意 思 決 定 論

福山平成大学経営学科

福井正康

１． システム分析【第１回】

1.1 システムとは

　情報システム、システム開発、社会システムなどのように、我々はよくシステムという言葉を使うが、一体どんなものをシステムと呼ぶのだろうか。

定義

　システムとは複数の要素の集合体[1] で、要素間に関連性[2] と階層性[3] を持ち、全体として単純な要素の総和以上の機能を有する[4] ものをいう。

１）システムはいくつかの要素から成っている。

　情報システム（コンピュータ、周辺機器、ネットワーク施設、ソフトウェア等）

　AV システム（ＴＶ、DVD プレーヤー、スピーカー、ソフトウェア等）

　大学システム（キャンパス、施設、学生、教員、事務員、学則、履修要項等）

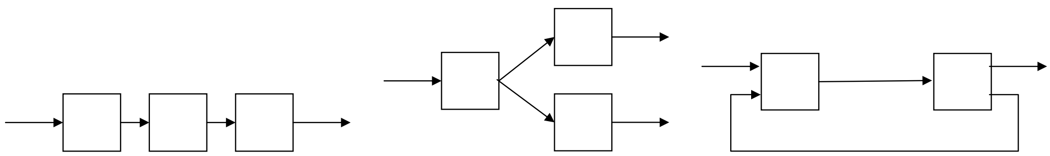
　人体システム（脳、心臓、肝臓、目、手、足等々）

２）各要素はある関係によって、直接・間接に結ばれている。

　情報システム（コンピュータと周辺機器は配線や電気信号によって、またソフトウェアとは動作命令によって）

　大学システム（施設と学生は利用の関係によって、教員と学生は教育によって）

結合の種類



直列結合　　　並列結合　　　フィードバック結合

３）システムは別のシステムの構成要素となっている。

　コンピュータシステム∈情報システム∈会社システム

　脳細胞システム∈脳システム∈人体システム

４）システムは要素の総和以上のものである。

　人体システム　→　創作活動を行う。

　AV システム　→　人に楽しみを与える。

５）我々が扱う人工システムは目的を持つ。

６）システムには外界がある。（閉じたシステムと開いたシステム）

1.2 分析の方法

科学的方法の４つの規則

デカルト「方法序説」

注）すべての人が真理を見いだすための方法を求めて，思索を重ねたデカルト（1596－1650）.「われ思う，ゆえにわれあり」は，その彼がいっさいの外的権威を否定して達した，思想の独立宣言である．本書で示される新しい哲学の根本原理と方法，自然の探求の展望などは，近代の礎を築くものとしてわたしたちの学問の基本的な枠組みをなしている．［新訳］

１）明晰判明なものだけを自分の判断に取り入れる。

２）対象をできるだけ細かく分割する。

３）単純容易なものから複雑なものへと、順番に考える。

４）全体を再検討する。

分析には対象を一度分割する必要がある。

例　機械の構造を知るには一度分割し、再度組み立ててみることが重要である。

例　ものを作るのに、工程を分けることは必要不可欠である。

例　人間の機能の理解には解剖は不可欠であるし、単純な組織の動きの積み重ねで人間の複雑な動きを理解しようと考える。物質的な部分には科学分析の方法が適用できるが、精神的な部分はなかなか明晰とはいかない。

システムは部分の総和以上であっても、分割という方法を採らざるを得ない。

以後、ものの見方、認識の仕方によって分類される分析の方法をまとめる。

1.3 システム分析

システム分析（Systems Analysis, SA）とは

我々が直面する問題領域をシステムとして捉え、それに因果分析や機能分析（後述）を適用して問題の構造を理解し、意思決定やシステム構築の助けとすること。

システムとして捉えるとは

１）システムの目標を明確にする。

２）いくつかの要素に分割し、各要素の特性とそれらの関係を分析する。

College Analysis の導入

２． 意思決定について【第２回】

2.1 意思決定の基礎

意思決定の定義

目標とする結果を得るために、与えられた環境の中で、制御できる代替案（選択肢）の中から、最も望ましいものを選択すること

意思決定プロセス（H. サイモン）

注）H.サイモン（Herbert Alexander Simon, 1916- 2001）はアメリカ合衆国の認知心理学者・経営学者・情報科学者。チューリング賞、ノーベル経済学賞受賞。

１）情報活動　環境を調査し探索して、意思決定の目標を設定すること

２）設計活動　可能な行動案（代替案）を作り出し、まとめること

３）選択活動　可能な行動案の中から、１つを選び出すこと

４）検討活動　選択案の実施で目標が達成されるかどうかを確認すること
もし不十分ならば，さらに情報活動を行う。

意思決定の４つの要素

目標　　　金銭的、精神的利益を最大にすること

代替案　　制御可能な選択肢

評価項目　代替案を評価する項目

環境　　　目標達成に影響する制御できない原因

2.2 意思決定の定性的方法

1. 代替案の評価手順

１）代替案と評価項目の選定

２）評価項目の測定尺度の決定と評価項目ごとの代替案の評価

３）評価項目の重要性の決定

４）最善案の選定

2. 代替案の評価手法（分析初期段階の定性的手法）

代替案と評価項目の選定

目標：最良のコンピュータシステムの導入を考える。

代替案：システム A（業者発注），システム B（汎用購入），システム C（自社開発）

評価項目：ニーズ，開発費，運用費，技術力

評価項目の測定尺度の決定

例　スコアリング法（単一得点換算法）

各評価項目で代替案はどんな値になるのか考え、代替案評価表をつくる。

代替案評価表

評価項目	システムＡ	システムＢ	システムＣ
ニーズ	75%	50%	90%
開発費	1000 万円	500 万円	700 万円
運用費	300 万円／年	200 万円／年	100 万円／年
技術力	85%	95%	75%

このままでは各評価基準の単位がバラバラで総合評価が与えられない。

得点換算表

得点	1	2	3	4	5
ニーズ（%）	20～	30～	50～	70～	90～
開発費（万円）	1200～	1000～	800～	600～	400～
運用費（万円）	600～	500～	400～	300～	200～
技術力（%）	50～	60～	70～	80～	90～

評価項目ごとの代替案の評価

評価項目	システムＡ	システムＢ	システムＣ
ニーズ	4	3	5
開発費	2	4	3
運用費	4	5	5
技術力	4	5	3

評価項目の重要性の決定

例　一対比較法（強制決定法）

情報システムの開発でシステムＡ，Ｂ，Ｃの３つの候補（代替案）がある。

どれが良いか決めるために、(会社の）ニーズ、開発費、運用費、技術力を評価項目とし、各項目に重み付けを行う。(評価項目を１対ずつどちらが重要か決めて行く。)

	ニーズ	開発費	運用費	技術力	得点	重み係数
ニーズ		1	1	1	3	3/6
開発費	0		0	1	1	1/6
運用費	0	1		1	2	2/6
技術力	0	0	0		0	0
				計	6	1

得点表と重み係数をまとめて書いて

評価項目	重み係数	システムＡ	システムＢ	システムＣ
ニーズ	3/6	4	3	5
開発費	1/6	2	4	3
運用費	2/6	4	5	5
技術力	0	4	5	3

最善案の選定

重み付き得点表（重み係数は１対比較法から）

評価項目	システムＡ	システムＢ	システムＣ
ニーズ	12/6	9/6	15/6
開発費	2/6	4/6	3/6
運用費	8/6	10/6	10/6
技術力	0	0	0
合計	22/6	23/6	28/6

以上より、システムＣを選択する。

問題１

４つのシステムから最善案を選ぶ問題で、評価項目ごとに以下のような重み係数と得点を得た。重み付き得点表を完成させ、最善案を求めよ。

	重み係数	システムＡ	システムＢ	システムＣ	システムＤ
費用	0.3	2	3	5	4
開発期間	0.2	5	3	4	2
操作性	0.4	3	4	3	4
先進性	0.1	1	4	5	2

解答　重み付き得点表

	システムＡ	システムＢ	システムＣ	システムＤ
費用				
開発期間				
操作性				
先進性				
計				

最善案［　　　　　　　　　　　］

問題２

カニを専門店で買うかネットで買うかという問題で、重み係数と得点から重み付き得点表を求め最善案を得る方法を図で表したい。

１）重み付き得点表を作り、図の空欄を重み係数と得点で埋めよ。

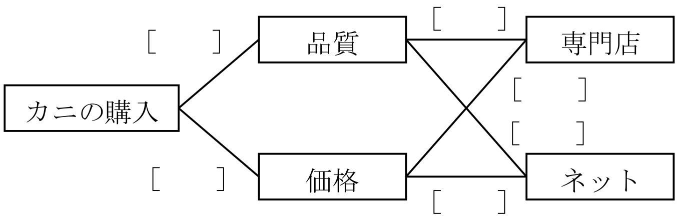
	重み係数	専門店	ネット
品質	0.7	5	3
価格	0.3	4	5

重み付き得点表

	専門店	ネット
品質		
価格		
合計		

最善案［　　　　　　　］

上の表を以下のような図で表現することもある。



２）専門店とネットの評価は図ではどう計算されるか。

専門店＝

ネット＝

これまでは評価項目の重要性（重み係数）と各評価項目から見た代替案の重要性（評価）の値は違った方法で算出された。これを尺度を持った一対比較法で統一的に評価する方法が次章の AHP と呼ばれる手法である。

