned}
 y_t &= \sum_{k=0}^r b_{k+1} x_{t-k} + b_0 + \sum_{j=1}^p \phi_j u_{t-j} + \tilde{u}_t \\
 &= \sum_{k=0}^r b_{k+1} x_{t-k} + b_0 + \sum_{j=1}^p \phi_j \left(y_{t-j} - \sum_{k=0}^r b_{k+1} x_{t-j-k} - b_0 \right) + \tilde{u}_t \\
 &= \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} + \sum_{k=0}^r b_{k+1} \left(x_{t-k} - \sum_{j=1}^p \phi_j x_{t-k-j} \right) + b_0 \left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_j \right) + \tilde{u}_t
 \end{aligned}$$

これは、

$$\tilde{y}_t \equiv y_t - \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j}, \quad \tilde{x}_t \equiv x_t - \sum_{j=1}^p \phi_j x_{t-j}$$

と置き換えると、以下となる。

$$\tilde{y}_t = \sum_{k=0}^r b_{k+1} \tilde{x}_{t-k} + \tilde{b}_0 + \tilde{u}_t \quad (4)$$

この解を求めるには、まず $\tilde{y}_t = y_t$, $\tilde{x}_t = x_t$ として、(4)式を通常のOLS回帰で求め、その誤差を $\hat{u}_t^{(1)}$ とする。この誤差を目的変数に使って以下のように(2)式をOLS推定して $\hat{\phi}_k^{(1)}$ を得る。

$$\hat{u}_t^{(1)} = \sum_{k=1}^p \hat{\phi}_k^{(1)} \hat{u}_{t-k}^{(1)} + \tilde{u}_t^{(2)}$$

この推定値 $\hat{\phi}_k^{(1)}$ を用いて以下のように $\tilde{y}_t^{(1)}$ や $\tilde{x}_t^{(1)}$ を求める。

$$\tilde{y}_t^{(1)} = y_t - \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j^{(1)} y_{t-j}, \quad \tilde{x}_t^{(1)} = x_t - \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j^{(1)} x_{t-j}$$

これをまた(4)式に代入して、OLS回帰を用いて誤差 $\hat{u}_t^{(2)}$ を求める。この誤差を目的変数に

使って以下のように $\hat{\phi}_k^{(2)}$ を得る。

$$\hat{u}_t^{(2)} = \sum_{k=1}^p \hat{\phi}_k^{(2)} \hat{u}_{t-k}^{(2)} + \tilde{u}_t^{(3)}$$

この作業を回帰係数 b_{k+1} が収束するまで繰り返す。以上の手順で回帰係数を求める手法を繰り返しコクレンーオーカット (Cochrane-Orcutt) 推定法とよぶ。これは、一般化最小 2 乗 (generalized least squares (GLS)) 法の特殊な解法である。

ここでは、前節で用いたデータを使って、ADL 法と GLS 法を比較してみよう。モデルは、簡単であるが以下と考える。

$$y_t = b_1 x_t + b_0 + u_t, \quad u_t = \phi_1 u_{t-1} + \tilde{u}_t$$

まず単純に OLS 推定した結果を図 1 に示す。

偏回帰係数と検定							
目的変数	偏回帰係数	標準化係数	標準誤差	t値 (df=192)	p値	95.0%下限	95.0%上限
▶ 説明変数	0.8640	0.5859	0.0863	10.0171	0.0000	0.6939	1.0342
切片	46.0167	0.0000	5.6867	8.0920	0.0000	34.8002	57.2332
	R	R ²	調整済R	調整済R ²	有効性F値	有効性p値	AIC
N=194	0.586	0.343	0.583	0.340	100.3415	0.0000	4.837

図 1 OLS 推定結果

ADL モデルでは、ラグ次数を上げて考えるが、ここでは 4 次まで考えるとする。「最大ラグ次数」を 4 として、説明変数のすべての次数のラグを選択する。結果を図 2 に示す。

