

福山平成大学経営学部紀要
第 17 号 (2021), *－**頁

社会システム分析のための統合化プログラム 39 － 2 値項目反応理論－

福井 正康^{*1}・奥田 由紀恵^{*2}・細川光浩^{*2}

^{*1} 福山平成大学経営学部経営学科

^{*2} 福山平成大学大学教育センター

要旨：我々は教育分野での利用を目的に社会システム分析に用いられる様々な手法を統合化したプログラム College Analysis を作成してきた。今回は最近教育分野で応用が進んでいる項目反応理論に関するプログラムを組み込んだ。この手法のプログラムは新しいものではないが、考え方の独自性と応用の可能性から、また今後の発展的な問題を扱う基礎として非常に重要である。

キーワード：項目反応理論、IRT、テスト理論、College Analysis

1. はじめに

試験問題を扱う際、問題の相対的な難易度はその問題の正答率で評価されるが、受験者の全体的な能力が分からない限り、その問題の絶対的な難易度は分からない。また、受験者の相対的な能力は試験の点数（配点が同じ場合は正答率）で判断されるが、問題の全体的な難易度が分からない限り、受験者の絶対的な能力は判断できない。そのため、別々の問題で受験した受験者の能力を比較することは不可能であった。しかし、項目反応理論を応用するとこれが可能となる。この理論は医療系の共用試験や TOEIC, TOEFL などの受験者の評価時や問題作成時に利用されており、今後多くの試験での利用が予想される。ここでは、試験を正解と不正解で判断する 2 値項目反応理論について考察する。

2 値項目反応理論では、受験者の能力値 θ が与えられたとき、問題の正解確率を例えば以下のように与える。

$$P(\theta) = g + \frac{(1-g)}{1 + \exp[-Da(\theta-b)]}$$

ここで、 a, b, c は問題ごとに与えられる項目パラメータである。また、 D はロジスティック関数と標準正規分布の分布関数の違いを補正するパラメータである。 $D=1.7$ のとき、最も標準正規分布関数に近いとされている。この式は $D=1$ のとき、項目パラメータの値（以後、項目値）を変えると、能力パラメータの値（以後、能力値） θ に応じて図 1 のような形の特性曲線が与えられる。

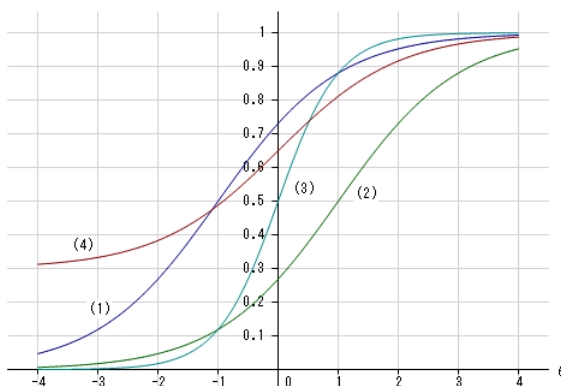


図1 ロジスティック曲線

ここで、図1の各項目値は以下のように与えた。

- (1) $b = -1, a = 1, g = 0$
- (2) $b = 1, a = 1, g = 0$
- (3) $b = 0, a = 2, g = 0$
- (4) $b = 0, a = 1, g = 0.3$

項目パラメータ b は難易度母数と呼ばれ、(1)と(2)の比較で分かるように、大きくなるにつれてグラフは右へ寄る。これにより難易度母数が大きくなるにつれて同じ能力値の受験者の正解率は低くなる。パラメータ a は識別力母数と呼ばれ、(3)で分かるように、グラフの立ち上がりが急になり、能力値の差により正解率の変化が大きくなる。パラメータ g は当て推量母数と呼ばれ、(4)で分かるようにグラフの下限がその値に応じて上がっていく。これは能力の低い受験者でも偶然正解を得る確率と解釈される。これらのパラメータによって、問題の特徴を捉えるが、モデルにより b だけを用いたもの（他は $a = 1, g = 0$ ）、 b と a を用いたもの（他は $g = 0$ ）、すべてのパラメータを用いたものがあり、それぞれ、1PL モデル、2PL モデル、3PL モデルと呼ばれている。但し、これらのパラメータは独立でない。実際、以下のような線形変換によって同じ正解確率を得る。

$$\theta' = \alpha\theta + \beta, \quad b' = \alpha b + \beta, \quad a' = a/\alpha, \quad g' = g$$

このため、ここまでの話では単に問題の特徴を難しく言い換えただけのように見え、有用性はあまり感じられない。しかし、これらのパラメータを求める方法を固定すれば、受験した問題の項目値から受験者の能力値を、別の問題を受験した他者と比較できる形で決定でき、また、受験者の能力値から、問題の項目値を他の問題と比較できる形で決定できることが知られている。これが項目反応理論の特徴である。以下、実際の試験に当てはめて考え方を説明する。

最初に、基礎となる問題を多数含んだ問題セットを用意し、受験者を予備調査で集め、試験を実施して結果を求める。この結果から、長年研究されてきた方法を使って、最初の項目値と能力値を決める。ここで、これらの値を同時に求めるところが重要な点で、歴史

的に様々な方法が提案されてきた。我々のプログラムでは、EM アルゴリズムを利用したベイズ推定法という方法を用いている。これは最尤法と呼ばれる統計手法の一種である。

この予備調査の問題セットに対して、項目値と能力値が同時に求まれば、上で述べたように、これらの問題のどのような組み合わせからでも新しい受験者の能力を推定できる。また、新しい問題の項目値については、少数の新しい問題を余分に含めた試験を実施し、まず項目値の分かっている問題だけを使って受験者の能力値を求める。次にその能力値を用いて、含めておいた新しい問題の項目値を求める。このような方法によって、問題を増やして項目値を求めていくことができる。我々のプログラムではこの原理が体感できるようになっている。実用では、実務的な意見を取り入れながら、操作を自動化していく必要がある。

2. EMアルゴリズムを利用したベイズ推定法の理論

2.1 項目パラメータの周辺尤度関数を利用した項目値の推定

受験者を i 、問題を r とした場合の解答データを $u_{ir} = \{0, 1\}$ (不正解 0, 正解 1) とする。問題 r について、能力値 θ_i の受験者 i の正解確率 $P_r(\theta_i)$ を以下のように仮定する。

$$P_r(\theta_i) = g_r + \frac{1 - g_r}{1 + \exp[-Da_r(\theta_i - b_r)]}, \quad Q_r(\theta_i) = 1 - P_r(\theta_i)$$

ここで、 b_r を困難度パラメータ、 a_r を識別力パラメータ、 g_r を当て推量パラメータと呼び、これらをまとめて項目パラメータと呼ぶ。これらのパラメータの値の組み合わせで、よく利用されるのが以下のモデルである。

$$\text{1PL モデル} \quad a_r = 1, g_r = 0 \quad P_r(\theta_i) = \frac{1}{1 + \exp[-D(\theta_i - b_r)]}$$

$$\text{2PL モデル} \quad g_r = 0 \quad P_r(\theta_i) = \frac{1}{1 + \exp[-Da_r(\theta_i - b_r)]}$$

$$\text{3PL モデル} \quad \text{制約なし} \quad P_r(\theta_i) = g_r + \frac{1 - g_r}{1 + \exp[-Da_r(\theta_i - b_r)]}$$

今、受験生 i の解答データ $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})$ が得られたとき、受験生の能力パラメータ θ 、 n 個の問題の項目パラメータ $\mathbf{d}_r = (b_r, a_r, g_r)$ ($r = 1, \dots, n$) の確率分布は、各問題が独立と仮定して以下で与えられる。

$$\begin{aligned} P(\mathbf{d}, \theta | \mathbf{u}_i) &= P(\mathbf{u}_i | \mathbf{d}, \theta) f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}) f(\theta) / G(\mathbf{u}_i) \\ &= \prod_{r=1}^n P_r(\theta)^{u_{ir}} Q_r(\theta)^{1-u_{ir}} f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}_r) \times f(\theta) / G(\mathbf{u}_i) \end{aligned}$$