３．ＡＨＰ（Analytic Hierarchy Process：階層分析法）【第３回】

3.1 ＡＨＰとは

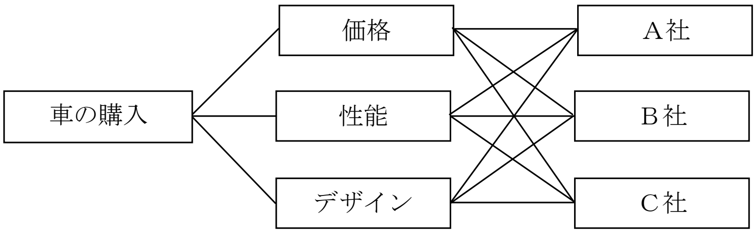
ある意思決定問題に対して、評価基準をもとに代替案（選択肢）から（尺度を持った）１対比較法によって、最適なものを選出する手法である。

例

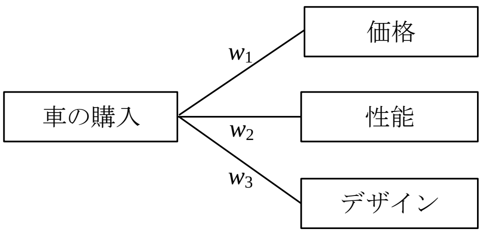
ある会社が車を購入することにした。価格・性能・スタイルの観点を総合して、Ａ社・Ｂ社・Ｃ社のどれを選ぶか決定したい。

手順

１）問題の構造を決める。



２）問題（車の購入）の観点から各評価基準に対して重要度 w_i を計算する



9：横は縦より著しく優れている
7：横は縦より相当優れている
5：横は縦より優れている
3：横は縦より少し優れている
1：横と縦は同等
1/3：横は縦より少し劣っている
1/5：横は縦より劣っている
1/7：横は縦より相当劣っている
1/9：横は縦より著しく優れている

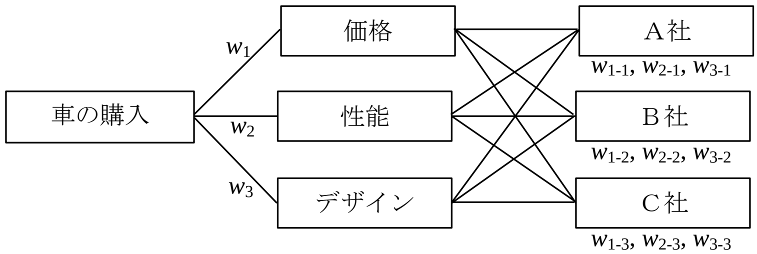
各評価基準に対して一対比較行列をつくる。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列から各評価基準に対して重要度が計算できる。

一対比較行列の整合性を見るために、整合度 C.I.（Consistency Index）が導入されている。（0.1<C.I.≦0.2：要注意，0.2<C.I.：不整合）

３）上と同様にして各評価基準の観点から代替案（Ａ社、Ｂ社、Ｃ社）を評価し、重要度を決定する。



ここに w_{i-j} の記号は、評価基準 i から見た代替案 j の重要度である。

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1,$$
$$w_{i-1} + w_{i-2} + w_{i-3} = 1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

４）問題の観点から、上の構造図をもとに各代替案に対して最終的な評価 v_j を求める。

$$v_j = w_1 \cdot w_{1-j} + w_2 \cdot w_{2-j} + w_3 \cdot w_{3-j} \quad (j = 1, 2, 3)$$

これは評価基準が階層的な構造になっている場合にも適用できる。

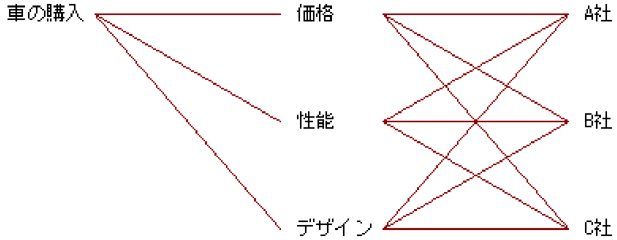
3.2　ＡＨＰの具体的な計算

上の例題で問題を構造化し、与えられた一対比較行列から各要素の重要度と一対比較の整合度 C.I.（Consistency Index）を求めよ。（整合度の値が 0.1 より大きい場合、再度一対比較行列から検討する）

構造化行列

	価格	性能	デザイン	A 社	B 社	C 社
車の購入	1	1	1			
価格				1	1	1
性能				1	1	1
デザイン				1	1	1

構造図



評価基準　　　　代替案（選択肢）

一対比較表と重要度

車の購入	価格	性能	デザイン	重要度
価格	1	5	3	
性能	1/5	1	1/3	
デザイン	1/3	3	1	

整合度 C.I.［　　　　　］

価格を基準	Ａ社	Ｂ社	Ｃ社	重要度
Ａ社	1	3	7	
Ｂ社	1/3	1	3	
Ｃ社	1/7	1/3	1	

整合度 C.I.［　　　　　］

性能を基準	Ａ社	Ｂ社	Ｃ社	重要度
Ａ社	1	1/3	1/5	
Ｂ社	3	1	1/3	
Ｃ社	5	3	1	

整合度 C.I.［　　　　　］

デザインを基準	Ａ社	Ｂ社	Ｃ社	重要度
Ａ社	1	1	1/3	
Ｂ社	1	1	1/3	
Ｃ社	3	3	1	

整合度 C.I.［　　　　　］

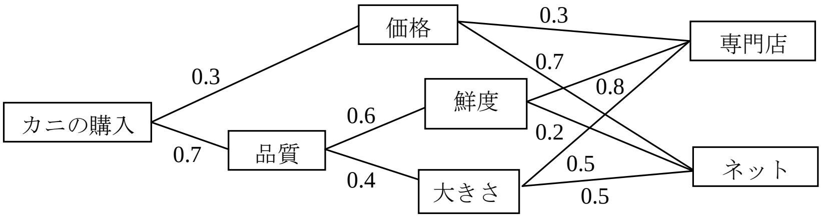
最終的な重要度

	Ａ社	Ｂ社	Ｃ社
重要度			

どの会社を選択するか［　　　　　　］

問題１【第４回】

１）以下の構造図のような AHP モデルで、各線に１つ上の階層から見た下の階層の重要度が示してある。代替案の最終的な評価はどうなるか。

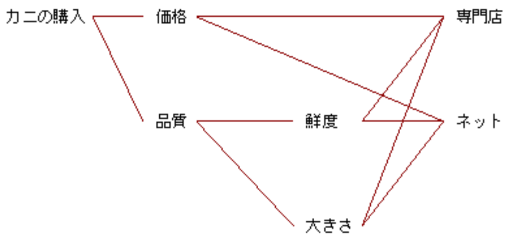


専門店＝［　　　　　　　］

ネット＝［　　　　　　　］

［専門店・ネット］で購入する

２）上で述べた次の構造図を実現するような 1 ページ目の構造行列を作り、以下の表に書き入れよ。余力のある人は自分で 1 対比較表を完成させ、自分の総合的な評価を求めよ。



自分の総合評価

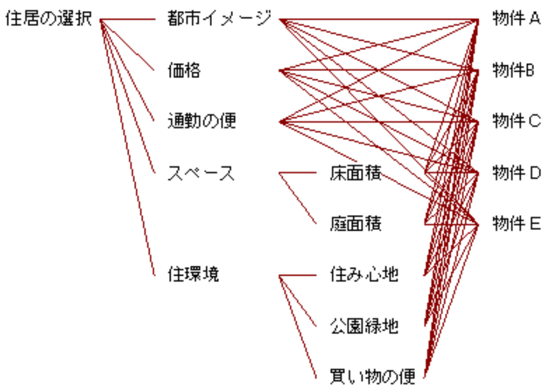
専門店［　　　　　　　］

ネット［　　　　　　　］　　　　［専門店・ネット］で購入する

問題２

Samples¥AHP2Error.txt のデータ（最初のページだけデータが欠落している）をもとに以下の問いに答えよ。

１）１ページ目のデータを完成させて以下の構造図を描け。



２）住居の選択の一対比較表において各評価基準の重要度を示せ。

	都市イメージ	価格	通勤の便	住環境	スペース
重要度					

最も重要と考えているのは［　　　　　　　　　　　］である。

３）上の場合の整合度 C.I.の値はいくらか。［　　　　　　　　］

これは整合性があると言えるか。［いえる・いえない］

４）住環境からみた次階層の評価基準の重要度を示せ。

	住み心地	公園緑地	買い物の便
重要度			

最も重要と考えているのは［　　　　　　　　　　　］である。

５）上の場合の整合度 C.I.の値はいくらか。［　　　　　　　　］

これは整合性があると言えるか。［いえる・いえない］

６）各代替案の最終的な評価はいくらか。

	物件Ａ	物件Ｂ	物件Ｃ	物件Ｄ	物件Ｅ
重要度					

最も評価の高い物件は［　　　　　　　　　　］である。

７）住居の選択の一対比較表において、住環境と通勤の便はほぼ同じと評価されているが、住環境の評価を次第に高くしていくと最終的な評価の順番に影響があるか。感度分析を用いて答えよ。　　　　影響が［ある・ない］