偏回帰係数と検定							
目的変数	偏回帰係数	標準化係数	標準誤差	t値 (df=188)	p値	95.0%下限	95.0%上限
▶ 説明変数	0.8117	0.5504	0.0919	8.8341	0.0000	0.6304	0.9930
説明変数_1	0.1414	0.0958	0.0968	1.4599	0.1460	-0.0497	0.3324
説明変数_2	0.0401	0.0271	0.0971	0.4123	0.6806	-0.1516	0.2317
説明変数_3	-0.1166	-0.0788	0.0976	-1.1947	0.2397	-0.3092	0.0760
説明変数_4	0.0813	0.0551	0.0921	0.8825	0.3786	-0.1004	0.2630
切片	39.9050	0.0000	9.6440	4.1378	0.0001	20.8806	58.9293
	R	R ²	調整済R	調整済R ²	有効性F値	有効性p値	
N=194	0.597	0.357	0.583	0.340	20.8730	0.0000	

図 2 ADL 推定結果

ADL 推定の結論としては図 2 の 0 次のところだけを考える。それ以降の説明変数のラグの p 値は p>0.05 である。

次に GLS 推定であるが、ラグ次数は 0 次、誤差のラグ次数は 1 次と仮定する。最大ラグ次数を図 2 のデータ数と合わせるために 3 とし、その中で目的変数 0 次と説明変数 0 次のラグだけを選択する。また GLS 推定の Φ の右のテキストボックスに誤差のラグ次数 1 を代入し、「GLS 推定」のボタンをクリックすると結果は以下のようになる。

偏回帰係数と検定							
目的変数	偏回帰係数	標準化係数	標準誤差	t値 (df=192)	p値	95.0%下限	95.0%上限
▶ 説明変数	0.8097	0.5588	0.0867	9.3375	0.0000	0.6387	0.9808
切片	41.4861	0.0000	4.8009	8.6413	0.0000	32.0168	50.9554
Φ 1	0.1628	0.1620	0.0716	2.2750	0.0240	0.0217	0.3040
収束:101	R	R ²	調整済R	調整済R ²	有効性F値	有効性p値	AIC
N=194	0.559	0.312	0.556	0.309	87.1891	0.0000	4.760

図 3 GLS 推定結果 (誤差ラグ次数 1 次)

ここでは、左端下から 2 行目に「収束:101」とあるが、これは上で述べた繰り返し (コク

社会システム分析のための統合化プログラム 3.8 —経済時系列分析—

レンーオーカット法) の繰り返し数である。ここでは収束になっているが、モデルに問題がある場合は非収束となる場合もある。このプログラムではその判断を 10000 回の繰り返しで収束するか否かとしている。

同様にして、誤差のラグ次数を 2 次まで取った結果を調べてみる。ここではデータ数を合わせるために、最大ラグを 2 に変えている。実行結果を図 4 に示す。

偏回帰係数と検定							
目的変数	偏回帰係数	標準化係数	標準誤差	t値 (df=192)	p値	95.0%下限	95.0%上限
▶ 説明変数	0.8112	0.5596	0.0867	9.3557	0.0000	0.6402	0.9822
切片	41.6120	0.0000	4.8238	8.6263	0.0000	32.0975	51.1265
Φ 1	0.1588	0.1605	0.0718	2.2100	0.0283	0.0171	0.3005
Φ 2	-0.0001	-0.0001	0.0718	-0.0015	0.9988	-0.1417	0.1415
収束:839	R	R^2	調整済R	調整済R^2	有効性F値	有効性p値	
N=194	0.560	0.813	0.556	0.810	87.5287	0.0000	

図 4 GLS 推定結果 (誤差ラグ次数 2 次)

ϕ_2 が有意に 0 と異なることから、誤差の自己回帰の次数は 1 次が妥当と思われる。以上のことから、図 1 の単純な OLS 推定の場合に比べて、ADL 推定と GLS 推定の結果はよく似ていることが分かる。

