福山平成大学経営学部紀要
第 18 号（2022），37－55 頁

社会システム分析のための統合化プログラム４０ －ナッシュ均衡ツール－

福井 正康[*1]・細川 光浩[*2]・奥田 由紀恵[*2]

[*1] 福山平成大学経営学部経営学科
[*2] 福山平成大学大学教育センター

要旨：著者らは経営学などでも使われるゲーム理論のプログラムを College Analysis に組み込んだ。今回はゼロ和 2 人ゲームと非協力非ゼロ和 2 人ゲームの純粋戦略問題と混合戦略問題を扱った。その際、解の表示形式を表やグラフなど 4 種類で表し、教育的な配慮を行っている。特に、均衡解の意味が分かるような解の表示に特徴がある。

キーワード：College Analysis、ナッシュ均衡、ゲーム理論、OR

1. はじめに

経営分野でよく利用される OR の手法にゲーム理論がある。ゲーム理論は、大きく分けてゼロ和ゲームと非ゼロ和ゲームに分類され、非ゼロ和ゲームの中に非協力ゲームと協力ゲームがある[1],[2]。今回プログラム化したものは、ゼロ和 2 人ゲームと非ゼロ和 2 人非協力ゲームである。それぞれ１回の打ち手で均衡解が得られる純粋戦略の解と、１回では均衡解が得られず、無限回の確率的な打ち手で均衡解が得られる混合戦略の解がある。ここで述べる均衡解とは、互いに相手の戦略が変化しないとした場合、自分の戦略を変える動機が生じない場合をいう。すなわち相手の戦略を所与とした場合、互いに最良の選択をしている場合のことをいう。

ここではゲームの利得が有限な行列の形で与えられる問題を考える。ゼロ和ゲームの場合は１つの行列でプレイヤー１の利得とプレイヤー２の損失を表すことが多く、非ゼロ和ゲームの場合は２つの行列で、それぞれのプレイヤーの利得を表すことが多い。ここではそれぞれのプレイヤーについて利得行列か損失行列かを選択できるようにしている。

このプログラムでは解を３つの方法で求めている。１つ目は純粋戦略の方法、2 つ目は微分を使った方法、３つ目は線形計画法である。微分を使った方法については補遺で述べる。また、線形計画法は混合戦略ゼロ和２人ゲームの解法である。

最初に､最もよく知られた 2×2 の利得行列の問題を使ってプログラムの簡単な使い方を説明し、その後、一般の行列の２人ゼロ和ゲーム、非協力２人非ゼロ和ゲームの場合に進む。

2.　2×2 行列のゲーム

C.Analysis のメニュー［分析－ＯＲ－ナッシュ均衡ツール］を選択すると、図 1 に示す分析実行画面が表示される。

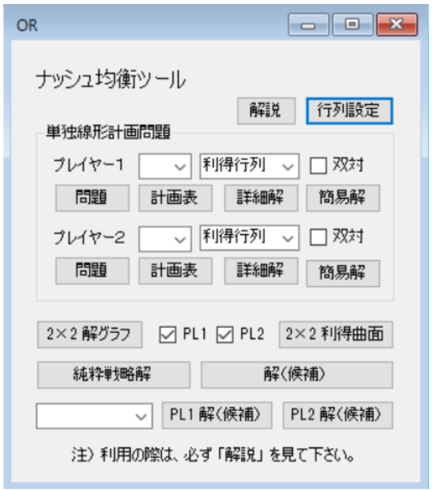


図 1　分析実行画面

データの利得・損失行列は図 2 のように、C.Analysis のメニュー［分析－数学－行列計算］の書式で表す。ここではまず 2×2 行列の例を示す。

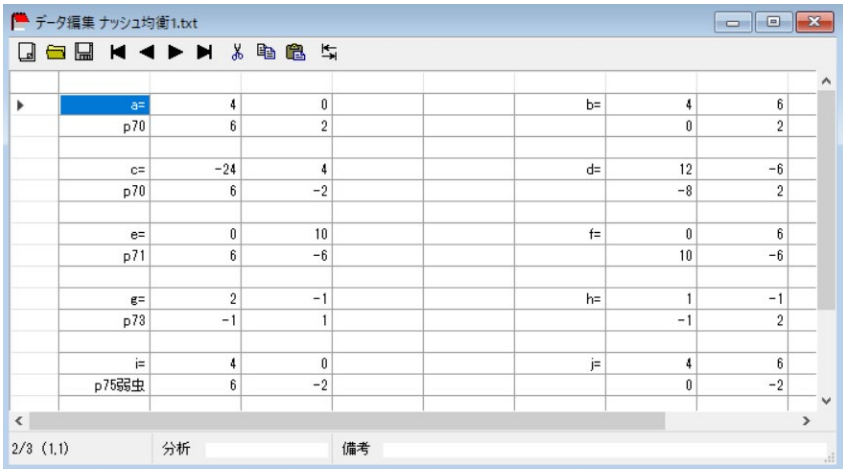


図 2　ナッシュ均衡のデータ形式（ナッシュ均衡 1.txt, 2 頁目）

行列は左上に「行列名=」を付けて、その右から下にかけて具体的な行列データを入力する。行列では、行がプレイヤー１の戦略、列がプレイヤー２の戦略である。行列と行列の間は、１行１列以上空ける必要がある。また、行列名の下の部分は検索しないので、コメントを加えることができる。

プログラムを動作させるには、まず分析実行画面右上の「行列設定」ボタンをクリック

する。その際、図 3 のように、「単独線形計画問題」グループボックス内の「プレイヤー１」と「プレイヤー２」ラベルの横に行列の候補が表示され、その右のコンボボックスで利得行列か損失行列かが選択できるようになる。