８）この場合、整合度の値に問題が生じるのは住環境／通勤の便の値がいくらからか。

［　　　　　　］以上のとき

例　一対比較表の設定法のあまり間違わない方法**【第５回】**

１）最初に比較するものの重要性の順序をきめる。（同順位あり）

例えば、１．価格，２．デザイン，３．性能

２）順序の隣り合ったものの重要性の違いを等号が不等号で表す。

＝ほぼ等しい，＞少し重要，＞＞重要　（不等号２つ位が無難）

例えば　価格＞デザイン＞性能

３）一対比較表の左から見て所定のところに、間にはさむ不等号の数で数値を入れる。

例えば、なし：１，不等号１つ：３，不等号２つ：５，不等号３つ：７　等

車の購入	価格	性能	デザイン
価格		５	３
性能			
デザイン		３	

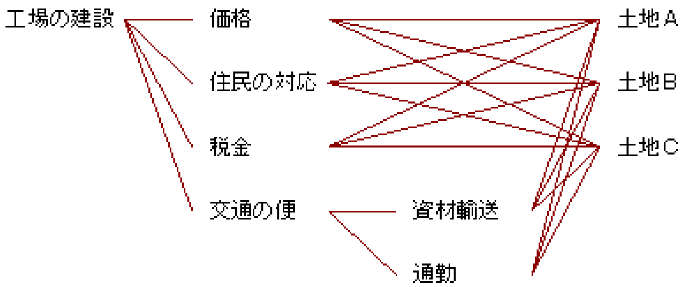
４）一対比較表作成で間の空欄を埋める。

車の購入	価格	性能	デザイン
価格	１	５	３
性能	１／５	１	１／３
デザイン	１／３	３	１

問題３

会社で新しい工場を建設する予定地を探しており、土地 A，土地 B，土地 C の３つの候補地が考えられている。これらの土地を検討する基準として、価格、住民の対応、税金、交通の便の４つが考えられているが、交通の便は、資材輸送と通勤の２つに分けられる。それぞれの検討項目に対して、各判定基準と土地の優位性は表の上に与えられているものとする。以下の問いに答えよ。

１）構造図が以下となるようにデータを設定せよ。



２）一対比較を作成し、重要性を見ながら値を設定せよ。

工場の建設に対して（価格>税金=交通の便>住民の対応）

	価格	住民の対応	税金	交通の便	整合度 C.I.
重要度					

交通の便に対して（資材輸送>>通勤）

	資材輸送	通勤	整合度 C.I.
重要度			

価格に対して（A>>B＝C）

	土地 A	土地 B	土地 C	整合度 C.I.
重要度				

住民の対応に対して（B>C>A）

	土地 A	土地 B	土地 C	整合度 C.I.
重要度				

税金に対して（C>A>B）

	土地 A	土地 B	土地 C	整合度 C.I.
重要度				

資材輸送に対して（C=B>>A）

	土地 A	土地 B	土地 C	整合度 C.I.
重要度				

通勤に対して（B>C>>A）

	土地 A	土地 B	土地 C	整合度 C.I.
重要度				

３）以上の評価を総合した最終評価を求めよ。

	土地 A	土地 B	土地 C
重要度			

最良候補地［　　　　　　　］

例　一対比較表の設定法のあまり間違わない方法**【第５－２回】**

１）最初に比較するものの重要性の順序をきめる。（同順位あり）

　例えば、１．価格，２．デザイン，３．性能

２）順序の隣り合ったものの重要性の違いを等号が不等号で表す。

　＝ほぼ等しい，＞少し重要，＞＞重要　（不等号２つ位が無難）

　例えば　価格＞デザイン＞性能

３）一対比較表の左から見て所定のところに、間にはさむ不等号の数で数値を入れる。

　例えば、なし：１，不等号１つ：３，不等号２つ：５，不等号３つ：７　等

車の購入	価格	性能	デザイン
価格		５	３
性能			
デザイン		３	

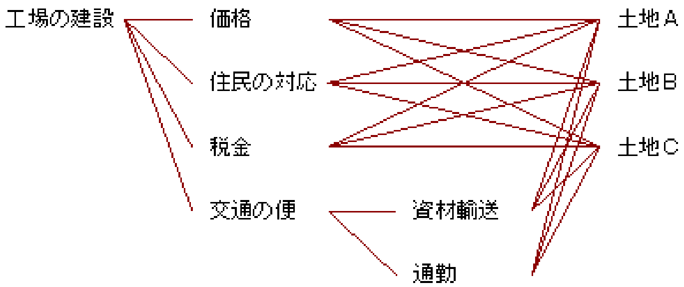
４）一対比較表作成で間の空欄を埋める。

車の購入	価格	性能	デザイン
価格	１	５	３
性能	１／５	１	１／３
デザイン	１／３	３	１

問題３－２

　会社で新しい工場を建設する予定地を探しており、土地 A，土地 B，土地 C の３つの候補地が考えられている。これらの土地を検討する基準として、価格、住民の対応、税金、交通の便の４つが考えられているが、交通の便は、資材輸送と通勤の２つに分けられる。それぞれの検討項目に対して、各判定基準と土地の優位性は表の上に与えられているものとする。以下の問いに答えよ。

１）構造図が以下となるようにデータを設定せよ。



２）一対比較を作成し、重要性を見ながら値を設定せよ。

工場の建設に対して（価格=税金>交通の便>住民の対応）

	価格	住民の対応	税金	交通の便	整合度 C.I.
重要度					

交通の便に対して（資材輸送>通勤）

	資材輸送	通勤	整合度 C.I.
重要度			

価格に対して（B>A＝C）

	土地 A	土地 B	土地 C	整合度 C.I.
重要度				

住民の対応に対して（B>A>C）

	土地 A	土地 B	土地 C	整合度 C.I.
重要度				

税金に対して（A>B=C）

	土地 A	土地 B	土地 C	整合度 C.I.
重要度				

資材輸送に対して（B=A>>C）

	土地 A	土地 B	土地 C	整合度 C.I.
重要度				

通勤に対して（B>>A>C）

	土地 A	土地 B	土地 C	整合度 C.I.
重要度				

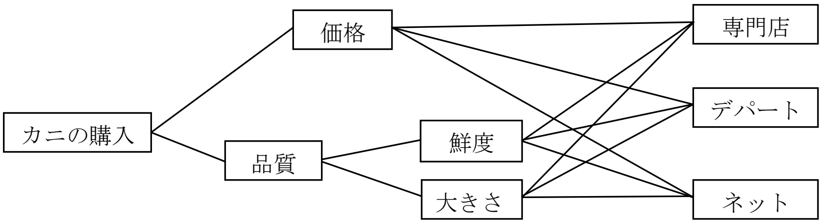
３）以上の評価を総合した最終評価を求めよ。

	土地 A	土地 B	土地 C
重要度			

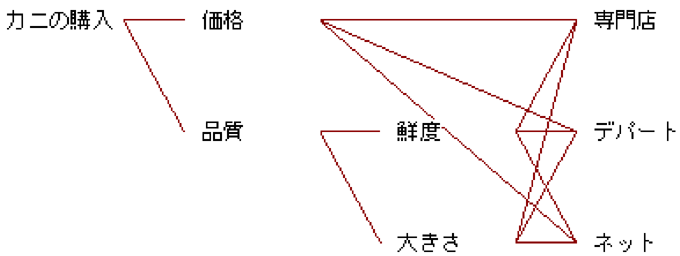
最良候補地［　　　　　　　　］

問題４【第６回】

以下の構造図のような AHP モデルで、指示に従って１つ上の階層から見た下の階層の重要度を与え、代替案の最終的な評価を求めよ。



１）以下の構造図となるように構造データを作れ。



２）1 対比較表を作り、自分で重要度を決め、以下の表に記入せよ。

カニの購入　不等号［　　　　　　　　　　］（まず前回のように不等号で記入）

	価格	品質	整合度 C.I.
重要度			

価格　不等号［　　　　　　　　　　］

	専門店	デパート	ネット	整合度 C.I.
重要度				

品質　　不等号［　　　　　　　　　　］

	鮮度	大きさ	整合度 C.I.
重要度			

鮮度　　不等号［　　　　　　　　　　　　　　］

	専門店	デパート	ネット	整合度 C.I.
重要度				

大きさ　不等号［　　　　　　　　　　　　　　］

	専門店	デパート	ネット	整合度 C.I.
重要度				

３）最終的な評価を求めよ。

	専門店	デパート	ネット
重要度			

選択［　　　　　　　］

数学的解説　重要度の計算

一対比較行列は次のような理想的な構造に近いと解釈する。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & w_1/w_3 \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & w_2/w_3 \\ w_3/w_1 & w_3/w_2 & w_3/w_3 \end{pmatrix}$$

理想的な $\mathbf{A}$ を用いると、n を行列の次数として、

$$\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & w_1/w_3 \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & w_2/w_3 \\ w_3/w_1 & w_3/w_2 & w_3/w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$ のような関係が考えられるが、

現実には

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}$$

a_{ij}：評価基準 i の評価基準 j に対する重要度の比率（$a_{ji} = 1/a_{ij}$）

（現実には 1～9 または 1～1/9 とする）

の式を解いて重要度を求める。（固有値方程式）

重要度の比を表す一対比較行列に大きな矛盾がないとき、解は $\lambda \cong 3$，$w'_i \cong w_i$ となる。整合度については $\mathrm{c.I.} = (\lambda - n)/(n-1)$ とする。

４．集団的順位決定法【第７回】

参考文献：木下栄蔵，わかりやすい意思決定論入門，近代科学社，1996.