7. ベクトル自己回帰 (VAR) モデルによる多期間の繰り返し予測

VAR (Vector AutoRegressin) モデルは 2 つ以上の変数を同じ変数のラグによって回帰するモデルである。例えば 2 次元のベクトルモデルでは、回帰式を以下のように仮定する。

$$\begin{aligned} x_t &= c_1 + a_{11}x_{t-1} + \cdots + a_{1r}x_{t-r} + b_{11}y_{t-1} + \cdots + b_{1s}y_{t-s} + u_{1t} \\ y_t &= c_2 + a_{21}x_{t-1} + \cdots + a_{2r}x_{t-r} + b_{21}y_{t-1} + \cdots + b_{2s}y_{t-s} + u_{2t} \end{aligned} \quad (1)$$

回帰係数は回帰式単独で与えた場合と同じである。また、回帰係数の誤差も単独で与えた場合と同じとすることが多い^[4]。予測において、1 期先は以下のようにになり、現時点の値だけで計算可能である。ここに $\hat{a}_{\alpha i}, \hat{b}_{\alpha i}$ は、上の回帰分析で求めた推定値を利用してい

る。

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1} &= \hat{c}_1 + \hat{a}_{11}x_t + \cdots + \hat{a}_{1r}x_{t-r+1} + \hat{b}_{11}y_t + \cdots + \hat{b}_{1s}y_{t-s+1} \\ \hat{y}_{t+1} &= \hat{c}_2 + \hat{a}_{21}x_t + \cdots + \hat{a}_{2r}x_{t-r+1} + \hat{b}_{21}y_t + \cdots + \hat{b}_{2s}y_{t-s+1} \end{aligned}$$

しかし、2 期先以上は、繰り返し予測が使われることが多い、上で予測された 1 期先の値を以下のように利用することになる。

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+2} &= \hat{c}_1 + \hat{a}_{11}\hat{x}_{t+1} + \cdots + \hat{a}_{1r}x_{t-r+2} + \hat{b}_{11}\hat{y}_{t+1} + \cdots + \hat{b}_{1s}y_{t-s+2} \\ \hat{y}_{t+2} &= \hat{c}_2 + \hat{a}_{21}\hat{x}_{t+1} + \cdots + \hat{a}_{2r}x_{t-r+2} + \hat{b}_{21}\hat{y}_{t+1} + \cdots + \hat{b}_{2s}y_{t-s+2} \end{aligned}$$

このため、複数の変数による 1 つだけの変数の予測は不可能で、ベクトル自己回帰モデルは必須である。さらに先の予測については、この操作を繰り返す。

これを実際に実行するのが分析実行画面下方の以下の部分である。

VARラグ検定 予測 期先 VAR予測値

図 1 VAR モデルによる繰り返し予測と検定

例えば、「予測」を 5 期先に変え、「VAR 予測値」ボタンをクリックすると、以下のような結果が表示される。

VAR 予測値と残差					
実測機器	予測値	残差	実測他指標	予測値	残差
94	57	56.0175	0.9825	4	13.5891
95	62	64.0200	-2.0200	7	13.9649
96	78	59.1320	18.8680	28	14.1729
97	61	66.7145	-5.7145	21	10.7487
98	70	73.9322	-3.9322	12	11.8519
99	69	70.9572	-1.9572	15	11.8334
100	66	65.5279	0.4721	18	12.5505
予測1		70.4712			12.2742
予測2		70.8359			11.6248
予測3		68.6319			12.6463
予測4		70.6247			12.9391
予測5		71.1632			12.4189

図 2 VAR 予測値

この予測の過去の値は系列全体のデータを使った OLS 予測値で、真の未来の予測ではないが、予測 1～予測 5 の部分は未来の予測である。

次に、予測のラグ次数について、与えたラグ次数が正当かどうかを調べてみる。これには、与えた最大ラグ次数の係数がすべて 0 かどうかの結合仮説検定と、情報量基準を用いた方法がある。これらについて説明する。