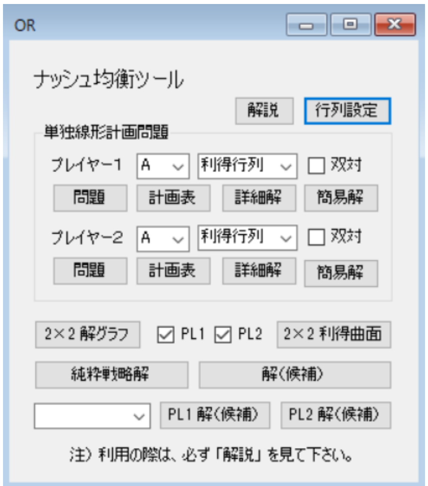


図 3　利得・損失行列の設定

例１　プレイヤー１：利得行列 a，プレイヤー２：利得行列 b

図 2 において、プレイヤー１の利得行列を a、プレイヤー２の利得行列を b として、「解（候補）」のボタンをクリックしてみる。ここで、「解（候補）」となっているのは、戦略数が多いときには完全な解を表示するとは限らないからであるが、これについては後に述べる。この問題は囚人のジレンマとしてよく知られた問題である。結果を図 4 に示す。

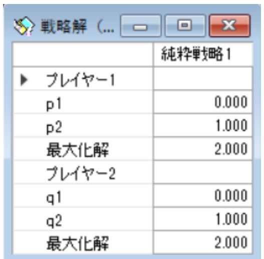
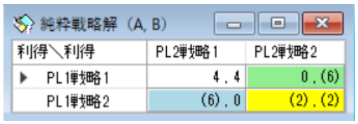


図 4　解（候補）

これは、プレイヤー１の戦略 1 の選択確率 p1 が 0、戦略２の選択確率 p2 が 1 で最大利得が 2、プレイヤー２の戦略 1 の選択確率 q1 が 0、戦略２の選択確率 q2 が 1 で最大利得が 2 であることを示しており、純粋戦略の解である。

この解を別の形で表してみる。分析実行画面の「純粋戦略解」をクリックすると、図 5 のような結果が得られる。



利得＼利得	PL2戦略1	PL2戦略2
PL1戦略1	4 , 4	0 , (6)
PL1戦略2	(6) , 0	(2) , (2)

図 5　純粋戦略解

これは練習問題などでよく見られる形式で、相手の戦略に応じた最適解の利得が「(6)」などのように、選択される可能性のある利得が括弧で囲まれて表示される。またプレイヤー1の最適解は青色、プレイヤー２の最適解は緑色、双方の最適解、即ち均衡解は黄色で示されている。

同じくもう１つの表し方を見てみよう。分析実行画面の「2×2 解グラフ」ボタンをクリックすると、図 6 のようなグラフが表示される。

図 6　2×2 解グラフ

これは横軸が p1、縦軸が q1 を表し、青い線と緑の線の交わるところ p1=0, q1=0 が均衡解である。図 4 で見たように、解は p1=0, q1=0 であるが、図 5 の戦略で見ると、双方とも戦略２が最善戦略であり、同じ結果を示している。この線の引き方については、よく知られているが、補遺１に改めて説明しておく。

次にプレイヤー１とプレイヤー２の利得（損失）曲面を表示してみよう。分析実行画面の「2×2 利得曲面」ボタンをクリックすると図 7 左のような「２変数関数グラフ」の実行画面が表示され、そのまま「グラフ描画」ボタンをクリックすると図 7 右のような 3 次元グラフが表示される。ここで、グラフの色は「標準色」チェックボックスのチェックを外し、後で設定したものである。また、赤い丸は場所を分かり易くするために後から付け加えたものである。

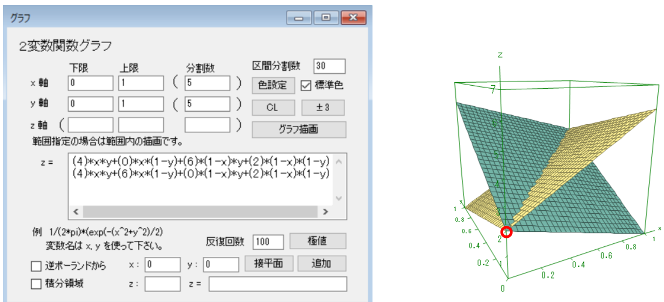
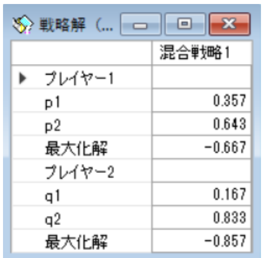


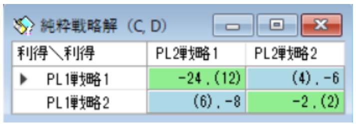
図 7　2×2 利得曲面

解は、双方とも最良の選択であるので、プレイヤー１では x 軸方向に解を移動させると利得は下がる解として p_1=x=0 が選ばれ、プレイヤー２では y 軸方向に解を移動させると利得が下がる解として p_2=y=0 が選ばれる。x=0, y=0 が図６の２本の直線であり、交点が均衡解である。

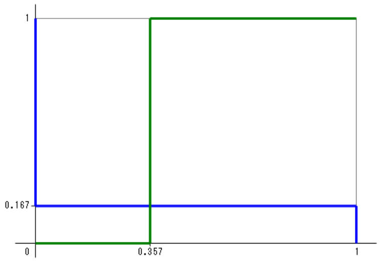
例２　プレイヤー１：利得行列 c，プレイヤー２：利得行列 d


戦略解（...