自分で考えよう

料理コンクールで A, B, C ３人の候補に対し、４人の審査員が１０点満点で以下のように点数を付けた。これらの結果から順位を決めよ。

候補	審査員１	審査員２	審査員３	審査員４	合計	順位
A	6	5	6	2		
B	4	4	5	5		
C	3	3	4	１０		

この結果には問題はないか？少しでも問題を解消するために。

等間隔ウェイトの順位法

順位	1	2	3		
ウェイト				加重合計	順位
A					
B					
C					

例

料理コンクールで A, B, C, D ４人の候補に対し、１０人の審査員が以下のように順位をつけた（Samples¥社会的意思決定 1.txt）。これらの意見からできるだけ公平に優勝者を決める方法を考える。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	１０
A	1	3	1	2	1	4	2	3	4	2
B	2	1	3	1	3	2	1	1	3	4
C	4	2	4	3	2	3	4	4	2	1
D	3	4	2	4	4	1	3	2	1	3

味・見た目・アイデアなどの項目の点数を合計する方法もよく利用されるが、各自の点数の統一性（甘さや点数の範囲）があいまいなため、ここでは順位だけを利用する方法を示す。（例えば、３人が５対４、１人が１対５だと後者の意見が強くなる）

4.1 順位法

1）等間隔ウェイトの順位法

候補者の各順位の数に等間隔のウェイトをかけて足して行く。よく利用される方法

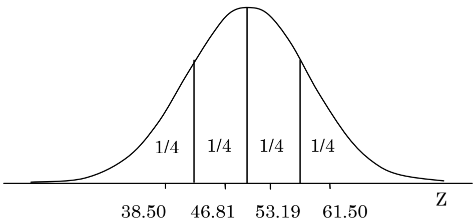
順位	1	2	3	4				
ウェイト	4	3	2	1	合計	加重合計	加重平均	評価
A	3	3	2	2	10	27.00	2.700	0.750
B	4	2	3	1	10	29.00	2.900	1.000
C	1	3	2	4	10	21.00	2.100	0.000
D	2	2	3	3	10	23.00	2.300	0.250
合計	10	10	10	10				

評価＝（加重平均－最小）÷（最大－最小）

評価は加重平均の最大が 1、最小が 0 になるように変換している。
審査員が 1 位に 5 点、・・・5 位に 1 点と与え、合計をとる方法と同じである。

2）正規性ウェイトの順位法

ウェイトにある程度分布の影響を持たせるため（上位の少ない人数のところはウェイトを高く、下位の少ない人数のところはウェイトを低く）、各順位の偏差値を利用する方法もある。



正規分布の密度関数を同面積で 4 等分し、それらの中央値の偏差値をウェイトとする。

順位	1	2	3	4				
ウェイト	61.50	53.19	46.81	38.50	合計	加重合計	加重平均	評価
A	3	3	2	2	10	514.69	51.47	0.734
B	4	2	3	1	10	531.32	53.13	1.000
C	1	3	2	4	10	468.68	46.87	0.000
D	2	2	3	3	10	485.31	48.53	0.266
合計	10	10	10	10				

評価の計算方法は同上

4.2 一対比較法

例えばAとBで順位を比較し、勝った割合（確率）を一対比較表の横方向に記入する。

一対比較表

	A	B	C	D
A	6/12	5/12	7/12	8/12
B	7/12	6/12	8/12	7/12
C	5/12	4/12	6/12	5/12
D	4/12	5/12	7/12	6/12

注１）実際には勝った割合は、(勝ち数+1)/(比較数+2)で計算する。

注２）引き分けの場合は勝った数を0.5とする。（対角成分はすべて0.5となる）

その割合（確率）から、標準正規分布の変数値を求め、その合計と平均を記入する。

	A	B	C	D	合計	平均	評価
A	0.0000	-0.2104	0.2104	0.4307	0.4307	0.108	0.753
B	0.2104	0.0000	0.4307	0.2104	0.8516	0.213	1.000
C	-0.2104	-0.4307	0.0000	-0.2104	-0.8516	-0.213	0.000
D	-0.4307	-0.2104	0.2104	0.0000	-0.4307	-0.108	0.247

評価の計算方法は同上

問題１

あるコンテストで A～E の５人の候補に対し、１０人の審査員が以下のように順位をつけた (Samples¥社会的意思決定 2.txt)。これらの意見から、等間隔ウェイトの順位法、正規性ウェイトの順位法、一対比較法で総合的な順位を決定せよ。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	１０
A	3	4	1	2	2	1	3	4	4	2
B	2	1	3	5	1	2	2	1	1	5
C	1	2	2	1	3	4	1	2	2	1
D	5	3	4	4	5	3	4	5	3	3
E	4	5	5	3	4	5	5	3	5	4

注）College Analysis のデータは縦に入力されている。

順位法（等間隔ウェイト）

順位	1	2	3	4	5			
ウェイト						加重平均	評価	順位
A								
B								
C								
D								
E								

順位法（正規性ウェイト）

順位	1	2	3	4	5			
ウェイト						加重平均	評価	順位
A								
B								
C								
D								
E								

一対比較法

順位	A	B	C	D	E	平均	評価	順位
A								
B								
C								
D								
E								

問題２【第８回】

ある国でアイドルコンテストが行われ、５人の候補に５０人の審査員が順位を付けたところ、Samples¥社会的意思決定 3.txt のような結果が得られた。これらの意見から、等間隔ウェイトの順位法、正規性ウェイトの順位法、一対比較法で評価値を求め、総合的な順位を決定したい。以下の問いに答えよ。

１）最も１位の多かったのは［ミス　　　　　　　　　　　］
　　最も５位の多かったのは［ミス　　　　　　　　　　　］

２）等間隔ウェイトの順位法でウェイトはいくらか。

１位	２位	３位	４位	５位

３）正規性ウェイトの順位法でウェイトはいくらか。

１位	２位	３位	４位	５位

４）上の正規性ウェイトは各順位の人の正規分布の偏差値で与えられているが、３位と５位の人の値は自分より下に何%の人がいるとして求められているか。
ヒント：各順位は同じ人数割合で分割されているものとする。
３位：自分より下に［　　　　　　　］％
５位：自分より下に［　　　　　　　］％

５）一対比較法は各候補の順位で１対（２人）ごとに勝ち負けを決めて行く方法である。比較確率表によるとミスサンゴはミスパインと比較して勝率が 0.3077 であったが、これは何勝何敗だろうか。但し、比較確率表の勝率の値は（勝ち数＋１）／（比較数＋２）で与えられる。　　　　［　　　　　］勝［　　　　　］敗

６）一対比較法の評価値は上の勝率から標準正規分布の性質を利用して求められるが、勝ち越せば［　正　・　負　］の値となり、負け越せば［　正　・　負　］の値となり、引き分ければ［　　　　　　］となる。

７）各評価法の評価値を求め、総合的な順位を決定せよ。

評価法	等間隔順位法	正規性順位法	一対比較法	順位
ミスサンゴ				
ミスパイン				
ミスバナナ				
ミスパパイヤ				
ミスヤシ				

問題３

あるコンテストでＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄの４人の候補に審査員１０名が１０点満点で採点を行った結果（この場合点数が高いほど良い・降順）、Samples¥社会的意思決定 4.txt のような結果が得られた。しかし、辛口の審判もおり、そのままの点数の合計では問題がありそうなので、順位によって評価を下すことになった。

１）審査員１～３番の個別の順位データを求めよ。

	A	B	C	D
1				
2				
3				

２）例えば同点で２位になった２人の順位はどうなるか。　　［　　　　　］位

例えば同点で２位になった３人の順位はどうなるか。　　［　　　　　］位

３）等間隔ウェイトの順位法、正規性ウェイトの順位法、一対比較法で評価値を求め、総合的な順位を決定せよ。

評価法	等間隔順位法	正規性順位法	一対比較法	順位
A				
B				
C				
D				

５．効用理論【第９回】

5.1 期待値と期待効用

　２つのくじがあります。あなたはどちらを選びますか。

くじ１

当選金額	10000	1000	0
確率	0.01	0.25	0.74
効用	1	0.05	0

くじ２

当選金額	1000	0
確率	0.4	0.6
効用	0.05	0

期待値

　くじ１：$E(X)=0.01\times10000+0.25\times1000+0.74\times0=350$

　くじ２：$E(X)=0.4\times1000+0.6\times0=400$　　　　　くじ１＜くじ２

果たしてこれで良いのだろうか。各人のくじへの思い入れは違うはず。

この問題を解決するために導入された概念が効用である。

効用とは実際の価格や価値とは異なる、意思決定者の満足度である。

期待効用

　効用関数　$u(X)$　を導入する。

　この場合、$u(10000)=1,\ u(1000)=0.05,\ u(0)=0$

$$
\begin{aligned}
E(u(X)) &= 0.01\times u(10000)+0.25\times u(1000)+0.79\times u(0)\\
&= 0.01\times1+0.25\times0.05=0.01+0.0175\\
&= 0.0225
\end{aligned}
$$