簡単のために、VAR (Vector AutoRegression) モデルとして、(1)式で与えられた 2 次元のベクトルモデルを考える。ここでは、変数 x_t のラグ次数を r 、変数 y_t のラグ次数を s ($p = \max(r, s)$) としているが、通常 VAR(p) モデルとして、 $p = r = s$ 、のよう同じ場合を考える。一般には異なっていても問題はないと思われるが、プログラムでも異なっているものとして扱う。回帰式の変数と係数を以下のように定義すると、

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{p+1} & y_{p+1} \\ \vdots & \vdots \\ x_{T-1} & y_{T-1} \\ x_T & y_T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & x_p & \cdots & x_{p-r+1} & y_p & \cdots & y_{p-s+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{T-2} & \cdots & x_{T-r-1} & y_{T-2} & \cdots & y_{T-s-1} \\ 1 & x_{T-1} & \cdots & x_{T-r} & y_{T-1} & \cdots & y_{T-s} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} u_{1p+1} & u_{2p+1} \\ \vdots & \vdots \\ u_{1T-1} & u_{2T-1} \\ u_{1T} & u_{2T} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} \mathbf{d}'_1 \\ \mathbf{d}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ c_2 & a_{21} & \cdots & a_{2r} & b_{21} & \cdots & b_{2s} \end{pmatrix}$$

(1)式は次のように表示される。

$$\mathbf{X} = \mathbf{ZD} + \mathbf{U}$$

最小 2 乗法を用いて、パラメータの予測値 $\hat{\mathbf{D}}$ を以下のように求める。

$$\hat{\mathbf{D}}(r+s+1, 2) = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{X} = \mathbf{D} + (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{U}$$

ここで、個々の回帰式のパラメータは以下のように表される。

$$\hat{\mathbf{d}}_\alpha = \mathbf{d}_\alpha + (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{u}_\alpha$$

ここで誤差の分布を次のように仮定すると、

$$\mathbf{u}_\alpha \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{\alpha\alpha})$$

パラメータ $\hat{\mathbf{d}}_\alpha$ の分布は、補遺 (公式 3) より以下となる。

$$\hat{\mathbf{d}}_\alpha \sim N(\mathbf{d}_\alpha, (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\Sigma_{\alpha\alpha}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1})$$

ここでパラメータをまとめたベクトル

$$\hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{d}}_1 \\ \hat{\mathbf{d}}_2 \end{pmatrix}$$

の分布について、誤差が説明変数の値によらない均一分散の場合と、説明変数の値による不均一分散の場合に分けて見てみよう。

均一分散誤差の場合

各回帰式で説明変数の値によらず誤差分散が均一の場合、以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}_\alpha &\sim N(\mathbf{d}_\alpha, (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\Sigma_{\alpha\alpha}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) = N(\mathbf{d}_\alpha, \sigma_{\alpha\alpha}^2 (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{I}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \\ &= N(\mathbf{d}_\alpha, \sigma_{\alpha\alpha}^2 (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}) \end{aligned}$$

これを回帰式間に拡張すると次のようになる。

$$\hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{d}}_1 \\ \hat{\mathbf{d}}_2 \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} & \sigma_{12} (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \\ \sigma_{12} (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} & \sigma_{22}^2 (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \end{pmatrix}\right] \equiv N(\mathbf{d}, \Sigma_d)$$

不均一分散誤差の場合

各回帰式で説明変数の値に依存して誤差分散が不均一の場合、以下の関係を利用する。

$$\hat{\mathbf{d}}_\alpha \sim N(\mathbf{d}_\alpha, (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\Sigma_{\alpha\alpha}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1})$$

これを回帰式間に拡張すると、右辺の一部は次のようになる。

$$(\mathbf{Z}'\Sigma_{\alpha\beta}\mathbf{Z})_{ij} = \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu} z_{i\lambda} z_{j\mu} \mu_{\alpha\lambda} \mu_{\beta\mu}$$

これをを利用して以下の関係を得る。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}} &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{d}}_1 \\ \hat{\mathbf{d}}_2 \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\Sigma_{11}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} & (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\Sigma_{12}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \\ (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\Sigma_{12}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} & (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\Sigma_{22}\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1} \end{pmatrix}\right] \\ &= N(\mathbf{d}, \Sigma_d) \end{aligned}$$