	混合戦略1
プレイヤー1	
p1	0.357
p2	0.643
最大化解	-0.667
プレイヤー2	
q1	0.167
q2	0.833
最大化解	-0.857


純粋戦略解（C, D）

利得＼利得	PL2戦略1	PL2戦略2
PL1戦略1	-24 , (12)	(4) , -6
PL1戦略2	(6) , -8	-2 , (2)



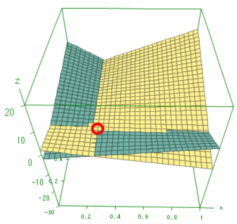


図８　混合戦略の解だけを持つ例

これは混合戦略の解だけを持つ例であり、純粋戦略の解は存在しない。それぞれのプレイヤーは相手が値を変更しない限り、自分が値を変更しても利得は不変である。この解は線形計画法を使っても求めることができる。２つのゼロ和２人ゲームの双対価格が相手方の解である。

例３　プレイヤー１：利得行列 e，プレイヤー２：利得行列 f


戦略解（E, F）

	純粋戦略1	純粋戦略2	混合戦略1
プレイヤー1			
p1	1.000	0.000	0.727
p2	0.000	1.000	0.273
最大化解	10.000	6.000	2.727
プレイヤー2			
q1	0.000	1.000	0.727
q2	1.000	0.000	0.273
最大化解	6.000	10.000	2.727


純粋戦略解（E, F）

利得＼利得	PL2戦略1	PL2戦略2
PL1戦略1	0 , 0	(10) , (6)
PL1戦略2	(6) , (10)	-6 , -6

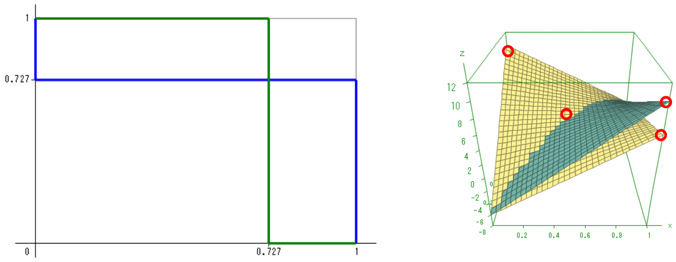


図 9　純粋戦略と混合戦略の解を持つ例 1

これは純粋戦略の解と混合戦略の解、両方を持つ例である。この解は、線形計画法を使っても求めることができる。

例 4　プレイヤー1：利得行列 i，プレイヤー2：利得行列 j

戦略解 (I, J)

	純粋戦略1	純粋戦略2	混合戦略1
プレイヤー1			
p1	1.000	0.000	0.500
p2	0.000	1.000	0.500
最大化解	0.000	6.000	2.000
プレイヤー2			
q1	0.000	1.000	0.500
q2	1.000	0.000	0.500
最大化解	6.000	0.000	2.000

純粋戦略解 (I, J)

利得＼利得	PL2戦略1	PL2戦略2
PL1戦略1	4，4	(0)，(6)
PL1戦略2	(6)，(0)	-2，-2

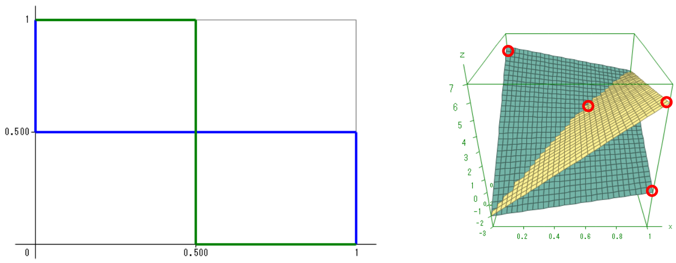


図 10　純粋戦略と混合戦略の解を持つ例 2

これも純粋戦略の解と混合戦略の解、両方を持つ例である。この解は、線形計画法を使っては求めることができない。

3.　一般の行列のゼロ和 2 人ゲーム

一般の利得・損失行列の場合は図 1 の行列の例を用いて説明する。

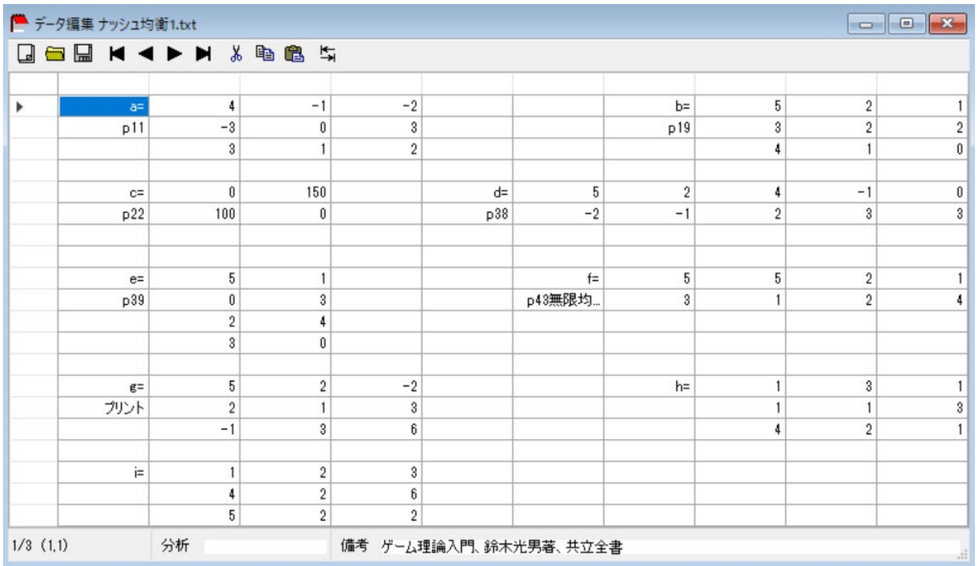


図１　ナッシュ均衡のデータ形式（ナッシュ均衡 1. txt，１頁目）

ゼロ和２人ゲームの純粋戦略の解は、マクシミン戦略とミニマックス戦略を用いても与えられることが知られているが、プログラムでは相手の戦略に対して最良の戦略を取るという考えで求めている。また混合戦略の解は微分を使う方法で求めている。但し、これらの解は単一ではないので注意が必要である。

ここで、プレイヤー１の利得行列を a として、純粋戦略ゼロ和２人ゲームの問題を解いてみよう。まず、図２のように、プレイヤー１の行列を a として利得行列に、プレイヤー２の行列を同じく a として損失行列に設定する。