ここに、受験生の能力パラメータ θ の事前分布の密度関数を $f(\theta)$ 、各問題の項目パラメータの事前分布の密度関数を $f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}_r) = f_b(b_r) f_a(a_r) f_g(g_r)$ とし、問題ごとの関数形は同じものとしている。また、分母については以下である。

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{u}_i) &= \int \cdots \int P(\mathbf{u}_i | \mathbf{d}, \theta) f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}) f(\theta) d\mathbf{d} d\theta \\
 &= \int \left[\prod_{r=1}^n \int P_r(\theta)^{u_{ir}} Q_r(\theta)^{1-u_{ir}} f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}_r) d\mathbf{d}_r \right] f(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

これは定数となり、最尤法の議論とは無関係になる。

今、項目パラメータと能力パラメータを同時に求めることは難しいので、項目パラメータについての周辺分布を求め、それを尤度関数にする。受験生 i のデータ出現の周辺分布は以下となる。

$$P(\mathbf{u}_i | \mathbf{d}) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{u}_i | \mathbf{d}, \theta) f(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{r=1}^n P_r(\theta)^{u_{ir}} Q_r(\theta)^{1-u_{ir}} f(\theta) d\theta$$

以後、表示の簡単のため、以下と定義する。

$$P(\mathbf{u}_i | \theta) \equiv P(\mathbf{u}_i | \mathbf{d}, \theta), \quad P(\mathbf{u}_i) \equiv P(\mathbf{u}_i | \mathbf{d})$$

また能力パラメータの事前分布は標準正規分布と仮定する。

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\theta^2/2)$$

この周辺分布を使った尤度関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
 L &= \prod_{i=1}^N G(\mathbf{u}_i) P(\mathbf{d} | \mathbf{u}_i) = \prod_{i=1}^N P(\mathbf{u}_i | \mathbf{d}) \times \prod_{r=1}^n f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}_r) = \prod_{i=1}^N P(\mathbf{u}_i) \times \prod_{r=1}^n f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}_r) \\
 &= \prod_{i=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{u}_i | \theta) f(\theta) d\theta \right] \times \prod_{r=1}^n f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}_r) \equiv L_1 \times L_2
 \end{aligned}$$

これを用いると、対数尤度関数は以下となる。

$$\begin{aligned}
 \log L &= \log L_1 + \log L_2 = \sum_{i=1}^N \log P(\mathbf{u}_i) + \sum_{r=1}^n \log f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}_r) \\
 &= \sum_{i=1}^N \log \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{u}_i | \theta) f(\theta) d\theta + \sum_{r=1}^n \log f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}_r)
 \end{aligned}$$

対数尤度関数はこのように2つの部分に分かれるので、当面第1項について計算を進める。

対数尤度 L_1 を用いてスコアベクトルを計算する。ここでは詳細な例として識別度パラメータでの微分を考える。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a_r} \log L_1 &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial a_r} \log P(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{P(\mathbf{u}_i)} \frac{\partial}{\partial a_r} P(\mathbf{u}_i) \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{P(\mathbf{u}_i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a_r} P(\mathbf{u}_i | \theta) f(\theta) d\theta \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{P(\mathbf{u}_i)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a_r} [\log P(\mathbf{u}_i | \theta)] \times P(\mathbf{u}_i | \theta) f(\theta) d\theta \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a_r} [\log P(\mathbf{u}_i | \theta)] \times \frac{P(\mathbf{u}_i | \theta) f(\theta)}{P(\mathbf{u}_i)} d\theta
 \end{aligned}$$

この式の最後の部分にベイズの定理を用いると、

$$P(\theta | \mathbf{u}_i) = \frac{P(\mathbf{u}_i | \theta) f(\theta)}{P(\mathbf{u}_i)}, \quad P(\mathbf{u}_i) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{u}_i | \theta) f(\theta) d\theta$$

この関係をスコアベクトルに代入すると以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial a_r} \log L_1 = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a_r} [\log P(\mathbf{u}_i | \theta)] \times P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta$$

さらに、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_r} \log L_1 &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a_r} [\log P(\mathbf{u}_i | \theta)] \times P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{P(\mathbf{u}_i | \theta)} \frac{\partial}{\partial a_r} P(\mathbf{u}_i | \theta) \times P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{P(\mathbf{u}_i | \theta)} \frac{\partial}{\partial a_r} \prod_{r'=1}^n P_{r'}(\theta)^{u_{ir'}} Q_{r'}(\theta)^{1-u_{ir'}} \times P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta \times \prod_{r=1}^n f_d(\mathbf{d}_r) \end{aligned}$$

以下、参考文献 [2] の議論に従って計算を進める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_r} \prod_{r'=1}^n P_{r'}(\theta)^{u_{ir'}} Q_{r'}(\theta)^{1-u_{ir'}} &= \prod_{r' \neq r}^n P_{r'}(\theta)^{u_{ir'}} Q_{r'}(\theta)^{1-u_{ir'}} \frac{\partial}{\partial a_r} [P_r(\theta)^{u_{ir}} Q_r(\theta)^{1-u_{ir}}] \\ &= \prod_{r' \neq r}^n P_{r'}(\theta)^{u_{ir'}} Q_{r'}(\theta)^{1-u_{ir'}} \left[\frac{\partial}{\partial a_r} \{P_r(\theta)^{u_{ir}}\} Q_r(\theta)^{1-u_{ir}} + P_r(\theta)^{u_{ir}} \frac{\partial}{\partial a_r} \{Q_r(\theta)^{1-u_{ir}}\} \right] \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_r} P_r(\theta) &= \frac{\partial}{\partial a_r} \left[g_r + \frac{1-g_r}{1+\exp\{-Da_r(\theta-b_r)\}} \right] \\ &= \frac{D(1-g_r)(\theta-b_r)\exp\{a_r(\theta-b_r)\}}{[1+\exp\{-a_r(\theta-b_r)\}]^2} = D(1-g_r)(\theta-b_r)P_r^*(\theta)Q_r^*(\theta) \\ &= D(\theta-b_r)[P_r(\theta)-g_r]Q_r(\theta) \equiv M_r(\theta) \end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_r} \prod_{r'=1}^n P_{r'}(\theta)^{u_{ir'}} Q_{r'}(\theta)^{1-u_{ir'}} &= \prod_{r' \neq r}^n P_{r'}(\theta)^{u_{ir'}} Q_{r'}(\theta)^{1-u_{ir'}} M_r(\theta) \\ &\quad \times [u_{ir} P_r(\theta)^{u_{ir}-1} Q_r(\theta)^{1-u_{ir}} - (1-u_{ir}) P_r(\theta)^{u_{ir}} Q_r(\theta)^{-u_{ir}}] \end{aligned}$$

括弧は、 $u_{ir}=1$ のとき 1、 $u_{ir}=0$ のとき -1 であるから、 $(-1)^{u_{ir}+1}$ でおきかえ、以下を得る。

$$\frac{\partial}{\partial a_r} \prod_{r'=1}^n P_{r'}(\theta)^{u_{ir'}} Q_{r'}(\theta)^{1-u_{ir'}} = (-1)^{u_{ir}+1} M_r(\theta) \prod_{r' \neq r}^n P_{r'}(\theta)^{u_{ir'}} Q_{r'}(\theta)^{1-u_{ir'}}$$

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a_r} \log L_1 &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{P(\mathbf{u}_i | \theta)} \frac{\partial}{\partial a_r} \prod_{r'=1}^n P_{r'}(\theta)^{u_{ir'}} Q_{r'}(\theta)^{1-u_{ir'}} \times P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{u_{ir}+1} M_r(\theta)}{P(\mathbf{u}_i | \theta)} \left[\prod_{r' \neq r}^n P_{r'}(\theta)^{u_{ir'}} Q_{r'}(\theta)^{1-u_{ir'}} \right] P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{u_{ir}+1} M_r(\theta)}{P(\mathbf{u}_i | \theta)} \frac{P(\mathbf{u}_i | \theta)}{P_r(\theta)^{u_{ir}} Q_r(\theta)^{1-u_{ir}}} P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta \\
 &= \sum_{i=1}^N (-1)^{u_{ir}+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_r(\theta)}{P_r(\theta)^{u_{ir}} Q_r(\theta)^{1-u_{ir}}} P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta
 \end{aligned}$$