　くじ１：

$$
\begin{aligned}
E(u(X)) &= 0.4\times u(1000)+0.6\times u(0)\\
&= 0.4\times0.05\\
&= 0.02
\end{aligned}
$$

　くじ２：　　　　　くじ１＞くじ２

5.2 効用関数

　$u(x)$ ：$0\le u(x)\le1$　単調増加（同じところがあっても右上がり）

　最小値 x_0 円（0 円）のとき $u(x_0)=0$

　最大値 x_1 円（10000 円）のとき $u(x_1)=1$　　　単調増加（右肩上がり）

どのようにして決めるか。
1） x_0 円と x_1 円が確率 $1/2$ で当たる場合、これと同等な確実にもらえるお金（確実同値額）はいくらか。→　$x_{0.5}$ 円

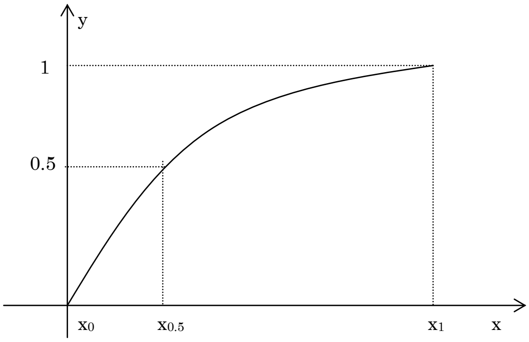
$$u(x_{0.5}) = 0.5$$

2） x_0 円と $x_{0.5}$ 円が確率 $1/2$ で当たる場合、この確実同値額はいくらか。→　$x_{0.25}$ 円

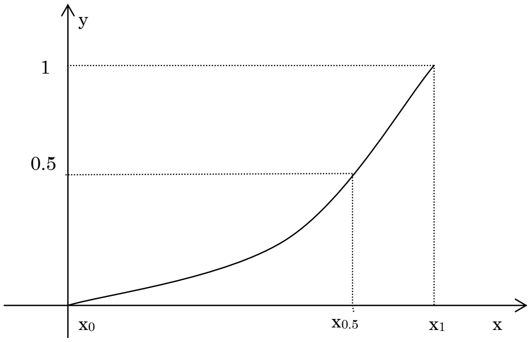
$$u(x_{0.25}) = 0.25$$

3） $x_{0.5}$ 円と x_1 円が確率 $1/2$ で当たる場合、この確実同値額はいくらか。→　$x_{0.75}$ 円

$$u(x_{0.75}) = 0.75$$



リスク回避型効用関数



リスク志向型効用関数

紙上で求める場合は、これらの点をつないでグラフを描く。

パソコンで式を求める場合は、これらの数値を元に

$$u(x) = a - be^{-cx}$$ リスク回避度一定型

注）リスク回避度　$\gamma = -u''/u' = c$
リスク回避型　$c > 0, b > 0$，リスク志向型　$c < 0, b < 0$

$$u(x) = h - k(e^{-ax} + be^{-cx})$$ リスク回避度単調型

などの関数の係数を決めることにより関数形を求める。

問題１

以下のような２つのくじがある。問いに答えよ。

くじ１

当選金額	100 万円	1 万円	はずれ
確率	0.001	0.1	0.899

くじ２

当選金額	10 万円	はずれ
確率	0.03	0.97

１）２つのくじの期待値を求めよ。

くじ１［　　　　　　　］円　くじ２［　　　　　　　］円

２）ある人の効用関数が $y=\sqrt{\dfrac{x\text{万円}}{100\text{万円}}}$ で与えられるとき、以下の場合の効用の値を Excel を用いて求めよ。但し、例えば $\sqrt{2}$ は = 2^0.5 として求められる。

金額	0 円	1 万円	10 万円	100 万円
効用値				

３）この人はリスク回避型かリスク志向型か。［　　　　　　　　］型

ヒント：1 万円、10 万円の効用値が、$y = x/100$ の y 値（0.01, 0.1）と比べて
大きいならリスク回避型、小さいならリスク志向型

４）２つのくじの期待効用を求めよ。

くじ１［　　　　　　　］　　くじ２［　　　　　　　］

５）この人はどちらのくじを選ぶと思われるか。

［くじ１・くじ２］

問題２

あなたの 0 円～10 万円までの効用関数を調べてみましょう。

１）0 円と 10 万円が確率 1/2 ずつで当たるくじがあります。このくじをあなたが競売で買うとすると、払える最高の金額 x2 万円はいくらですか。

x2 ＝［　　　　　］万円

2）0 円と 1）で決めた x2 万円が確率 1/2 ずつで当たるくじがあります。このくじをあなたが競売で買うとすると、払える最高の金額 x1 万円はいくらですか。

x1 ＝［　　　　　］万円

3）1）で決めた x2 万円と 10 万円が確率 1/2 ずつで当たるくじがあります。このくじをあなたが競売で買うとすると、払える最高の金額 x3 万円はいくらですか。

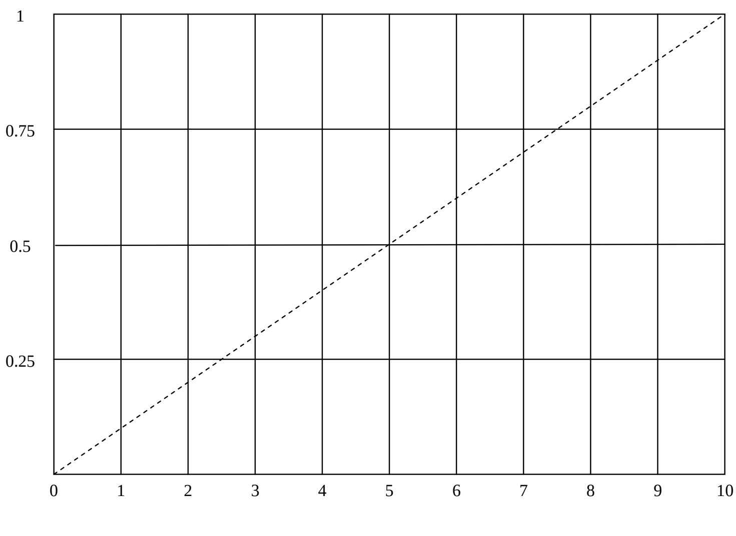
x3 ＝［　　　　　］万円

4）以下の値を下のグラフにプロットしていきましょう。

（0, 0），（x1, 0.25），（x2, 0.5），（x3, 0.75），（100, 1）

5）プロットが終わったらそれをなめらかに結びましょう。

どんな線になりましたか。



6）斜めの点線より上側ならリスク回避型、下側ならリスク志向型です。

あなたはどちらですか。　　　　［　　　　　　　　］型

演習　非線形最小２乗法による当てはめ【第 10 回】

パソコンを使って自分の効用関数を求めてみよう。

利用する効用関数

$$u(x)=h-k(e^{-ax}+be^{-cx})$$ リスク回避度単調型効用関数

１）データを入力する。（Samples¥効用理論 1.txt を元にするとよい）

効用値	金額
0	0
0.25	
0.5	
0.75	
1	10

２）最小 2 乗法での効用関数の入力

$u(0)=0$ となるように

$$u(0)=h-k(1+b)=0 \quad \rightarrow \quad h=k(1+b)$$

$$u(x)=k(1+b)-k(e^{-ax}+be^{-cx})=k(1+b-e^{-ax}-be^{-cx})$$

$u(10)=1$ となるように

$$u(10)=k(1+b-e^{-10a}-be^{-10c})=1 \quad \rightarrow \quad k=1\big/(1+b-e^{-10a}-be^{-10c})$$