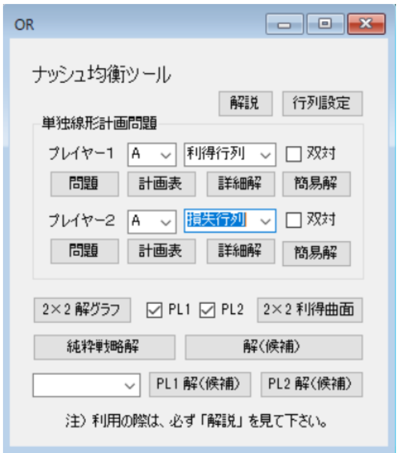
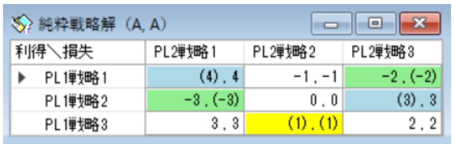


図２　実行画面の設定

その後「純粋戦略解」のボタンをクリックすると、図３のような解が表示される。



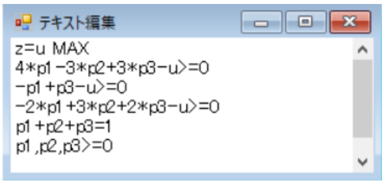
純粋戦略解 (A, A)

利得＼損失	PL2戦略1	PL2戦略2	PL2戦略3
PL1戦略1	(4),4	-1,-1	-2,(-2)
PL1戦略2	-3,(-3)	0,0	(3),3
PL1戦略3	3,3	(1),(1)	2,2

図 3　純粋戦略解

これは、相手が戦略 1，2，3 を取る場合、自分にとってどの戦略が最適かということを考えて求めた図である。結果の見方は 2×2 行列のときと同じである。黄色の部分が純粋戦略の解であるが、一般に 1 か所になるとは限らない。

次に線形計画法を使ってこの問題を解いてみよう。まず、プレイヤー 1 の行列を a にし、利得行列に設定する。設定はこれだけでよい。プレイヤー 1 の「問題」ボタンをクリックすると、図 4 のような線形計画問題の式が表示される。



テキスト編集

```
z=u MAX
4*p1-3*p2+3*p3-u>=0
-p1+p3-u>=0
-2*p1+3*p2+2*p3-u>=0
p1+p2+p3=1
p1,p2,p3>=0
```

図 4　線形計画問題

これは C.Analysis の線形計画法（OR）のテキストエディタでの入力形式で、以下のような問題を表したものである[3]。

目的関数　$z = u$　最大化

制約条件

$$4p_1 - 3p_2 + 3p_3 \geq u$$

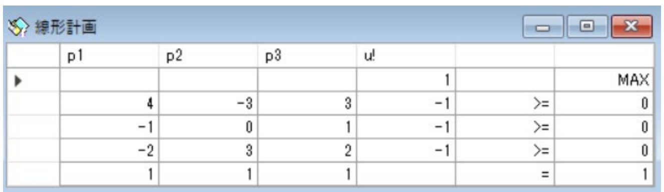
$$-p_1 + p_3 \geq u$$

$$-2p_1 + 3p_2 + 2p_3 \geq u$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

この問題は、プレイヤー 2 が 3 つの戦略を選択したとき、プレイヤー 1 の利得の期待値がある数 u より大きいとして、その数 u を最大化する問題である。これを線形計画表として表示するには、「計画表」ボタンをクリックする。結果は図 5 のようになる。



線形計画

p1	p2	p3	u		
			1		MAX
4	-3	3	-1	>=	0
-1	0	1	-1	>=	0
-2	3	2	-1	>=	0
1	1	1		=	1

図 5　線形計画表

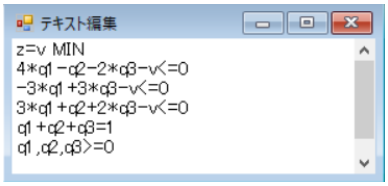
これは、C.Analysis の線形計画法（OR）のグリッドエディタでの入力形式である。この解は、「詳細解」をクリックすると図 6 のように与えられる。


LP 最適解

	STEP数	最大値(Z)	
▶	7	1.000	
変数	値	被約費用	
p1	0.000	2.000	
p2	0.000	1.000	
p3	1.000	0.000	
u_1	1.000	0.000	
u_2	0.000	0.000	
行	スラック	双対価格	
1	2.000	0.000	
2	0.000	1.000	
3	1.000	0.000	
4	0.000	1.000	
係数範囲			
変数	現在値	減少下限	増加上限

図６　線形計画問題の詳細解

ここでは、解（プレイヤー１の確率）は黄色、双対価格（プレイヤー２の確率）はオレンジ色、目的関数値（ゲームの値または最終的な期待利得）はピンクに色付けられている。双対価格がプレイヤー２の確率になるのは、双対問題がプレイヤー２から見た損失行列の最小化問題になるからである。実際、分析実行画面でプレイヤー１の右端の「双対」チェックボックスにチェックを入れ、「問題」ボタンをクリックした結果が図７である。

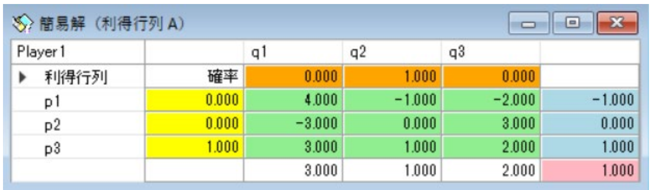

テキスト編集

```
z=v MIN
4*q1 -q2-2*q3-v<=0
-3*q1 +3*q3-v<=0
3*q1 +q2+2*q3-v<=0
q1 +q2+q3=1
q1 ,q2,q3>=0
```