ここで、

$$(-1)^{u_{ir}+1} P_r(\theta)^{1-u_{ir}} Q_r(\theta)^{u_{ir}} = u_{ir} - P_r(\theta)$$

と表せることより、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a_r} \log L_1 &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} [u_{ir} - P_r(\theta)] \frac{M_r(\theta)}{P_r(\theta) Q_r(\theta)} P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta \\
 &= D(1 - g_r) \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} [u_{ir} - P_r(\theta)] (\theta - b_r) \frac{P_r^*(\theta) Q_r^*(\theta)}{P_r(\theta) Q_r(\theta)} P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta \\
 &= D(1 - g_r) \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} [u_{ir} - P_r(\theta)] (\theta - b_r) w_r(\theta) P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta
 \end{aligned}$$

同様に、 b_r の微分については、

$$\frac{\partial}{\partial b_r} \log L_1 = -D a_r (1 - g_r) \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} [u_{ir} - P_r(\theta)] w_r(\theta) P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta$$

次に、 g_r の微分については、

$$\begin{aligned}
 M_r(\theta) &= \frac{\partial}{\partial g_r} P_r(\theta) = \frac{\partial}{\partial g_r} \left[g_r + \frac{1 - g_r}{1 + \exp\{-a_r(\theta - b_r)\}} \right] = Q_r^*(\theta) \\
 \frac{\partial}{\partial g_r} \prod_{r'=1}^n P_{r'}(\theta)^{u_{ir'}} Q_{r'}(\theta)^{1-u_{ir'}} &= (-1)^{u_{ir}+1} M_r(\theta) \prod_{r' \neq r}^n P_{r'}(\theta)^{u_{ir'}} Q_{r'}(\theta)^{1-u_{ir'}}
 \end{aligned}$$

を用いると以下となる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial g_r} \log L_1 &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[u_{ir} - P_r(\theta)] M_r(\theta)}{P_r(\theta) Q_r(\theta)} P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[u_{ir} - P_r(\theta)] Q_r^*(\theta)}{P_r(\theta) Q_r(\theta)} P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta \\
 &= \frac{1}{1 - g_r} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[u_{ir} - P_r(\theta)]}{P_r(\theta)} P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta
 \end{aligned}$$

以上まとめると、今後の基本となる以下の式を得る。

対数尤度関数の 1 階微分

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b_r} \log L_1 &= -Da_r(1-g_r) \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} [u_{ir} - P_r(\theta)] w_r(\theta) P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta \\ \frac{\partial}{\partial a_r} \log L_1 &= D(1-g_r) \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} [u_{ir} - P_r(\theta)] (\theta - b_r) w_r(\theta) P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta \\ \frac{\partial}{\partial g_r} \log L_1 &= \frac{1}{1-g_r} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[u_{ir} - P_r(\theta)]}{P_r(\theta)} P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta\end{aligned}$$

次に情報行列を得るために、対数尤度の 2 階微分を計算する必要があるが、計算の高速化と安定化のために以下の EM アルゴリズムを利用する。EM アルゴリズムはパラメータ推定ステップを 2 段階に分ける方法で、ある段階で暫定的に求めたパラメータを使って、ある統計量を計算し (E ステップ)、その後はその統計量を既知として最尤法の計算を進め (M ステップ)、結果が得られた段階で、再度その結果を使って E ステップを実行し、これを繰り返す手法である。

E ステップ

得られたデータと暫定的なパラメータの値を用いて、各問題についての暫定的サンプルサイズ $f_r(\theta)$ と暫定的正答数 $r_r(\theta)$ とを以下のように計算する。

$$f_r(\theta) = \sum_{i=1}^N P(\theta | \mathbf{u}_i), \quad r_r(\theta) = \sum_{i=1}^N u_{ir} P(\theta | \mathbf{u}_i)$$

M ステップ

上の結果を使うと対数尤度関数は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b_r} \log L_1 &= -Da_r(1-g_r) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N [u_{ir} - P_r(\theta)] P(\theta | \mathbf{u}_i) w_r(\theta) d\theta \\ &= -Da_r(1-g_r) \int_{-\infty}^{\infty} [r_r(\theta) - f_r(\theta) P_r(\theta)] w_r(\theta) d\theta \\ \frac{\partial}{\partial a_r} \log L_1 &= D(1-g_r) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N [u_{ir} - P_r(\theta)] P(\theta | \mathbf{u}_i) (\theta - b_r) w_r(\theta) d\theta \\ &= D(1-g_r) \int_{-\infty}^{\infty} [r_r(\theta) - f_r(\theta) P_r(\theta)] (\theta - b_r) w_r(\theta) d\theta \\ \frac{\partial}{\partial g_r} \log L_1 &= \frac{1}{1-g_r} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[u_{ir} - P_r(\theta)]}{P_r(\theta)} P(\theta | \mathbf{u}_i) d\theta \\ &= \frac{1}{1-g_r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[r_r(\theta) - f_r(\theta) P_r(\theta)]}{P_r(\theta)} d\theta\end{aligned}$$

この $f_r(\theta)$ と $r_r(\theta)$ を定数のように考えるので、補遺の関係などを使って 2 階微分は比較的容易に求められる。注意することは、異なる問題についての 2 階微分は 0 であることである。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial b_r^2} \log L_1 &= D(1-g_r) \frac{\partial}{\partial b_r} \int_{-\infty}^{\infty} [r_r(\theta) - f_r(\theta)P_r(\theta)](\theta - b_r)w_r(\theta)d\theta \\
&= \frac{D^2 a_r^2}{(1-g_r)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_r(\theta)}{P_r(\theta)^2} \{P_r(\theta) - g_r(\theta)\} [r_r(\theta)g_r - f_r(\theta)P_r(\theta)^2] d\theta \\
\frac{\partial^2}{\partial a_r^2} \log L_1 &= D(1-g_r) \frac{\partial}{\partial a_r} \int_{-\infty}^{\infty} [r_r(\theta) - f_r(\theta)P_r(\theta)](\theta - b_r)w_r(\theta)d\theta \\
&= \frac{D^2}{(1-g_r)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_r(\theta)}{P_r(\theta)^2} (\theta - b_r)^2 [P_r(\theta)_r - g_r] [r_r(\theta)g_r - f_r(\theta)P_r(\theta)^2] d\theta \\
\frac{\partial^2}{\partial g_r^2} \log L_1 &= \frac{\partial}{\partial g_r} \frac{1}{1-g_r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[r_r(\theta) - f_r(\theta)P_r(\theta)]}{P_r(\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{(1-g_r)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[r_r(\theta) - f_r(\theta)P_r(\theta)]P_r(\theta) - r_r(\theta)Q_r(\theta)}{P_r(\theta)^2} d\theta \\
\frac{\partial^2}{\partial b_r \partial a_r} \log L_1 &= D(1-g_r) \frac{\partial}{\partial b_r} \int_{-\infty}^{\infty} [r_r(\theta) - f_r(\theta)P_r(\theta)](\theta - b_r)w_r(\theta)d\theta \\
&= -\frac{D}{(1-g_r)^2} \int_{-\infty}^{\infty} (P_r(\theta) - g_r) [(1-g_r)\{r_r(\theta) - f_r(\theta)P_r(\theta)\} \\
&\quad + \frac{Da_r(\theta - b_r)Q_r(\theta)}{P_r(\theta)} \{(r_r(\theta) - f_r(\theta)P_r(\theta))P_r(\theta) - r_r(\theta)(P_r(\theta) - g_r)\}] d\theta \\
\frac{\partial^2}{\partial a_r \partial g_r} \log L_1 &= \frac{\partial}{\partial a_r} \frac{1}{1-g_r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[r_r(\theta) - f_r(\theta)P_r(\theta)]}{P_r(\theta)} d\theta \\
&= -\frac{D}{(1-g_r)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_r(\theta)r_r(\theta)}{P_r(\theta)^2} (\theta - b_r) [P_r(\theta)_r - g_r] d\theta \\
\frac{\partial^2}{\partial b_r \partial g_r} \log L_1 &= \frac{\partial}{\partial b_r} \frac{1}{1-g_r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[r_r(\theta) - f_r(\theta)P_r(\theta)]}{P_r(\theta)} d\theta \\
&= \frac{Da_r}{(1-g_r)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_r(\theta)r_r(\theta)}{P_r(\theta)^2} [P_r(\theta)_r - g_r] d\theta
\end{aligned}$$