次に結合仮説の検定を考える。補遺 (公式 3) を使うと以下の関係を得る。

$$F = (\mathbf{R}\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{r})'[\mathbf{R}\Sigma_d \mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{R}\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{r}) / q \sim F_{q,\infty} \quad (2)$$

これは、通常の結合仮説の検定統計量を拡張したものである。ここに q は同時制約の数で

ある。それぞれの変数のラグの最高次数がすべて 0 であるかどうかの検定をした場合、ベクトルの次数の 2 乗が同時制約の数であり、この場合 $q=2^2=4$ となる。

ここで、ベクトル自己回帰モデルの BIC と AIC を一般的に示しておく。ベクトルの次元を k として、誤差共分散(σ) _{$\alpha\beta$} とラグ次数の和 l_p を以下のように定義する。

$$(\sigma)_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u_{\alpha t} u_{\beta t} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, k), \quad l_p = \sum_{i=1}^k l_i$$

ここに l_i は変数 i のラグ次数である。特に(1)の場合は、 $k=2$ ， $l_p = r+s$ 。

これらを用いて、BIC と AIC は以下となる。

$$BIC = \log |\sigma| + k(l_p + 1) \frac{\log N}{N}$$

$$AIC = \log |\sigma| + k(l_p + 1) \frac{2}{N}$$

設定をした後、図 1 の「VAR ラグ検定」ボタンをクリックすると図 3 が表示される。左は最大ラグ次数 1 次、右は 3 次の場合である。

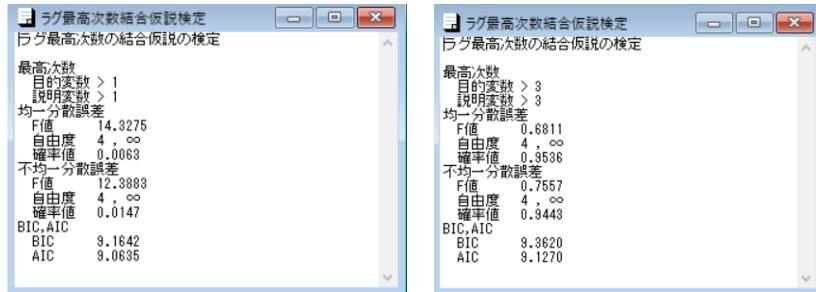


図 3 VAR ラグ検定

これには各変数の最大ラグの係数がすべて 0 かどうかの検定と、BIC と AIC の値が表示されている。BIC と AIC は他のモデルと比べて小さい方が良しとされるが、最大ラグ次数 1 次の方が良いことが分かる。

最後に、この論文で述べた理論は、分析実行画面の「解説」ボタンをクリックすることで、図 4 のように要約されて表示されることを示しておく。

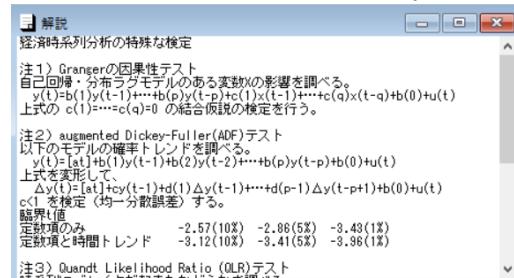


図 4 簡単な解説表示画面

8. おわりに

経済分野で用いられる時系列分析は、自己回帰・分布ラグモデルである。これは目的変数のタイムラグとその他の変数のタイムラグを含んだ重回帰分析モデルであるが、推定誤差について、時系列的な変動や相関を含む形となっている。

経済時系列分析のプログラムでは、変数選択だけでなく柔軟なラグ選択が必須である。また、階差も容易に求められなければならない。変数や階差選択の後の重回帰分析では、不均一分散の処理も必要である。その上で、推定誤差の系列相関や確率トレンドの問題を考えて行かなければならない。以上のことから、我々はまずベースとなる時系列分析の自己回帰・分布ラグ (ADL) モデルを元にしたプログラムを作成した。