図７　プレイヤー１の線形計画問題の双対問題

この双対問題はプレイヤー２の損失の最小化問題である。

図６の結果表示は線形計画問題としては十分な表示であるが、均衡問題の解の表示法としては見易いとはいえない。そのため均衡問題に適した表示法も用意してある。「簡易解」ボタンをクリックすると、図８のような形式の解が得られる。


簡易解（利得行列 A）

Player1		q1	q2	q3	
▶ 利得行列	確率	0.000	1.000	0.000	
p1	0.000	4.000	-1.000	-2.000	-1.000
p2	0.000	-3.000	0.000	3.000	0.000
p3	1.000	3.000	1.000	2.000	1.000
		3.000	1.000	2.000	1.000

図８　均衡問題の簡易解

黄色、オレンジ色、ピンクは詳細解に準じている。右端の青色の部分は、プレイヤー2 を所与として、プレイヤー１がその戦略を選んだ場合の利得の期待値を表している。そのため、プレイヤー１は利得の期待値が最も大きい戦略３を確率１で選んでいるということになる。逆にこれを縦に見ると、相手も損失の期待値が最も小さい戦略２を確率１で選んでいることになる。

次に混合戦略の問題を考えてみよう。行列 d を利得行列として選んだ簡易解は図９のよ

うになる。

簡易解（利得行列 D）

Player 1		q1	q2	q3	q4	q5	
利得行列	確率	0.000	0.571	0.000	0.429	0.000	
p1	0.571	5.000	2.000	4.000	-1.000	0.000	0.714
p2	0.429	-2.000	-1.000	2.000	3.000	3.000	0.714
		2.000	0.714	3.143	0.714	1.286	0.714

図 9　利得行列 d の混合戦略解

これを見ると、プレイヤー１の２つの戦略に対して、利得の期待値は同じ 0.714 の値をとっている。これは確率を変えても期待値が変わらないことを示しており、自分の解を変える動機がないという均衡の考え方をよく表している。また、プレイヤー２にとっても戦略２と戦略４は最も損失の小さい同じ 0.714 の値をとっており、解を変える動機が存在しない。

混合戦略の解も唯一とは限らない。その例を示しておく。行列 f を利得行列として選んだ線形計画問題の簡易解を図 10a に与え、その双対問題の簡易解を図 10b に与える。

簡易解（利得行列 F）

Player 1		q1	q2	q3	q4	
利得行列	確率	0.000	0.000	1.000	0.000	
p1	0.667	5.000	5.000	2.000	1.000	2.000
p2	0.333	3.000	1.000	2.000	4.000	2.000
		4.333	3.667	2.000	2.000	2.000

図 10a　利得行列 f の解

簡易解（利得行列 F）

Player 1		q1	q2	q3	q4	
利得行列	確率	0.000	0.000	1.000	0.000	
p1	0.250	5.000	5.000	2.000	1.000	2.000
p2	0.750	3.000	1.000	2.000	4.000	2.000
		3.500	2.000	2.000	3.250	2.000

図 10b　利得行列 f の双対問題を解いた解

通常、主問題の解は双対問題の双対価格になっているが、この場合結果が異なっている。これは解が１つではなく、２つの解を結ぶ線分上の値も解であるためである。

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.667\times\alpha+0.250\times(1-\alpha) \\ p_2 &= 0.333\times\alpha+0.750\times(1-\alpha) \end{aligned} \qquad (0\le\alpha\le1)$$

このプログラムでは解が網羅できるわけではないことに気を付けてもらいたい。

次にこれを２つの行列に分けてやってみよう。プレイヤー１は利得行列として f、プレイヤー2 は損失行列として f をとり、「解（候補)」ボタンをクリックすると図 11 のような結果を得る。

戦略解 (F, F)

	混合戦略1	混合戦略2
プレイヤー1		
p1	0.667	0.250
p2	0.333	0.750
最大化解	2.000	2.000
プレイヤー2		
q1	0.000	0.000
q2	0.000	0.000
q3	1.000	1.000
q4	0.000	0.000
最小化解	2.000	2.000

図 11　微分の方法で求めた解

ここでも両端の解だけが求められている。

4.　一般の行列の非ゼロ和２人非協力ゲーム

非ゼロ和ゲームの場合、プレイヤー１とプレイヤー２で同じ行数と列数の行列を２つ選択する。これらに利得行列か損失行列かを設定し、「解（候補）」のボタンをクリックする。解はまず、純粋戦略の場合から調べて行く。

純粋戦略の場合、相手が戦略を変更しなければ、自分が戦略を変更すると利得が下がるか同じ利得となる場合が解となる。これは有限な戦略の場合、すべての戦略の組を調べればよいのでプログラムとしては簡単である。これをまず「純粋戦略」の解として表示する。

混合戦略の場合は、２人それぞれの行列に対して、行と列を取り除きながら、補遺２の微分を使った方法で解いた答えが、取り除いた行と列の確率を 0 として与えられる。但し、利得行列か損失行列かで表示される解が異なってくる。

「解（候補）」ボタンをクリックすると、純粋戦略の解と微分を使った方法の解が表示される。前の節でも述べたように、ここで表示される解はすべての解を尽くしているわけではないことに注意してもらいたい。前節図 1 の行列を使って例を見てみよう。

例１　プレイヤー１：利得行列 a,　プレイヤー２：利得行列 b

行列 a, b をそれぞれ利得行列として選択し、分析実行画面の「解（候補）」と「純粋戦略解」ボタンをクリックすると図 1 のような結果を得る。

戦略解 (...