次に、対数尤度関数の事前分布部分の微分を求める。我々は参考文献[2]に従い、事前分布として以下を仮定している。

難易度パラメータ 正規分布

$$f_b(b_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \exp\left[-\frac{(b_r - \mu_b)^2}{2\sigma_b^2}\right]$$

識別力パラメータ 対数正規分布

$$f_a(a_r) = \frac{1}{a_r \sqrt{2\pi}\sigma_a} \exp\left[-\frac{(\log a_r - \mu_a)^2}{2\sigma_a^2}\right]$$

当て推量パラメータ β 分布

$$f_g(g_r) = \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{\alpha! \beta!} g_r^{\alpha-1} (1 - g_r)^{\beta-1}$$

これより、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_r} \log L_2 &= -\frac{b_r - \mu_b}{\sigma_b^2}, & \frac{\partial^2}{\partial b_r^2} \log L_2 &= -\frac{1}{\sigma_b^2} \\ \frac{\partial}{\partial a_r} \log L_2 &= -\frac{1}{a_r} - \frac{\log a_r - \mu_a}{a_r \sigma_a^2}, & \frac{\partial^2}{\partial a_r^2} \log L_2 &= \frac{1}{a_r^2} - \frac{1 - \log a_r + \mu_a}{a_r^2 \sigma_a^2} \\ \frac{\partial}{\partial g_r} \log L_2 &= \frac{\alpha - 1}{g_r} - \frac{\beta - 1}{1 - g_r}, & \frac{\partial^2}{\partial g_r^2} \log L_2 &= -\frac{\alpha - 1}{g_r^2} - \frac{\beta - 1}{(1 - g_r)^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial a_r \partial b_r} \log L_2 &= \frac{\partial^2}{\partial a_r \partial g_r} \log L_2 = \frac{\partial^2}{\partial b_r \partial g_r} \log L_2 = 0 \end{aligned}$$

対数尤度関数 $L = L_1 + L_2$ の微分は上に述べた 2 つの微分の和になる。特に、情報行列 \mathfrak{I} は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(3n \times 3n) &= - \begin{pmatrix} \partial^2 L / \partial \mathbf{b}^2 & \partial^2 L / \partial \mathbf{a} \partial \mathbf{b} & \partial^2 L / \partial \mathbf{g} \partial \mathbf{b} \\ \partial^2 L / \partial \mathbf{b} \partial \mathbf{a} & \partial^2 L / \partial \mathbf{a}^2 & \partial^2 L / \partial \mathbf{g} \partial \mathbf{a} \\ \partial^2 L / \partial \mathbf{b} \partial \mathbf{g} & \partial^2 L / \partial \mathbf{a} \partial \mathbf{g} & \partial^2 L / \partial \mathbf{g}^2 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \partial^2 L_1 / \partial \mathbf{b}^2 + \partial^2 L_2 / \partial \mathbf{b}^2 & \partial^2 L_1 / \partial \mathbf{a} \partial \mathbf{b} & \partial^2 L_1 / \partial \mathbf{g} \partial \mathbf{b} \\ \partial^2 L_1 / \partial \mathbf{b} \partial \mathbf{a} & \partial^2 L_1 / \partial \mathbf{a}^2 + \partial^2 L_2 / \partial \mathbf{a}^2 & \partial^2 L_1 / \partial \mathbf{g} \partial \mathbf{a} \\ \partial^2 L_1 / \partial \mathbf{b} \partial \mathbf{g} & \partial^2 L_1 / \partial \mathbf{a} \partial \mathbf{g} & \partial^2 L_1 / \partial \mathbf{g}^2 + \partial^2 L_2 / \partial \mathbf{g}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、各小行列は異なる問題では 2 階微分が 0 となるため、対角行列となる。

ニュートン・ラフソン法の反復の式は、

$$\begin{aligned} {}^t \mathbf{d} &= (b_1 \cdots b_n \ a_1 \cdots a_n \ g_1 \cdots g_n), \\ {}^t \mathbf{u} &= (\partial L / b_1 \cdots \partial L / b_n \ \partial L / a_1 \cdots \partial L / a_n \ \partial L / g_1 \cdots \partial L / g_n) \end{aligned}$$

として、次のように与えられる。

$$\mathbf{d}^{(m)} = \mathbf{d}^{(m-1)} + (\mathfrak{I}^{(m-1)})^{-1} \mathbf{u}^{(m-1)}$$

以上で EM アルゴリズムの手続きは終わりである。上の手続きをパラメータが収束するまで繰り返す。収束した値 $\hat{b}_r, \hat{a}_r, \hat{g}_r$ はパラメータの最尤推定値を与えるが、その分散は最終的な情報行列 \mathfrak{I} を用いて、以下のように与えられる。

$$\text{Var}[\hat{b}_r] = (\mathfrak{I}^{-1})_{r,r}, \quad \text{Var}[\hat{a}_r] = (\mathfrak{I}^{-1})_{n+r,n+r}, \quad \text{Var}[\hat{g}_r] = (\mathfrak{I}^{-1})_{2n+r,2n+r}$$

2.2 項目値が既知の場合の能力値の推定

前項では何も分からない状態から項目パラメータを推定した。ここでは、この推定され

た項目値から能力パラメータの値を推定する方法を考える。
 今、能力値 θ の受験者 i の結果 \mathbf{u}_i の実現確率を以下と仮定する。

$$P(\mathbf{u}_i | \theta) = \prod_{r=1}^n P_r(\theta)^{u_{ir}} Q_r(\theta)^{1-u_{ir}}$$

ベイズの定理を使うと θ の密度関数は以下となる。

$$P(\theta | \mathbf{u}_i) = \frac{P(\mathbf{u}_i | \theta) f(\theta)}{P(\mathbf{u}_i)}, \quad P(\mathbf{u}_i) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{u}_i | \theta) f(\theta) d\theta$$

項目値が既知であるので、分母の積分は定数となる。

尤度関数を以下のように定義すると、

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^N P(\mathbf{u}_i) P(\theta_i | \mathbf{u}_i) = \prod_{i=1}^N P(\mathbf{u}_i | \theta_i) f(\theta_i) \\ &= \prod_{i=1}^N \prod_{r=1}^n P_r(\theta_i)^{u_{ir}} Q_r(\theta_i)^{1-u_{ir}} \times f(\theta_i) \end{aligned}$$

対数尤度関数は以下となる。

$$\log L = \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^n [u_{ir} \log P_r(\theta_i) + (1-u_{ir}) \log Q_r(\theta_i)] + \sum_{i=1}^N \log f(\theta_i)$$

補遺の関係を使うと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log L &= D \sum_{r=1}^n \frac{a_r P_r^*(\theta_i) [u_{ir} - P_r(\theta_i)]}{P_r(\theta_i)} - \theta_i \\ &= D \sum_{r=1}^n \frac{a_r [P_r(\theta_i) - g_r] [u_{ir} - P_r(\theta_i)]}{(1-g_r) P_r(\theta_i)} - \theta_i \end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} \log L &= D^2 \sum_{r=1}^n \frac{a_r^2 P_r^*(\theta_i) Q_r^*(\theta_i)}{P_r(\theta_i)^2} [u_{ir} g_r - P_r(\theta_i)^2] - 1 \\ &= D^2 \sum_{r=1}^n \frac{a_r^2 [P_r(\theta_i) - g_r] Q_r(\theta_i)}{(1-g_r)^2 P_r(\theta_i)^2} [u_{ir} g_r - P_r(\theta_i)^2] - 1 \end{aligned}$$