$$u(x)=(1+b-e^{-ax}-be^{-cx})\big/(1+b-e^{-10a}-be^{-10c})$$

入力は

```
(1+b-exp(-a*var2)-b*exp(-c*var2))/ (1+b-exp(-10*a)-b*exp(-10*c))
```

別解法（直接以下の形で入力する）

```
h-k*(exp(-a*var2)+b*exp(-c*var2))
```

今回はこの形を使用する。

実際に計算してみよう。

例１

効用値	金額
0	0
0.25	1
0.5	3
0.75	6
1	10

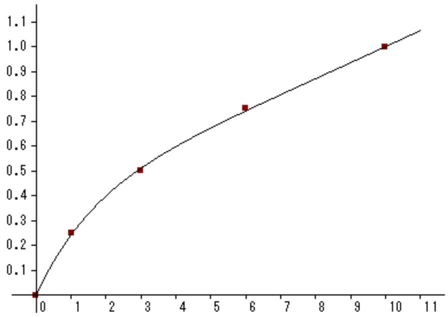


図 1 リスク回避型効用関数

例２

効用値	金額
0	0
0.25	4
0.5	7
0.75	9
1	10

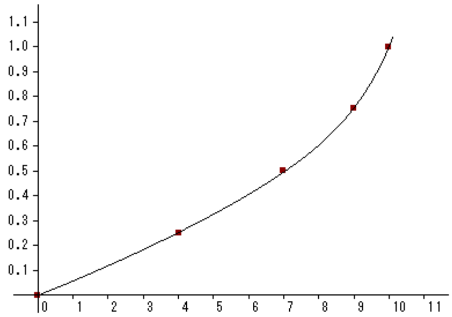


図 2 リスク志向型効用関数

例３

効用値	金額
0	0
0.25	1
0.5	5
0.75	9
1	10

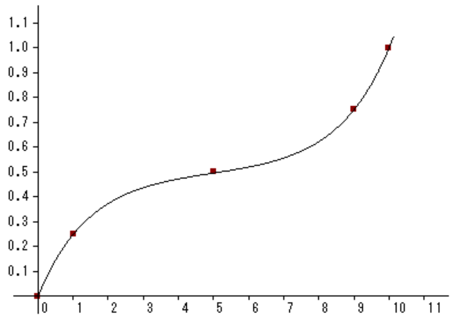


図 1 混合型効用関数

あなたの効用関数は？

$u(x) = h - k(e^{-ax} + be^{-cx})$　　　リスク回避度単調型効用関数

a, b, c のところは計算結果から

$$u(x) = (1 + b - e^{-ax} - be^{-cx}) \big/ (1 + b - e^{-10a} - be^{-10c})$$

(1+b-exp(-a*var2)-b*exp(-c*var2))/ (1+b-exp(-10*a)-b*exp(-10*c))

k と h は Excel を使って以下の式で計算する。

$k = 1\big/(1 + b - e^{-10a} - be^{-10c})$　　但し、e^x =exp(x) を用いる。

=1/(1+b-exp(-10*a)-b*exp(-10*c))

$h = k(1 + b)$

=k*(1+b)

結果　$u(x) = h - k(e^{-ax} + be^{-cx})$

a	
b	
c	
k	
h	

別解法

直接以下の関数で計算する。

h-k*(exp(-a*var2)+b*exp(-c*var2))

$$u(x) = h - k(e^{-ax} + be^{-cx})$$

a	
b	
C	
K	
H	

６．ラフ集合分析【第 11 回】

例

以下の表（Samples¥ラフ集合分析 1.txt）は菓子メーカーの新製品の試食の結果を示したものである。これからどんな好みのルールが見つかるだろうか。

サンプル	原料	味	形	口当たり	選好
s1	小麦	塩	丸	堅め	それほど
s2	じゃが	しょうゆ	丸	堅め	好き
s3	もろこし	塩	丸	ソフト	それほど
s4	小麦	しょうゆ	四角	ソフト	好き
s5	じゃが	塩	四角	堅め	それほど
s6	じゃが	しょうゆ	丸	ソフト	好き
s7	もろこし	塩	丸	ソフト	好き

用語解説

原料から口当たりまでを条件属性（属性)、選好を決定属性という。

この表を決定表という。（条件属性だけの表だと情報表）

決定属性で分類されるサンプルを決定クラスという。

ラフ集合分析とは

条件属性値により選好 i が決まるサンプル　　選好 i の下近似

条件属性値により選好 i の候補となるサンプル　　選好 i の上近似

これらを合わせて、選好 i のラフ集合という。

選好「好き」の下近似　{s2, s4, s6}

選好「好き」の上近似　{s2, s3, s4, s6, s7}

選好「それほど」の下近似　{s1, s5}

選好「それほど」の上近似　{s1, s3, s5, s7}

ラフ集合を使って、選好を決めるルールを求める分析をラフ集合分析という。

同じ下近似と上近似を与える最小数の属性の集合を決定表の縮約という。

確実に選好 i が決まる属性値の組み合わせを選好 i の決定ルールという。

ラフ集合分析の目的

決定表から、選好 i（例えば「好き」）を得るための、属性値についてのルールを抽出する。どんな属性値の組み合わせが好まれるかを見つけ出す。

利用法

下近似と上近似を求める　→　「下近似/上近似」ボタン

どんな属性が選好の分類を決めるのに必要か？　→　「決定表縮約」ボタン

決定表の縮約の中で特に重要なものは　→　縮約の中で共通する属性（コア）
どんなルールが抽出されるか　→　選好を指定して「決定ルール」ボタン
ルールの信頼性は　→　「決定ルール」の中で、C.I.（Covering Index）
ルールはどのサンプルで使われたか　→　「決定ルール」の中の「*」

問題

例の決定表（Samples¥ラフ集合分析 1.txt）はスナック菓子の属性と選好とを求めたものである。問いに答えよ。

１）条件属性は何か。［　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　］
２）決定属性は何か。［　　　　　　　］
３）選好「好き」の下近似　　　　［　　　　　　　　　　　］
　　選好「好き」の上近似　　　　［　　　　　　　　　　　］
４）選好「それほど」の下近似　　［　　　　　　　　　　　］
　　選好「それほど」の上近似　　［　　　　　　　　　　　］
５）３）と４）のラフ集合を与える決定表の縮約は３組ある。それを示せ。
　　［　　　　　　　　　　］［　　　　　　　　　　］［　　　　　　　　　　］
６）縮約のコアは何か。［　　　　　　　　］
７）選好「好き」となるルールと C.I.の値を上から２つ求めよ。

ルール	C.I.

８）最初のルールはどのサンプルの識別に使われたか。サンプルの名前を示せ。
　　［　　　　　　　　　　　　　　］
９）選好「それほど」となるルールと C.I.の値の一番上のものを求めよ。

ルール	C.I.

10）最初のルールはどのサンプルの識別に使われたか。サンプルの名前を示せ。
　　［　　　　　　　　　　　　　　］

演習

以下の決定表（Samples¥ラフ集合分析 2.txt）は車の属性と選好とを求めたものである。問いに答えよ。

サンプル	カラー	造形	ドアタイプ	イメージ	選好
s1	色彩系	有機的	２ドア	パーソナル	好き
s2	色彩系	曲線的	２ドア	スポーティ	それほど
s3	白黒系	曲線的	４ドア	フォーマル	それほど
s4	白黒系	有機的	４ドア	パーソナル	好き
s5	白黒系	曲線的	４ドア	パーソナル	それほど
s6	色彩系	曲線的	２ドア	スポーティ	好き

１）条件属性は何か。［　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　］

２）決定属性は何か。［　　　　　　　　　］

３）選好が「好き」となるサンプル数　　　［　　　　　］

　　選好が「それほど」となるサンプル数　［　　　　　］

４）選好「好き」の下近似　　　　　［　　　　　　　　　　　　］

　　選好「好き」の上近似　　　　　［　　　　　　　　　　　　］

５）選好「それほど」の下近似　　　［　　　　　　　　　　　　］

　　選好「それほど」の上近似　　　［　　　　　　　　　　　　］

６）４）と５）のラフ集合を与えるような決定表の縮約を３組示せ。

　　｛　　　　　，　　　　　　｝｛　　　　　，　　　　　　｝｛　　　　　，　　　　　　］

７）変数選択で、カラー、造形、ドアタイプと選好を選んだ場合、ラフ集合は４）と５）で求めたものと同じか。　［同じ・違う］

８）変数選択で、カラー、造形、選好を選んだ場合、ラフ集合は４）と５）で求めたものと同じか。　［同じ・違う］

９）変数選択で、カラー、選好を選んだ場合、ラフ集合は４）と５）で求めたものと同じか。　［同じ・違う］

変数選択はすべてを選びなおすこと。

10）選好「好き」となるルールと C.I.（Covering Index）の値を求めよ。

ルール	C.I.
①	
②	
③	

11）どのルールが選好決定によく使われたか。番号を示せ。［　　　　　　　］

12）①のルールはどのサンプルの識別に使われたか。サンプルの名前を並べて示せ。

［　　　　　　　　　　　　　　　　　　］

13）選好「それほど」となるルールと C.I.の値を求めよ。

ルール	C.I.
①	
②	
③	
④	

14）どのルールが選好決定によく使われたか。番号を示せ。［　　　　　　　　］

15）①のルールはどのサンプルの識別に使われたか。サンプルの名前を並べて示せ。

［　　　　　　　　　　　　　　　　　　］

演習【第 12 回】

以下の表（Samples¥ラフ集合分析 1.txt、3 頁）は菓子メーカーの新製品の試食の結果を示したものである（回答者複数）。これからどんな好みのルールが見つかるだろうか。

	原料	味	形	口当たり	選好 1	選好 2	選好 3
s1	小麦	塩	丸	堅め	それほど	それほど	それほど
s2	じゃが	しょうゆ	丸	堅め	好き	好き	好き
s3	もろこし	塩	丸	ソフト	それほど	それほど	好き
s4	小麦	しょうゆ	四角	ソフト	好き	好き	好き
s5	じゃが	塩	四角	堅め	それほど	好き	それほど
s6	じゃが	しょうゆ	丸	ソフト	好き	好き	好き
s7	もろこし	塩	丸	ソフト	好き	好き	好き

問題

1）条件属性は何か。[ ]

2）選好が「好き」となるサンプル数（3 人の合計） [ ]