	純粋戦略1
プレイヤー1	
p1	1.000
p2	0.000
p3	0.000
最大化解	4.000
プレイヤー2	
q1	1.000
q2	0.000
q3	0.000
最大化解	5.000

純粋戦略解 (A, B)

利得＼利得	PL2戦略1	PL2戦略2	PL2戦略3
PL1戦略1	(4) , (5)	-1 , 2	-2 , 1
PL1戦略2	-3 , (3)	0 , 2	(3) , 2
PL1戦略3	3 , (4)	(1) , 1	2 , 0

図 1　非協力非ゼロ和 2 人ゲームの解

これは純粋戦略の解だけを持つ場合の例である。「解（候補）」ボタンをクリックした際、

その下のコンボボックスに解の名前がセットされ、それを選択することによって解及びプレイヤーごとに解と利得の関係を表示することができるようになる。図 2a と図 2b にそれぞれ「PL1 解（候補)」と「PL2 解（候補)」を選択した場合の結果を示す。

解候補（利得行列 A）

Player1		q1	q2	q3	
利得行列	確率	1.000	0.000	0.000	
p1	1.000	4.000	-1.000	-2.000	4.000
p2	0.000	-3.000	0.000	3.000	-3.000
p3	0.000	3.000	1.000	2.000	3.000
		4.000	-1.000	-2.000	4.000

図 2a　PL1 簡易解

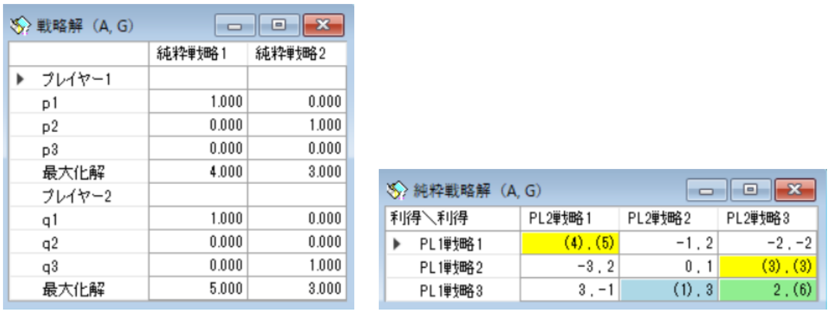
解候補（利得行列 B）

Player2		q1	q2	q3	
利得行列	確率	1.000	0.000	0.000	
p1	1.000	5.000	2.000	1.000	5.000
p2	0.000	3.000	2.000	2.000	3.000
p3	0.000	4.000	1.000	0.000	4.000
		5.000	2.000	1.000	5.000

図 2b　PL2 簡易解

これを見ると相手の戦略に対する期待値（右端や下の青い部分）について、それぞれのプレイヤーが期待値の最も大きな戦略を確率 1 で選択していることが分かる。

例 2　プレイヤー１：利得行列 a，プレイヤー２：利得行列 g



戦略解 (A, G)

	純粋戦略1	純粋戦略2
プレイヤー1		
p1	1.000	0.000
p2	0.000	1.000
p3	0.000	0.000
最大化解	4.000	3.000
プレイヤー2		
q1	1.000	0.000
q2	0.000	0.000
q3	0.000	1.000
最大化解	5.000	3.000

純粋戦略解 (A, G)

利得＼利得	PL2戦略1	PL2戦略2	PL2戦略3
PL1戦略1	(4) , (5)	-1 , 2	-2 , -2
PL1戦略2	-3 , 2	0 , 1	(3) , (3)
PL1戦略3	3 , -1	(1) , 3	2 , (6)

図 3　純粋戦略解が２つある場合

これは異なる純粋戦略の解が２つある場合である。どちらも解であるが、明らかに純粋戦略 1 の解が純粋戦略 2 の解に比べて優れている。

例３　プレイヤー１：利得行列 g，プレイヤー２：利得行列 h

戦略解（G, H）

	混合戦略1	混合戦略2	混合戦略3
プレイヤー1			
p1	0.286	0.000	0.500
p2	0.429	0.600	0.000
p3	0.286	0.400	0.500
最大化解	2.107	2.500	2.429
プレイヤー2			
q1	0.464	0.500	0.143
q2	0.214	0.000	0.857
q3	0.321	0.500	0.000
最大化解	1.857	2.200	2.500

純粋戦略解（G, H）

利得＼利得	PL2戦略1	PL2戦略2	PL2戦略3
PL1戦略1	(5) , 1	2 , (3)	-2 , 1
PL1戦略2	2 , 1	1 , 1	3 , (3)
PL1戦略3	-1 , (4)	(3) , 2	(6) , 1

図４　混合戦略の解だけがある場合

図 5a と図 5b にプレイヤー１とプレイヤー２の混合戦略の１番目の簡易解を示す。

解候補（利得行列 G）

Player1		q1	q2	q3	
利得行列	確率	0.464	0.214	0.321	
p1	0.286	5.000	2.000	-2.000	2.107
p2	0.429	2.000	1.000	3.000	2.107
p3	0.286	-1.000	3.000	6.000	2.107
		2.000	1.857	2.429	2.107

図 5a　プレイヤー１の簡易解１

解候補（利得行列 H）

Player2		q1	q2	q3	
利得行列	確率	0.464	0.214	0.321	
p1	0.286	1.000	3.000	1.000	1.429
p2	0.429	1.000	1.000	3.000	1.643
p3	0.286	4.000	2.000	1.000	2.607
		1.857	1.857	1.857	1.857

図 5b　プレイヤー２の簡易解１

２番目の簡易解は図 6a と図 6b となる。

解候補（利得行列 G）

Player1		q1	q2	q3	
利得行列	確率	0.500	0.000	0.500	
p1	0.000	5.000	2.000	-2.000	1.500
p2	0.600	2.000	1.000	3.000	2.500
p3	0.400	-1.000	3.000	6.000	2.500
		0.800	1.800	4.200	2.500

図 6a　プレイヤー１の簡易解２

解候補（利得行列 H）

Player2		q1	q2	q3	
利得行列	確率	0.500	0.000	0.500	
p1	0.000	1.000	3.000	1.000	1.000
p2	0.600	1.000	1.000	3.000	2.000
p3	0.400	4.000	2.000	1.000	2.500
		2.200	1.400	2.200	2.200