ここでも他の受験者と独立の仮定より、情報行列の対角成分以外は 0 となる。

$$\mathfrak{I}(N \times N) = - \begin{pmatrix} \partial^2 \log L / \partial \theta_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \partial^2 \log L / \partial \theta_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \partial^2 \log L / \partial \theta_N^2 \end{pmatrix}$$

以上より、ニュートン・ラフソン法を用いて能力パラメータの推定ができる。

2.3 能力値が既知の場合の項目値の推定

この場合は以下のベイズの定理を利用する。

$$\begin{aligned} P(\mathbf{d} | \mathbf{u}_i, \theta_i) &= P(\mathbf{u}_i | \mathbf{d}, \theta_i) f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}) / G(\mathbf{u}_i | \theta_i) \\ &= \prod_{r=1}^n P_r(\theta_i)^{u_{ir}} Q_r(\theta_i)^{1-u_{ir}} f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}_r) \Big/ G(\mathbf{u}_i | \theta_i) \end{aligned}$$

ここに、

$$G(\mathbf{u}_i | \theta_i) = \int \cdots \int P(\mathbf{u}_i | \mathbf{d}, \theta_i) f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}) d\mathbf{d}$$

これを用いて、尤度関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^N \prod_{r=1}^n G(\mathbf{u}_i | \theta_i) P(\mathbf{d}_r | \mathbf{u}_i, \theta_i) = \prod_{i=1}^N \prod_{r=1}^n P(\mathbf{u}_i | \mathbf{d}_r, \theta_i) \times f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}_r) \\ &= \prod_{i=1}^N \prod_{r=1}^n P_r(\theta_i)^{u_{ir}} Q_r(\theta_i)^{1-u_{ir}} \times f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}_r) = L_1 \times L_2 \end{aligned}$$

これを用いると対数尤度関数は以下となる。

$$\log L = \log L_1 + \log L_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^n [u_{ir} \log P_r(\theta_i) + (1-u_{ir}) \log Q_r(\theta_i)] + \sum_{r=1}^n \log f_{\mathbf{d}}(\mathbf{d})$$

補遺で与えた関係式などから、以下を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_r} \log L_1 &= -D a_r (1-g_r) \sum_{i=1}^N [u_{ir} - P_r(\theta_i)] w_r(\theta_i) \\ \frac{\partial}{\partial a_r} \log L_1 &= D(1-g_r) \sum_{i=1}^N [u_{ir} - P_r(\theta_i)] (\theta_i - b_r) w_r(\theta_i) \\ \frac{\partial}{\partial g_r} \log L_1 &= \frac{1}{1-g_r} \sum_{i=1}^N \frac{[u_{ir} - P_r(\theta_i)]}{P_r(\theta_i)} \\ \frac{\partial^2}{\partial b_r^2} \log L_1 &= D(1-g_r) \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial b_r} [u_{ir} - P_r(\theta_i)] (\theta_i - b_r) w_r(\theta_i) \\ &= \frac{D^2 a_r^2}{(1-g_r)^2} \sum_{i=1}^N \frac{Q_r(\theta_i)}{P_r(\theta_i)^2} (P_r(\theta_i) - g_r) [u_{ir} g_r - P_r(\theta_i)^2] \\ \frac{\partial^2}{\partial a_r^2} \log L_1 &= D(1-g_r) \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial a_r} [u_{ir} - P_r(\theta_i)] (\theta_i - b_r) w_r(\theta_i) \\ &= \frac{D^2}{(1-g_r)^2} \sum_{i=1}^N \frac{Q_r(\theta_i)}{P_r(\theta_i)^2} (\theta_i - b_r)^2 (P_r(\theta_i) - g_r) [u_{ir} g_r - P_r(\theta_i)^2] \\ \frac{\partial^2}{\partial g_r^2} \log L_1 &= \frac{\partial}{\partial g_r} \left[\frac{1}{1-g_r} \sum_{i=1}^N \frac{[u_{ir} - P_r(\theta_i)]}{P_r(\theta_i)} \right] \\ &= \frac{1}{(1-g_r)^2} \sum_{i=1}^N \frac{[u_{ir} - P_r(\theta_i)] P_r(\theta_i) - u_{ir} Q_r(\theta_i)}{P_r(\theta_i)^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial b_r \partial a_r} \log L_1 &= D(1-g_r) \frac{\partial}{\partial b_r} \sum_{i=1}^N [u_{ir} - P_r(\theta_i)] (\theta_i - b_r) w_r(\theta_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{D}{(1-g_r)^2} \sum_{i=1}^N (P_r(\theta_i) - g_r) [(1-g_r)(u_{ir} - P_r(\theta_i)) \\
 &\quad + \frac{Da_r(\theta_i - b_r)Q_r(\theta_i)}{P_r(\theta_i)} \{(u_{ir} - P_r(\theta_i))P_r(\theta_i) - u_{ir}(P_r(\theta_i) - g_r)\}] \\
 \frac{\partial^2}{\partial a_r \partial g_r} \log L_1 &= \frac{\partial}{\partial a_r} \frac{1}{1-g_r} \sum_{i=1}^N \frac{[u_{ir} - P_r(\theta_i)]}{P_r(\theta_i)} \\
 &= -\frac{D}{(1-g_r)^2} \sum_{i=1}^N \frac{Q_r(\theta_i)u_{ir}}{P_r(\theta_i)^2} (\theta_i - b_r) [P_r(\theta_i) - g_r] \\
 \frac{\partial^2}{\partial b_r \partial g_r} \log L_1 &= \frac{\partial}{\partial b_r} \frac{1}{1-g_r} \sum_{i=1}^N \frac{[u_{ir} - P_r(\theta_i)]}{P_r(\theta_i)} = \frac{Da_r}{(1-g_r)^2} \sum_{i=1}^N \frac{Q_r(\theta_i)u_{ir}}{P_r(\theta_i)^2} [P_r(\theta_i) - g_r]
 \end{aligned}$$

2.4 項目値と能力値の相互変換

項目値と能力値が両方不明の場合、能力値を積分した周辺尤度関数を用いて項目値を推定したが、これを用いて与えた能力値から項目値を推定すると少し違いがある。この違いを修正しておかなければ、項目値と能力値の相互変換は成立しない。そのため、最初の1回目は周辺尤度関数を使って項目値と能力値を求め、後は、能力値から項目値、項目値から能力値と、値が収束するまでこれを繰り返す。この処理によって、相互変換可能な項目値と能力値が得られる。

3. プログラムの利用法

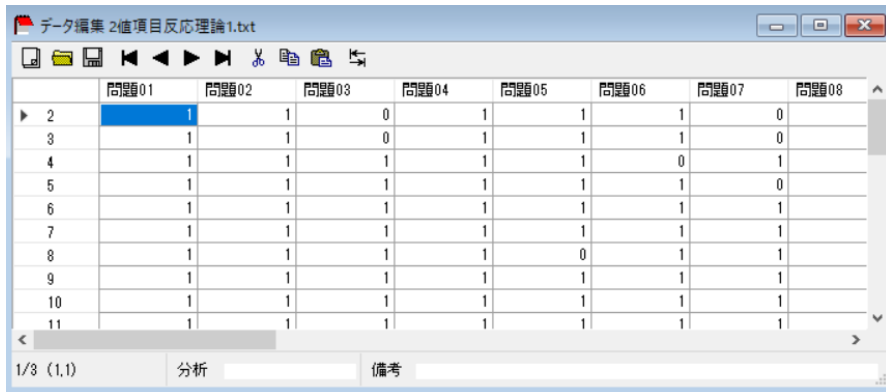
メニュー「分析→多変量解析他→教育関連手法→2値項目反応理論」を選択すると、図1に与えられる分析実行画面が表示される。

The screenshot shows a software window titled "多変量解析他" (Multivariate Analysis Other). Inside, the "2値項目反応理論" (2-Value Item Response Theory) section is active. Under "目的" (Purpose), "項目と能力両方の推定" (Estimation of both item and ability) is selected. Under "モデル" (Model), "1PL(Rasch)モデル" (1PL(Rasch) Model) is selected. There are input fields for "項目値" (Item Value) set to 2 and "能力値" (Ability Value) set to 3. A formula field contains the expression: $(e) * (1 - (e)) / (1 + \exp(-(D) * (a) * (x - (b))))$. The "事前分布(ベイズ推定法・EM)" (Prior Distribution (Bayesian Estimation Method・EM)) section includes input fields for difficulty (平均 0, 偏差 1), discrimination (平均 1.2, 偏差 0.2), and guessing (α 5, β 10). At the bottom, there are fields for "D値" (1) and "β分布の平均: 0.333 偏差: 0.118". Buttons for "変数選択", "表示選択", "リセット", "コピー", "特性曲線", and "選択特性曲線" are also visible.