選好が「それほど」となるサンプル数（3 人の合計） [ ]

3）選好 1 が「好き」の下近似 [ ]

選好 1 が「好き」の上近似 [ ]

4）選好 1 が「それほど」の下近似 [ ]

選好 1 が「それほど」の上近似 [ ]

5）上のラフ集合を与える決定表の縮約を、表示された組の数だけ{ }でくくって示せ。

[ ]

6）選好 2 が「好き」の下近似 [ ]

選好 2 が「好き」の上近似 [ ]

7）選好 2 が「それほど」の下近似 [ ]

選好 2 が「それほど」の上近似 [ ]

8）上のラフ集合を与える決定表の縮約を、表示された組の数だけ{ }でくくって示せ。

[ ]

9）選好 3 が「好き」の下近似 [ ]

選好 3 が「好き」の上近似 [ ]

10）選好 3 が「それほど」の下近似　　　　　［　　　　　　　　　　　］
　　選好 3 が「それほど」の上近似　　　　　［　　　　　　　　　　　］

11）上のラフ集合を与える決定表の縮約を、表示された組の数だけ{ }でくくって示せ。

［　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　］

12）選好「好き」となるルールと「C.I.全体」の値を上から 3 つ求めよ。

ルール	C.I.全体
①	
②	
③	

13）どのルールが選好決定に最もよく使われたか。番号を示せ。［　　　　　　］

14）①のルールが適用されなかった人を選好の番号で示せ。［　　　］空欄も可

15）①のルールはどのサンプルの識別に使われたか。サンプルの番号を並べて示せ。

［　　　　　　　　　　　　　］　　ヒント：適合表を付けると分かる

16）回答者全員「好き」と答えたサンプルは何か。番号を並べて示せ。

［　　　　　　　　　　　］　　　ヒント：適合率＝好きの数÷回答者数

17）選好「それほど」となるルールと「C.I.全体」の値を上から 3 つ求めよ。

ルール	C.I.全体
①	
②	
③	

18）どのルールが選好決定に最もよく使われたか。番号を示せ。［　　　　　　］

19）①のルールが適用されなかった人を選好の番号で示せ。［　　　］空欄も可

20）①のルールはどのサンプルの識別に使われたか。サンプルの番号を並べて示せ。

［　　　　　　　　　　　　　］　　ヒント：適合表を付けると分かる

21）回答者全員「それほど」と答えたサンプルは何か。番号を並べて示せ。

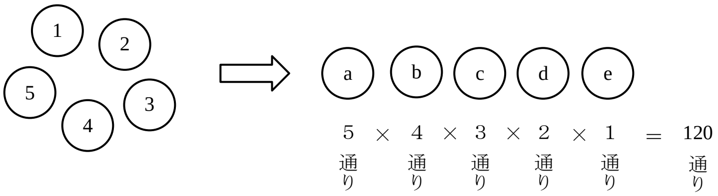
［　　　　　　　　　　　］　　　ヒント：適合率＝それほどの数÷回答者数

７．事後確率とベイズの定理【第１３回】

6.1 場合の数（順列）

例

5 個の番号の付いたボールを 1 列に並べる場合の数



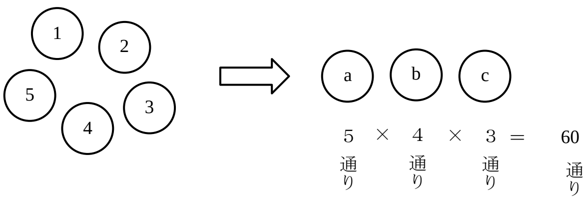
$$5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$$

n 個の異なるものを 1 列に並べる場合の数

$$n! = n\times (n-1)\times (n-2)\times \cdots \times 2\times 1$$

例

5 個の番号の付いたボールから 3 個を取り出し 1 列に並べる場合の数



$${}_5P_3 = 5\times 4\times 3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

n 個の異なるものから r 個取り出し 1 列に並べる場合の数

$${}_nP_r = n\times (n-1)\times (n-2)\times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

問題１

以下の場合の数を求めよ。但し、MS-Excel では、$n! = fact(n)$ で与えられる。

１）6 個の異なるものを 1 列に並べる場合の数　［　　　　　］

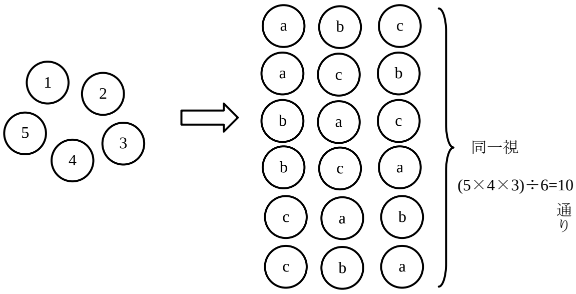
２）7 個の異なるものから 3 個取り出して並べる場合の数　［　　　　　］

３）10 個の異なるものから 4 個取り出して並べる場合の数　［　　　　　］

6.2 場合の数（組合せ）

例

5 個の番号の付いたボールから 3 個取り出す場合の数



$$ {}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5!}{(5-3)!3!} $$

n 個の異なるものから r 個取り出す場合の数

$$ {}_nC_r = {}_nP_r / r! = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad \left(= {}_nC_{n-r}\right) $$

問題２

以下の場合の数を求めよ。但し、MS-Excel では ${}_n\mathrm{C}_r = combin(n, r)$ で与えられる。

１）6 個の異なるものから 2 個取り出す場合の数　［　　　　　］
２）8 個の異なるものから 3 個取り出す場合の数　［　　　　　］
３）10 個の異なるものから 4 個取り出す場合の数　［　　　　　］
４）10 個の異なるものから 6 個取り出す場合の数　［　　　　　］

6.3 その他の場合の数

問題３

コインもサイコロも区別できるものとして以下について答えよ。

１）コインを 2 枚投げる場合の表と裏の出方の場合の数　［　　　　　］
２）コインを 2 枚投げる場合に表が 1 枚出る場合の数　［　　　　　］
３）コインを 3 枚投げる場合の表と裏の出方の場合の数　［　　　　　］
４）コインを 3 枚投げる場合に表が 2 枚出る場合の数　［　　　　　］
５）サイコロを２つ振る場合の目の出方の場合の数　［　　　　　］
６）サイコロを２つ振る場合に目の合計が 3 になる場合の数　［　　　　　］
７）サイコロを２つ振る場合に目の合計が 5 になる場合の数　［　　　　　］

８）サイコロを２つ振る場合に目の合計が奇数になる場合の数［　　　　　　　］

6.4 事象と集合

例

さいころを投げる場合の出る目の事象

1, 2, 3, 4, 5, 6 → $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ：全事象（集合の言葉では全体集合）

さいころを 2 個投げる場合の出る目の事象

$U=\{(1,1), (1,2), (1,3), \cdots, (6,5), (6,6)\}$ ：全事象（全体集合）

注）さいころは区別できるとして求める

例

さいころの目が奇数となる事象　A

$A=\{1, 3, 5\}$　　　$\overline{A}=\{2, 4, 6\}$ ：余事象（集合の言葉では補集合）

さいころの目が 3 以下となる事象　B

$B=\{1, 2, 3\}$　　　$\overline{B}=\{4, 5, 6\}$

さいころの目が奇数で「かつ」3 以下となる事象

$A\cap B=\{1, 3\}$ ：積事象（積集合）

さいころの目が奇数「または」3 以下となる事象

$A\cup B=\{1, 2, 3, 5\}$ ：和事象（和集合）

さいころの目が 4 または 6 となる事象を $C=\{4, 6\}$ とすると、

$A\cap C=\phi$ ：空事象（空集合）

積事象が空事象となるお互いの事象を排反事象という。

6.5 確率とは

1. 統計的確率

ある試行を n 回繰り返して、事象 A が r 回起こったとき、$\lim_{n\to\infty} r/n = p$ ならば、p を事象 A の起こる（統計的）確率という。

2. 数学的確率

ある試行の全事象 U に含まれる要素の数を $n(U)$とし、これらは同等に起こるものとする。事象 A に含まれる要素の数を $n(A)$とするとき、事象 A の起こる（数学的）確率 p' を $p'=n(A)/n(U)$ と定義する。

3. 統計的確率と数学的確率の同等性

$p=p'$　　　大数の法則　　　　　　　注）確率の値　$0\le p\le 1$

例

サイコロの目が奇数となる確率

$$p = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

さいころの目が奇数でかつ 3 以下となる確率

$$p = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3 枚の硬貨を同時に投げるとき、1 枚が表である確率

$$p = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$$ 硬貨は区別できるとして求める

a と b の２つのさいころを振って、a が偶数、b が 2 以下となる確率

$$p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

このように事象 A と事象 B とが同時に起こる場合、その生起確率が $P = P_A \times P_B$ で与えられる場合、２つの事象は互いに独立であるという。

問題 1

１）さいころの目が 2 以下となる確率 [ ]

２）さいころの目が偶数で 4 以下となる確率 [ ]

３）3 枚の硬貨を同時に投げるとき、すべて表である確率 [ ]

４）4 枚の硬貨を同時に投げるとき、1 枚が表である確率 [ ]

５）2 個のさいころを振って、合計が 3 になる確率 [ ]