図 6b　プレイヤー２の簡易解２

3 番目の簡易解は図 7a と図 7b となる。

解候補（利得行列 G）

Player1		q1	q2	q3	
利得行列	確率	0.143	0.857	0.000	
p1	0.500	5.000	2.000	-2.000	2.429
p2	0.000	2.000	1.000	3.000	1.143
p3	0.500	-1.000	3.000	6.000	2.429
		2.000	2.500	2.000	2.429

図 7a　プレイヤー１の簡易解 3

解候補（利得行列 H）

Player2		q1	q2	q3	
利得行列	確率	0.143	0.857	0.000	
p1	0.500	1.000	3.000	1.000	2.714
p2	0.000	1.000	1.000	3.000	1.000
p3	0.500	4.000	2.000	1.000	2.286
		2.500	2.500	1.000	2.500

図 7b　プレイヤー２の簡易解 3

これらの結果を見ると、プレイヤー１とプレイヤー２は共に相手が戦略を変更しない限り、自分で戦略を変更する動機がないことが分かる。

例 4　プレイヤー１：利得行列 g，プレイヤー２：利得行列 a

戦略解（G, A）

	純粋戦略1	混合戦略1	混合戦略2
プレイヤー1			
p1	1.000	0.000	0.500
p2	0.000	0.143	0.500
p3	0.000	0.857	0.000
最大化解	5.000	2.500	2.375
プレイヤー2			
q1	1.000	0.500	0.625
q2	0.000	0.000	0.000
q3	0.000	0.500	0.375
最大化解	4.000	2.143	0.500

純粋戦略解（G, A）

利得＼利得	PL2戦略1	PL2戦略2	PL2戦略3
PL1戦略1	(5) , (4)	2 , -1	-2 , -2
PL1戦略2	2 , -3	1 , 0	3 , (3)
PL1戦略3	-1 , (3)	(3) , 1	(6) , 2

図 8　純粋戦略解と混合戦略解がある場合

この例は純粋戦略の解と混合戦略の解を含む場合である。

5.　おわりに

著者らはこのプログラムの利用法を次のように考えている。概論などの授業では、学生に答えを見せ納得させる必要があるため、簡易解などの表示は非常に有効である。しかし、経済学や経営学におけるゲーム理論の講義ではモデル的な問題に当てはめた利得行列を考え、学生に行動を考えさせることに重点が置かれる。そのためこのプログラムは学生には不向きである。教員が例題などを作るときに利用できればよいと思う。状況に応じてこのプログラムを有効に活用してもらえたらと思う。

このプログラムは多くの問題の解を与えるが、すべての均衡解を網羅しているわけではない。このプログラムが与えない均衡解も確かに存在する。今後多くの問題に適用し、プログラムの限界を把握しておかなければならない。

参考文献

［１］　鈴木光男、「ゲーム理論入門」、共立出版　(1983)

［２］　細川光浩・奥田由紀恵・福井正康、「陰関数グラフとナッシュ均衡解のプログラム開発」、日本教育情報学会第 37 回年会論文集 (2021) 354-355（岐阜女子大学, 2021/8/28-29）

［３］　福井正康、「College Analysis 総合マニュアル　－OR1－」、http://www.heisei-u.ac.jp/ba/fukui/gmanual/gmanual05.pdf

補遺１　2×2 行列の均衡解のグラフを使った求め方

分析実行画面の「2×2 解グラフ」で表示される図を見ると、すべての均衡解が求まっている。よく知られたことであるが、このプログラムで使った描き方を示しておく。

利得（損失）行列 $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$ を使った問題で、プレイヤー１が戦略１を確率 p 、プレイヤー２が戦略１を確率 q で取った場合のゲームの値 z は、以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
z &= a_{11}pq + a_{12}p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q) \\
&= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22} \\
&= (c_{11}q + c_{12})p + (c_{21}q + c_{22})
\end{aligned}
$$

プレイヤー１の行列 $\mathbf{A}$ が利得行列の場合、 z を最大化することになり、解は右側に表した範囲となる。但し、 $0 \le q_0 \le 1$ を超える場合はこの範囲までとする。

$c_{11}q + c_{12} > 0$ のとき　→　$p = 1$

$c_{11} > 0$	$q > -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(1,1) \sim (1,q_0)$
$c_{11} < 0$	$q < -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(1,0) \sim (1,q_0)$
$c_{11} = 0$	$c_{12} > 0$	$(1,0) \sim (1,1)$

$c_{11}q + c_{12} < 0$ のとき　→　$p = 0$

$c_{11} > 0$	$q < -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(0,0) \sim (0,q_0)$
$c_{11} < 0$	$q > -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(0,1) \sim (0,q_0)$
$c_{11} = 0$	$c_{12} < 0$	$(0,0) \sim (0,1)$

$c_{11}q + c_{12} = 0$ のとき　→　$p = 0 \sim 1$

$c_{11} > 0$	$q = -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(0,q_0) \sim (1,q_0)$
$c_{11} < 0$	$q = -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(0,q_0) \sim (1,q_0)$
$c_{11} = 0$	$c_{12} = 0$	$(0,0) \sim (1,1)$　全領域

この解を組み替えると、以下のようになる。

$c_{11} > 0$ のとき

$q < -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(0,0) \sim (0,q_0)$
$q = -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(0,q_0) \sim (1,q_0)$
$q > -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(1,1) \sim (1,q_0)$

$c_{11} < 0$ のとき

$q < -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(1,0) \sim (1,q_0)$
$q = -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(0,q_0) \sim (1,q_0)$
$q > -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(0,1) \sim (0,q_0)$

$c_{11} = 0$ のとき

$c_{12} < 0$	$(0,0) \sim (0,1)$
$c_{12} = 0$	$(0,0) \sim (1,1)$ 全領域
$c_{12} > 0$	$(1,0) \sim (1,1)$

またプレイヤー１の行列が損失行列の場合、$p=1$ □ $p=0$ と入れ替えればよく、利得行列の場合を $r=0$、損失行列の場合を $r=1$ とすると、まとめて以下のように書ける。