図1 分析実行画面

社会システム分析のための統合化プログラム 3 9
 - 2 値項目反応理論 -

データは正解を 1、不正解を 0 とした図 2 のような形式である。



	問題01	問題02	問題03	問題04	問題05	問題06	問題07	問題08
2	1	1	0	1	1	1	1	0
3	1	1	0	1	1	1	1	0
4	1	1	1	1	1	1	0	1
5	1	1	1	1	1	1	1	0
6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	0	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1

図 2 データ (2 値項目反応理論 1.txt)

モデルは 1PL, 2PL, 3PL の 3 つのモデルから選択できる。ここでは 2PL モデルを元に説明を進める。

変数選択で問題 1 から問題 25 まで選択し、「項目値推定」のボタンをクリックすると項目反応理論の計算が実行され、推定された項目値の結果が図 3 のように表示される。



	困難度値	識別力値	当て推量値	困難度誤差	識別力誤差	当て推量誤	困難2.5%下	困難3.5%上	識別2.5%下	識別2.5%上
問題01	-2.217	1.296	0.000	0.542	0.202	0.000	-3.279	-1.154	0.901	1.691
問題02	-1.900	1.295	0.000	0.489	0.203	0.000	-2.858	-0.942	0.896	1.693
問題03	-1.107	1.238	0.000	0.384	0.195	0.000	-1.859	-0.355	0.856	1.621
問題04	-1.900	1.295	0.000	0.489	0.203	0.000	-2.858	-0.942	0.896	1.693
問題05	-1.445	1.269	0.000	0.423	0.200	0.000	-2.274	-0.617	0.877	1.662
問題06	-1.156	1.166	0.000	0.398	0.179	0.000	-1.937	-0.376	0.816	1.517
問題07	-0.349	1.133	0.000	0.334	0.174	0.000	-1.003	0.305	0.792	1.474
問題08	0.218	1.157	0.000	0.305	0.180	0.000	-0.380	0.815	0.805	1.509
問題09	-0.690	1.205	0.000	0.346	0.189	0.000	-1.369	-0.011	0.835	1.575

図 3 項目値の推定結果 (2PL モデル)

ここでは各パラメータの推定値の他に、推定の標準誤差と 2.5% の下限と上限も表示されている。ここで、2PL モデルであるので、当て推量パラメータ値は 0 に固定されており、標準誤差も 0 となっている。

続けて「能力値推定」ボタンをクリックすると、図 4 のような結果が表示される。



	能力値	能力誤差	5%下限	5%上限
2	-0.523	0.332	-1.175	0.128
3	-0.934	0.334	-1.589	-0.279
4	0.726	0.409	-0.076	1.528
5	0.553	0.391	-0.213	1.319
6	1.483	0.519	0.467	2.499
7	0.365	0.374	-0.368	1.098
8	-0.421	0.334	-1.075	0.234
9	0.553	0.391	-0.214	1.319
10	0.937	0.435	0.084	1.791

図 4 能力値の推定結果

この表示でも推定の標準誤差と 2.5% の下限と上限が表示される。ここで、「項目と能力両方

の推定」の場合、計算時間がかかることが予想されるため、「項目値の推定」ボタンでほとんどすべての処理を行う。そのため、他のボタンは結果の表示のみに使われ、まず「項目値の推定」で計算を行っていない場合、図 5 のようなエラーメッセージが表示される。

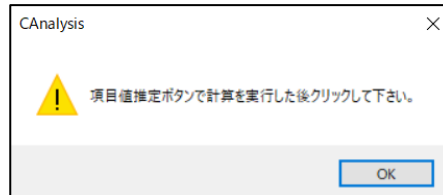


図 5 エラーメッセージ

図 3 と図 4 の計算結果は、1 回の最尤法の計算から求めたものではない。「項目と能力両方の推定」では、最初どちらのパラメータの値も求まっていないため、能力値については、事前分布を与え、積分して周辺分布を求めることで推定から除外し、項目値だけを求めている。その後、その項目値を使って能力値を求めている。そのため逆に、求めた能力値から項目値を推定しようとする、誤差が生じる。このプログラムでは「項目最適化」のチェックボックスを設け、それをチェックすることで、能力値から項目値、項目値から能力値を求めることを繰り返し、推定値を安定させるようにしている。但し、繰り返しの 2 回目以降は周辺分布を用いず、求めた能力値と項目値の暫定的な値を使っている。1 回目の周辺分布を使った推定の結果を見たい場合は、「項目最適化」チェックボックスのチェックを外すとよい。

「正解確率」ボタンも「項目値推定」ボタンをクリックしておくことが必要であるが、これは各問題と各人の能力値から問題の正解確率を計算し、表示するものである。実行結果は図 6 のようになる。

予想正解確率								
	能力値	問題01	問題02	問題03	問題04	問題05	問題06	問題07
▶ 2	-0.523	0.900	0.856	0.673	0.856	0.763	0.677	0.451
3	-0.934	0.841	0.777	0.554	0.777	0.657	0.565	0.340
4	0.726	0.978	0.968	0.906	0.968	0.940	0.900	0.772
5	0.553	0.973	0.960	0.887	0.960	0.927	0.880	0.735
6	1.483	0.992	0.988	0.961	0.988	0.976	0.956	0.889
7	0.365	0.966	0.949	0.861	0.949	0.909	0.855	0.692
8	-0.421	0.911	0.872	0.701	0.872	0.786	0.702	0.480
9	0.553	0.973	0.960	0.887	0.960	0.927	0.880	0.735
10	0.937	0.984	0.975	0.926	0.975	0.954	0.920	0.811

図 6 各人の各問題に対する正解確率

「選択特性曲線」ボタンは、「表示選択」ボタンの画面で選んだ変数について、特性曲線のグラフを表示するために、図 7 の 1 変数関数グラフ実行画面を表示する。ここでは、問題 1 と問題 20 を選択している。そのまま、「グラフ描画」ボタンをクリックすると、これらの問題についての特性曲線が図 8 のように表示される。