その後、これに付け加える形で、確率トレンドの有無を検定する ADF テスト、ブレイクを検定するための QLR 統計量、誤差に系列相関がある場合の HAC 標準誤差、系列相関を考える他の手法である ADL アプローチ及び、GLS アプローチ、自己回帰・分布ラグモデルの予測を考えるベクトル自己回帰 (VAR) モデルなどを加えて行った。最後の自己回帰モデルでは少し拡張が必要であったが、基本的にはしっかりと ADL モデルができていれば、大きな変更は不要であった。

以上のことにより、我々のプログラムはかなりコンパクトなものとなったが、これを活用する際には時系列分析に関するかなりの知識が必要である。この論文でも概略は説明したが、利用者には、参考文献 [3] の 16 章を読まれることをお勧めする。但し、この中に述べられている共和分についてのプログラムはまだ作られていない。また、予測値などのグラフ化についても、これまで作成してきた時系列分析のプログラムのように、作っておかなければならない。

謝辞

College Analysis の経済分野への応用のプログラム[5],[6]については、参考文献 [3] 全体を参考にしている。この場を借りて、著者並びに訳者の方に謝辞を述べたい。

参考文献

- [1] 福井正康, 王迎春, 王晶, 石丸敬二、「社会システム分析のための統合化プログラム 11 一時系列分析ー」、福山平成大学経営研究、6 号、81-98 (2010)
- [2] 福井正康, 岩村忠昭, 尾崎誠、「社会システム分析のための統合化プログラム 27 一局所重回帰分析・パネル重回帰分析ー」、福山平成大学経営研究、第 12 号、95-111 (2016)
- [3] J.H.Stock,M.W.Watson, 宮尾龍藏訳、「入門計量経済学」、共立出版 (2016)
- [4] 沖本竜義、「経済・ファイナンスデータの計量時系列分析」、朝倉書店 (2010)
- [5] 福井正康, 兎内祥子、「社会システム分析のための統合化プログラム 3.5 一回帰分析の拡張・トービット回帰分析ー」、福山平成大学経営研究、第 16 号、85-104 (2020)

- [6] 福井正康, 兎内祥子、「社会システム分析のための統合化プログラム3 6 一パネルデータ分析・操作変数回帰分析ー」、福山平成大学経営研究、第16号、105-125 (2020)

補遺

この論文で使う公式を示しておく。

$$(公式 1) \text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{u}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}}\mathbf{B}'$$

(公式 2) $\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}}\mathbf{B}' = \mathbf{0}$ ならば、 $\mathbf{A}\mathbf{u}$ と $\mathbf{B}\mathbf{u}$ は独立した分布

(公式 3) $\mathbf{u}(m \times 1) \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}})$ のとき、

$$\mathbf{d} + \mathbf{A}\mathbf{u} \sim N(\mathbf{d}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}}\mathbf{A}')$$

$$\mathbf{u}'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{u} \sim \chi_m^2$$

(公式 4) $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_m)$ で $\mathbf{C}(m \times m)$ がべき等行列 ($\mathbf{C}\mathbf{C}' = \mathbf{C}$) のとき、

$$\mathbf{u}'\mathbf{C}\mathbf{u} \sim \chi_r^2 \text{ 但し、} \text{rank}(\mathbf{C}) = r$$

Multi-purpose Program for Social System Analysis 38
- Time Series Analysis -

Masayasu FUKUI ^{*1} and Shoko TONAI ^{*1}

**1 Department of Business Administration, Faculty of Business Administration,
Fukuyama Heisei University*

Abstract: We have been constructing a unified program on the social system analysis for purpose of education. This time, we created a program for time series analysis used in economics. A model of this analysis is based on multiple regression analysis called autoregressive distribution lag model whose estimation error includes time series fluctuations and correlations.

Key Words: economic time series analysis, autoregressive distributed lag model, ADL, ADF test, QLR statistic, HAC standard error, ADL, GLS approach, vector autoregressive VAR