$c_{11} > 0$ のとき

$q < -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(r,0) \sim (r,q_0)$
$q = -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(0,q_0) \sim (1,q_0)$
$q > -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(1-r,1) \sim (1-r,q_0)$

$c_{11} < 0$ のとき

$q < -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(1-r,0) \sim (1-r,q_0)$
$q = -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(0,q_0) \sim (1,q_0)$
$q > -c_{12}/c_{11} = q_0$	$(r,1) \sim (r,q_0)$

$c_{11} = 0$ のとき

$c_{12} < 0$	$(r,0) \sim (r,1)$
$c_{12} = 0$	$(0,0) \sim (1,1)$ 全領域
$c_{12} > 0$	$(1-r,0) \sim (1-r,1)$

また、プレイヤー２の場合も、行列 $(\mathbf{B})_{ij} = b_{ij}$ を使って、同様にまとめられるので詳細は省略する。

補遺２　微分を使って求める均衡解

プレイヤー１とプレイヤー２はそれぞれ m 個と n 個の戦略を持っているとする。それぞれの戦略の実行確率を $p_i\ (i=1,\ldots,m)$ と $q_j\ (j=1,\ldots,n)$ とする。プレイヤー１の利得（損失）行列を $(\mathbf{A})_{ij}=a_{ij}$ 、プレイヤー２の利得（損失）行列を $(\mathbf{B})_{ij}=b_{ij}$ とする。均衡解ではこのうちで使われない戦略も存在する。一般にプレイヤー１の実行確率から $m-r$ 個、プレイヤー２の実行確率から $n-r$ 個の戦略は使われず、実際に使われるのは双方 r 個である。しかし、これもうまく選ばないと正しい均衡解（$0\le p_i,q_j<1$）は得られない。利用しない戦略の行と列を除いて、改めてプレイヤー１の利得（損失）行列を $(\mathbf{A})_{ij}=a_{ij}$ 、プレイヤー２の利得（損失）行列を $(\mathbf{B})_{ij}=b_{ij}$ とおく。

プレイヤー１について、ゲームの値は以下で与えられる。

$$R=\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}a_{kl}p_kq_l=\sum_{k=1}^{r-1}\sum_{l=1}^{r-1}a_{kl}p_kq_l+\sum_{k=1}^{r-1}a_{kr}p_kq_r+\sum_{l=1}^{r-1}a_{rl}p_rq_l+a_{rr}p_rq_r$$

ここに、

$$p_r=1-\sum_{k=1}^{r-1}p_k\ ,\quad q_r=1-\sum_{l=1}^{r-1}q_l$$

これを p_i で微分する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_i}R&=\sum_{l=1}^{r-1}a_{il}q_l+a_{ir}q_r-\sum_{l=1}^{r-1}a_{rl}q_l-a_{rr}q_r\\&=\sum_{l=1}^{r-1}a_{il}q_l+a_{ir}\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}q_l\right)-\sum_{l=1}^{r-1}a_{rl}q_l-a_{rr}\left(1-\sum_{l=1}^{r-1}q_l\right)\\&=\sum_{l=1}^{r-1}(a_{il}-a_{ir}-a_{rl}+a_{rr})q_l+a_{ir}-a_{rr}=0\end{aligned}$$

これより、以下の連立方程式が得られる。

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)_{ij}=a_{ij}-a_{in}-a_{mj}+a_{mn}\ ,\quad \left(\mathbf{q}\right)_j=q_j\ ,\quad (\mathbf{c})_i=a_{mn}-a_{in}$$ として、

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{q}=\mathbf{c}$$

プレイヤー２について、ゲームの値は以下で与えられる。

$$S=\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}b_{kl}p_kq_l=\sum_{k=1}^{r-1}\sum_{l=1}^{r-1}b_{kl}p_kq_l+\sum_{k=1}^{r-1}b_{kr}p_kq_r+\sum_{l=1}^{r-1}b_{rl}p_rq_l+b_{rr}p_rq_r$$

これを q_j で微分する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_j} S &= \sum_{k=1}^{r-1} b_{kj} p_k - \sum_{k=1}^{r-1} b_{kr} p_k + b_{rj} p_r - b_{rr} p_r \\
&= \sum_{k=1}^{r-1} b_{kj} p_k - \sum_{k=1}^{r-1} b_{kr} p_k + b_{rj} \left(1 - \sum_{k=1}^{r-1} p_k\right) - b_{rr} \left(1 - \sum_{k=1}^{r-1} p_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{r-1} (b_{kj} - b_{kr} - b_{rj} + b_{rr}) p_k + b_{rj} - b_{rr}
\end{aligned}
$$

これより、以下の連立方程式が得られる。

$\left(\tilde{\mathbf{B}}\right)_{ij} = b_{ij} - b_{ir} - b_{rj} + b_{rr}$, $\left(\mathbf{p}\right)_i = p_i$, $\left(\mathbf{d}\right)_j = b_{mn} - b_{mj}$　として、

${}^t\mathbf{p}\tilde{\mathbf{B}} = {}^t\mathbf{d}$ （${}^t\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{p} = \mathbf{d}$）

基本的に以上を解くことによって、解を求めることができる。但し、使わない戦略の確率は 0 である。

Multi-purpose Program for Social System Analysis 40
- Nash Equilibrium Tool -

Masayasu FUKUI[*1], Mitsuhiro HOSOKAWA[*2] and Yukie OKUDA[*2]

**1 Department of Business Administration, Faculty of Business Administration,*
Fukuyama Heisei University
**2 Education Center, Fukuyama Heisei University*

Abstract: We have added a program of game theory, which is also used in business administration, into College Analysis. This time, we dealt with the pure strategy problem and the mixed strategy problem of the zero-sum two-player game and the non-zero-sum two-player game. At that time, educational consideration is given by using four types of solution display formats such as tables and graphs. In particular, the display format representing the meaning of the equilibrium solution is characteristic.
Key Words: College Analysis, Nash equilibrium, game theory, operations research