社会システム分析のための統合化プログラム 3 9
 - 2 値項目反応理論 -

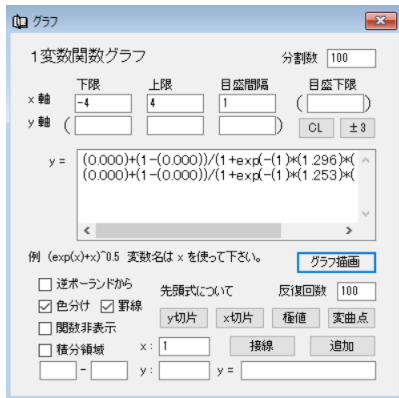


図 7 問題 1 と 20 のグラフ表示画面

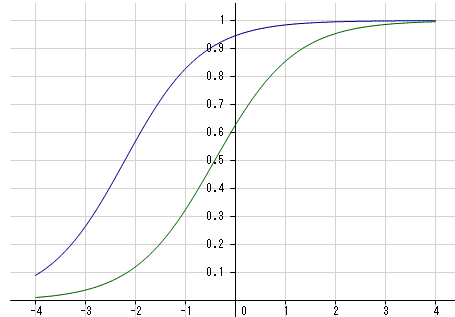


図 8 特性曲線

ここでは、2PL モデルを使っているため、グラフの値域は 0 から 1 の範囲となる。

利用者がパラメータを与えて特性曲線を描く場合は、「特性曲線」ボタンをクリックする。その際には図 9 のような 1 変数グラフ表示画面となる。

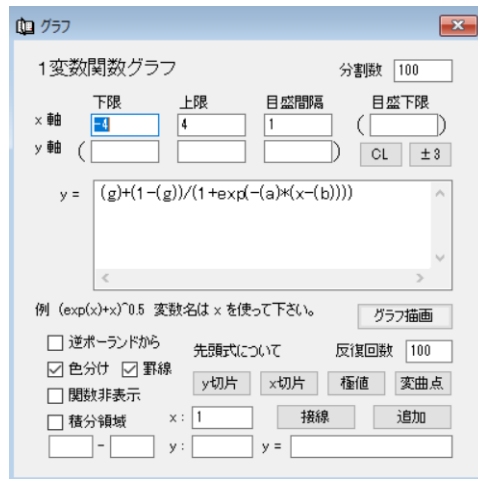


図 9 1 変数関数グラフ表示画面

この画面の中の、b, a, g の文字に数値を代入すると、それに応じた特性曲線が表示される。複数表示したい場合は、値を変えたものを、行を変えて追加して行く。前節の図 1 は、この機能を使って作ったグラフである。

次に項目値が与えられた問題からの、新しい受験者の能力値の推定の問題を考える。図 10 は、図 2 の問題 1 から問題 25 のデータから求めた項目値を保存した頁を示している。

	困難度値	識別力値	当て推量値	困難度誤差	識別力誤差	当て推量誤差
問題01	-2.217	1.296	0.000	0.542	0.202	0.000
問題02	-1.900	1.295	0.000	0.489	0.203	0.000
問題03	-1.107	1.238	0.000	0.384	0.195	0.000
問題04	-1.900	1.295	0.000	0.489	0.203	0.000
問題05	-1.445	1.269	0.000	0.423	0.200	0.000
問題06	-1.156	1.166	0.000	0.398	0.179	0.000
問題07	-0.349	1.133	0.000	0.334	0.174	0.000
問題08	0.218	1.157	0.000	0.305	0.180	0.000
問題09	-0.690	1.205	0.000	0.346	0.189	0.000

図 10 項目値データページ

この項目値の分かっているページの最初の 3 列のデータを使って、新しい受験者の能力値を求めてみよう。ここでは確認のため 37 番の受験者を新しい受験者に見立て、図 11 のように、問題 10 と問題 11 の正否を 1 から 0 に変えている。

	問題09	問題10	問題11	問題12	問題13	問題14	問題15	問題16
31	1	1	1	1	1	1	1	1
32	1	0	1	1	1	1	0	0
33	1	0	1	0	0	0	1	1
34	1	1	1	1	1	1	1	1
35	0	1	0	1	1	1	0	0
36	1	0	1	1	1	1	1	1
37	1	0	0	0	0	1	1	1

図 11 項目値データ頁と同じ問題での解答結果

「項目頁から能力の推定」チェックボックスにチェックを入れ、「項目値」テキストボックスに頁の番号を書き込み、「能力値推定」ボタンをクリックすると、図 12 のような結果が得られる。左が元々の推定結果で、右が 37 番を新しい受験者に見立てた能力値である。

	能力値	能力誤差	5%下限	5%上限
31	1.470	0.516	0.458	2.483
32	-1.131	0.340	-1.797	-0.466
33	-0.088	0.345	-0.763	0.588
34	0.530	0.389	-0.232	1.291
35	-0.157	0.342	-0.827	0.513
36	0.930	0.434	0.078	1.781
37	0.193	0.361	-0.514	0.900

	能力値	能力誤差	5%下限	5%上限
31	1.470	0.516	0.458	2.483
32	-1.131	0.340	-1.797	-0.466
33	-0.088	0.345	-0.763	0.588
34	0.530	0.389	-0.232	1.291
35	-0.157	0.342	-0.827	0.513
36	0.930	0.434	0.078	1.781
37	-0.092	0.345	-0.767	0.584

図 12 項目頁からの能力値の推定結果の変化

他の受験者の能力は変わっていないが（繰り込み誤差のため多少変化することもある）、37 番の能力値は、正解を不正解にしたため、下がっていることが分かる。このように項目値が分かっている問題からの能力値の結果は整合性の取れた結果となる。

同様にして、能力値の分かっている受験者からの、新しい問題の項目値の推定の問題を

社会システム分析のための統合化プログラム 3 9
 - 2 値項目反応理論 -

考える。図 13 はこのデータの問題 1 から問題 25 より求めた能力値を保存した頁を示している。先ほどの 37 番のデータの変更は元に戻している。

	能力値	能力誤差	5%下限	5%上限
2	-0.523	0.332	-1.175	0.128
3	-0.934	0.334	-1.589	-0.279
4	0.726	0.409	-0.076	1.528
5	0.553	0.391	-0.213	1.319
6	1.483	0.519	0.467	2.499
7	0.365	0.374	-0.368	1.098
8	-0.421	0.334	-1.075	0.234
9	0.553	0.391	-0.214	1.319
10	0.937	0.435	0.084	1.791

3/3 (1,1) 分析 備考

図 13 能力値データページ

この能力値の分かっている頁の 1 列目のデータを使って、今度はすべての問題を選択し、以前の結果と比較してみよう。データは図 14 のように、問題 26 が 1 つ追加されている。

	問題21	問題22	問題23	問題24	問題25	問題26
2	0	1	1	1	0	1
3	0	0	1	0	0	0
4	1	0	1	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1
7	1	0	1	1	1	1
8	1	0	1	1	1	0
9	1	1	1	0	1	1

1/3 (1,26) 分析 備考 問題26を別に考えること。能力値を見る場

図 14 能力値の分かっている場合の問題追加

「能力頁から項目の推定」チェックボックスにチェックを入れ、「能力値」テキストボックスに頁の番号を書き込み、「項目値推定」ボタンをクリックすると、図 15 のような結果が得られる。左が元の結果、右が問題 26 を追加した場合の結果である。

	困難度値	識別力値	当て推量値
問題20	-0.417	1.253	0.000
問題21	-0.538	1.254	0.000
問題22	0.738	1.248	0.000
問題23	-0.869	1.134	0.000
問題24	-1.000	1.162	0.000
問題25	0.222	1.184	0.000
問題26	-0.454	1.168	0.000

図 15 能力頁からの項目値の推定結果の変化

元々の問題の値は変わっていないが（繰り込み誤差のため多少変化している）、新しい問題の値が求まっている。

この分析の本質は、項目値から能力値を求める場合、同じ受験結果の受験者の能力値は

他の受験者と独立に不変であり、能力値から項目値を求める場合、同じ受験結果の問題の項目値は他の問題とは独立に不変であることである。この独立性により、異なった問題でも同じ評価基準で能力を評価できることになる。

最後に少しデータを変えて実験してみる。図 16 に元の難易度データとそれから求めた能力値を示す。

Figure 16 consists of two screenshots of a software application. The left screenshot shows a window titled 'データ編集 2値項目反応理論1.txt' with a table of item difficulty data. The right screenshot shows the same data with calculated ability values and 5% confidence intervals.

項目	困難度値	識別力値	当て推量値	困難度誤差
問題07	-0.349	1.133	0.000	0.334
問題08	0.218	1.157	0.000	0.305
問題09	-0.690	1.205	0.000	0.346
問題10	-0.102	1.179	0.000	0.312
問題11	0.101	1.115	0.000	0.316
問題12	-0.112	1.147	0.000	0.318

項目	能力値	能力誤差	5%下限	5%上限
2	-0.523	0.332	-1.175	0.128
3	-0.934	0.334	-1.589	-0.279
4	0.726	0.409	-0.076	1.528
5	0.553	0.391	-0.213	1.319
6	1.483	0.519	0.467	2.499
7	0.365	0.374	-0.368	1.098
8	-0.421	0.334	-1.075	0.234

図 16 元の難易度データと能力値

この難易度に対して問題 10 の値を-1 に変えて、易しい判定の問題にしてみた。それに対する能力値の推定結果が図 17 である。

Figure 17 consists of two screenshots of a software application. The left screenshot shows the difficulty data with item 10's difficulty set to -1. The right screenshot shows the resulting ability values, which are generally lower than in Figure 16.

項目	困難度値	識別力値	当て推量値	困難度誤差
問題07	-0.349	1.133	0.000	0.334
問題08	0.218	1.157	0.000	0.305
問題09	-0.690	1.205	0.000	0.346
問題10	-1	1.179	0.000	0.312
問題11	0.101	1.115	0.000	0.316
問題12	-0.112	1.147	0.000	0.318

項目	能力値	能力誤差	5%下限	5%上限
2	-0.557	0.332	-1.208	0.094
3	-0.966	0.333	-1.620	-0.312
4	0.694	0.410	-0.110	1.499
5	0.521	0.392	-0.247	1.289
6	1.456	0.521	0.436	2.477
7	0.332	0.374	-0.402	1.066
8	-0.455	0.334	-1.109	0.199
9	0.520	0.392	-0.248	1.288
10	0.907	0.437	0.051	1.762
11	1.793	0.582	0.653	2.934

図 17 問題 10 を易しい判定の問題に変えたデータと能力値

さらに、元の難易度に対して問題 10 の値を 1 に変えて、難しい判定の問題にしてみた。それに対する能力値の推定結果が図 18 である。

Figure 18 consists of two screenshots of a software application. The left screenshot shows the difficulty data with item 10's difficulty set to 1. The right screenshot shows the resulting ability values, which are generally higher than in Figure 17.

項目	困難度値	識別力値	当て推量値	困難度誤差
問題07	-0.349	1.133	0.000	0.334
問題08	0.218	1.157	0.000	0.305
問題09	-0.690	1.205	0.000	0.346
問題10	1	1.179	0.000	0.312
問題11	0.101	1.115	0.000	0.316
問題12	-0.112	1.147	0.000	0.318

項目	能力値	能力誤差	5%下限	5%上限
2	-0.492	0.336	-1.150	0.166
3	-0.910	0.337	-1.570	-0.250
4	0.787	0.414	-0.024	1.598
5	0.610	0.396	-0.165	1.386
6	1.554	0.519	0.536	2.571
7	0.417	0.379	-0.325	1.159
8	-0.387	0.337	-1.049	0.274
9	0.610	0.396	-0.166	1.385
10	1.002	0.439	0.142	1.863
11	1.887	0.577	0.756	3.018

図 18 問題 10 を難しい判定の問題に変えたデータと能力値

図 17 の能力値は全体的に下がり、図 18 の能力値は全体的に上がっている。問題の難易度によって、推定される能力値は変化する。

4. おわりに

項目反応理論は一般的な統計分析の手法とは考え方を異にしている。一般には計算された確率等は基本的にプログラムが違っても同じ値を与える。しかし、項目反応理論では 1 章で述べた変換によって問題の正解確率が変わらないため、プログラムによって様々なパラメータの推定値が得られる。例えばこのプログラムでも、実行画面の下部で与えられる事前分布の設定によって推定値は変化する。そのため、同一尺度で結果を得たい場合は、事前分布のパラメータは変えることができない。

項目反応理論の試験への適用においては、難易度等の項目値の分かっている問題のプールが不可欠である。多くの問題をプールしておいて、それらの中から必要な問題を選び、試験を作成する。新しい問題については等化の手法^[4]を使ってプールに追加して行く。我々も模擬データを使って、共通項目法で新しい問題のプールを試みてみた。結果はプールされた値と等化による推測値の値の一致性はある程度確認されたが、多くのテストデータで比較検討しなければ評価は難しい。これについては別の論文で議論することにする。

参考文献

- [1] 共用試験事後評価解析委員会 試験信頼性向上専門部会,
 項目反応理論についての説明書(学生版) Ver1.1,
http://www.med.oita-u.ac.jp/mededuc/cbt/riron_about.pdf (2020.9 参照)
- [2] 豊田秀樹、「項目反応理論 [理論編]」、朝倉書店 (2005)
- [3] 村木英治、「項目反応理論」、朝倉書店 (2011)
- [4] 豊田秀樹、「項目反応理論 [入門編]【第 2 版】」、朝倉書店 (2012)

補遺 計算に利用する関係

ここでは、2 値項目反応理論の計算に用いられた関係式をまとめておく。

$$P(\theta | \mathbf{u}_i) = \frac{P(\mathbf{u}_i | \theta) f(\theta)}{P(\mathbf{u}_i)} = \frac{P(\mathbf{u}_i | \theta) f(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{u}_i | \theta) f(\theta) d\theta},$$

$$P(\mathbf{u}_i | \theta) = \prod_{r=1}^n P_r(\theta)^{u_{ir}} Q_r(\theta)^{1-u_{ir}}$$

$$w_r(\theta) = \frac{P_r^*(\theta) Q_r^*(\theta)}{P_r(\theta) Q_r(\theta)} = \frac{P_r(\theta) - g_r}{(1 - g_r)^2 P_r(\theta)}, \quad f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\theta^2/2)$$

$$P_r(\theta) = g_r + \frac{1 - g_r}{1 + \exp[-a_r(\theta - b_r)]},$$

$$P_r^*(\theta) = \frac{1}{1 + \exp[-a_r(\theta - b_r)]} = \frac{P_r(\theta) - g_r}{1 - g_r}$$

$$Q_r(\theta) = 1 - P_r(\theta), \quad Q_r^*(\theta) = \frac{Q_r(\theta)}{1 - g_r} = \frac{1 - P_r(\theta)}{1 - g_r}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a_r} P_r(\theta) &= \frac{(\theta - b_r)[P_r(\theta) - g_r]Q_r(\theta)}{1 - g_r}, & \frac{\partial}{\partial b_r} P_r(\theta) &= -\frac{a_r[P_r(\theta) - g_r]Q_r(\theta)}{1 - g_r} \\
 \frac{\partial}{\partial g_r} P_r(\theta) &= Q_r^*(\theta) = \frac{Q_r(\theta)}{1 - g_r} \\
 \frac{\partial}{\partial a_r} w_r(\theta) &= \frac{(\theta - b_r)g_r Q_r(\theta)}{(1 - g_r)P_r(\theta)} w_r(\theta), & \frac{\partial}{\partial b_r} w_r(\theta) &= -\frac{a_r g_r Q_r(\theta)}{(1 - g_r)P_r(\theta)} w_r(\theta) \\
 \frac{\partial}{\partial g_r} w_r(\theta) &= -\frac{Q_r(\theta) - P_r(\theta)}{P_r^*(\theta)} w_r(\theta)^2 = -\frac{(1 - g_r)[Q_r(\theta) - P_r(\theta)]}{P_r(\theta) - g_r} w_r(\theta)^2 \\
 \frac{\partial}{\partial \theta_i} P_r(\theta_i) &= (1 - g_r)a_r P_r^*(\theta_i) Q_r^*(\theta_i) = \frac{a_r[P_r(\theta_i) - g_r]Q_r(\theta_i)}{1 - g_r} \\
 \frac{\partial}{\partial \theta_i} Q_r(\theta_i) &= -(1 - g_r)a_r P_r^*(\theta_i) Q_r^*(\theta_i) = -\frac{a_r[P_r(\theta_i) - g_r]Q_r(\theta_i)}{1 - g_r}
 \end{aligned}$$

Multi-purpose Program for Social System Analysis 39

- Binary Data Item Response Theory -

Masayasu FUKUI ^{*1}, Yukie OKUDA ^{*2} and Mitsuhiro HOSOKAWA ^{*2}

**1 Department of Business Administration, Faculty of Business Administration,
Fukuyama Heisei University*

**2 Education Center, Fukuyama Heisei University*

Abstract: We have been constructing a unified program on the social system analysis for purpose of education. This time, we added a program on binary data item response theory which has been used in the field of education. The program of this method is not up to date, but it is important for our system because of the uniqueness and possibility. We believe that this program will be the foundation of future development.

Key Words: item response theory, IRT, test theory, College Analysis