６）2 個のさいころを振って、合計が 5 になる確率 [ ]

２項分布　【第 14 回】

じゃんけんで 4 回中 3 回勝つ確率

$$p = {}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4\times\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

サイコロを 5 回振って 1 の目が 2 回出る確率

$$p = {}_5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.161$$

問題

１）じゃんけんで 4 回中 1 回勝つ確率　［　　　　］

２）じゃんけんで 6 回中 3 回勝つ確率　［　　　　］

３）さいころを 4 回振って 2 以下の目が 2 回出る確率　［　　　　］

４）さいころを 4 回振ってすべて 5 以上の目となる確率　［　　　　］

6.6 事後確率とベイズの定理

これまでは事象 A_i（$i=1,\cdots,m$）と事象 B_j（$j=1,\cdots,n$）が同時に起こる場合の確率 $P(A_i\cap B_j)$ を考えてきたが、ここでは事象 B_j が起こったことが分かっている場合に事象 A_i が起きる確率を考えてみる。この確率を $P(A_i\,|\,B_j)$ と書き、B_j の事後確率と呼ぶ。同時確率と事後確率の関係は、以下のようになる。

$$P(A_i\,|\,B_j) = \frac{P(A_i\cap B_j)}{P(B_j)}$$

$$P(A_i\cap B_j) = P(B_j\,|\,A_i)P(A_i) = P(A_i\,|\,B_j)P(B_j)$$

この関係から以下のような式が導かれる。

$$P(A_i\,|\,B_j) = \frac{P(B_j\,|\,A_i)P(A_i)}{P(B_j)}$$

ここで $P(B_j)$ については以下のようになる。

$$P(B_j) = \sum_k P(B_j\,|\,A_k)P(A_k)$$

これを上の式に代入して

$$\boxed{P(A_i\,|\,B_j) = \frac{P(B_j\,|\,A_i)P(A_i)}{\sum_k P(B_j\,|\,A_k)P(A_k)}}$$

これは B_j の事後確率を A_k の事後確率に変換する重要な公式で、ベイズの定理と呼ばれている。

問題１　事後確率

雨の確率を $P(A)$、天気予報が雨と予測する確率を $P(B) = 0.3$、天気予報が雨でかつ雨となる確率を $P(A \cap B) = 0.2$ のとき、天気予報で雨という予報を聞いた後の、雨となる確率はいくらか

$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) =$ ［　　　　　］

問題２

今袋１と袋２の 2 つの袋に赤玉と白玉が 10 個ずつ入っているとする。袋 1 には赤玉 7 つと白玉　3 つ、袋２には赤球 4 つと白玉 6 つとし、外見上見分けが付かないとする。今、それらの袋から１つを選び、玉を取り出すことを考える。以下のベイズの定理を使って、問いに答えよ。

$$P(A_1 | B_1) = \frac{P(B_1 | A_1) P(A_1)}{P(B_1 | A_1) P(A_1) + P(B_1 | A_2) P(A_2)}$$ 　ベイズの定理

袋 1 を選ぶ事象を A_1、袋２を選ぶ事象を A_2 とすると、2 つの袋が完全に見分けが付かなければ、事象の出現確率は以下となる。

$P(A_1) = P(A_2) =$ ［　　　　　］

１）袋を選んで 1 つ玉を取り出したとき、それが赤玉であったとする。選んだ袋が袋１である確率を求めよ。

袋を選んで取り出した玉が赤玉である事象を B_1 とすると

袋１の場合　$P(B_1 | A_1) =$ ［　　　　　］

袋２の場合　$P(B_1 | A_2) =$ ［　　　　　］

ベイズの定理より、選んだ袋が袋１である確率は、

$$P(A_1 | B_1) = \frac{P(B_1 | A_1) P(A_1)}{P(B_1 | A_1) P(A_1) + P(B_1 | A_2) P(A_2)} = ［　　　　　］$$

２）袋を選んで 2 つ玉を取り出したとき、それが 2 つとも赤玉であったとする。選んだ袋が袋１である確率を求めよ。

袋を選んで取り出した球が 2 つとも赤玉である事象を B_1' とすると

袋１の場合　$P(B_1' | A_1) =$ ［　　　　　］

袋２の場合　$P(B_1' | A_2) =$ ［　　　　　］

ベイズの定理より、選んだ袋が袋 1 である確率は、

$$P(A_1 | B_1') = \frac{P(B_1' | A_1)P(A_1)}{P(B_1' | A_1)P(A_1) + P(B_1' | A_2)P(A_2)} = [\qquad\qquad]$$

問題３

抽選の箱がある。通常当たりくじは 10 本に 1 本の割合で入っているが、10 箱に 1 箱大当たりの箱があってそこには 10 本に 2 本の割合で当たりくじが入っている。今ある箱で、10 人の人が引くのを見ていたら、3 本の当たりが出た。この箱が大当たりの箱である確率を求めよ。但し、箱のくじは十分多く、多少くじをひいても当たりの確率に影響を与えないものとする。

大当たりの箱を選ぶ事象を A_1、普通の箱を選ぶ事象を A_2 であるとすると

$P(A_1) =$ ［　　　　　］

$P(A_2) =$ ［　　　　　］

くじで 10 人中 3 本の当たりがでた事象を B とすると、

大当たりの箱の場合　$P(B | A_1) = {}_{10}C_3 (0.2)^3 (0.8)^7 =$ ［　　　　　］

普通の箱の場合　$P(B | A_2) = {}_{10}C_3 (0.1)^3 (0.9)^7 =$ ［　　　　　］

ベイズの定理より、この箱が大当たりの箱である確率は、

$$P(A_1 | B) = \frac{P(B | A_1)P(A_1)}{P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2)} = [\qquad\qquad]$$

トピックス　３つの扉の問題について

テレビショーで、後ろに大当たりの景品が隠れている扉を回答者が当てる番組があった。扉は A, B, C と３種類ある。回答者がまず１つの扉を指定すると、司会者は残された扉のうち当たりでない扉の１枚を空けて見せる。回答者はその後、残された２枚の扉のうちの１枚を再度選ぶが、自分が最初に言った扉と同じでも、違っていても構わない。

この番組にある女性から、「扉を変えた方が得である」という意見が出され、学者も交えて論争となった。この女性の意見は正しいか？（これは実話だそうです。）

前提

１．最初に回答者は扉Ａを選んだものとする。

２．司会者は扉Ｃを開けたものとする。

事象

A ：扉Ａが正解である。

B ：扉Ｂが正解である。

C ：扉Ｃが正解である。

E ：司会者は扉Ｃを開ける。

ベイズの定理

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C)}$$

$$P(B|E) = \frac{P(E|B)P(B)}{P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C)}$$

最初の回答者が扉を選ぶ段階では

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

最初に回答者が扉Ａを選んでいるので

$$P(E|A) = \frac{1}{2}, \qquad P(E|B) = 1, \qquad P(E|C) = 0$$

これらの関係を使うと

$$P(A|E) = \frac{1}{3}, \qquad P(B|E) = \frac{2}{3}$$

このことから、選ぶ扉を変える方が当たる確率は 2 倍になる。

解答

問題１

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = 0.2/0.3 = 0.67$$

問題２

１）

袋を選んで取り出した玉が赤玉である事象を B_1、白玉である事象を B_2 とする。この例の場合、取り出した玉が赤玉なので、事象 B_1 が観測されたことになる。このときに自分の選んだ袋が袋 1 である確率を考える。

ベイズの定理

$$P(A_1 \mid B_1) = \frac{P(B_1 \mid A_1)P(A_1)}{P(B_1 \mid A_1)P(A_1) + P(B_1 \mid A_2)P(A_2)}$$

$$= \frac{\frac{7}{10} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{2}} = \frac{7}{11} = 0.63636$$

何も情報がないときに比べて、袋 1 である確率が高くなっていることが分る。

２）

取り出した 2 つの玉の色で、以下のように事象を考える。事象 B_1' を 2 つとも赤玉の事象とする。赤玉 2 つであることが分かっている場合、以下のようにして選んだ袋が袋 1 である確率を計算する。

$$P(A_1 \mid B_1') = \frac{P(B_1' \mid A_1)P(A_1)}{P(B_1' \mid A_1)P(A_1) + P(B_1' \mid A_2)P(A_2)}$$

$$= \frac{\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{1}{2}} = \frac{7}{9} = 0.77778$$

赤玉 2 つという情報は、選んだ袋が袋 1 であるということを後押しする情報になっている。

問題３

現在の箱が大当たりの箱である事象を A_1、普通の箱である事象を A_2 であるとする。くじで 10 人中 3 本の当たりがでた事象を B とすると、ベイズの定理より以下のようになる。

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2)}$$

ここで

$$P(B|A_1) = {}_{10}C_3 \left(\frac{2}{10}\right)^3 \left(\frac{8}{10}\right)^7 = \frac{120 \times 2^3 \times 8^7}{10^{10}} = 0.20133$$

$$P(B|A_2) = {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{10}\right)^3 \left(\frac{9}{10}\right)^7 = \frac{120 \times 9^7}{10^{10}} = 0.05740$$

$$P(A_1) = \frac{1}{10}, \quad P(A_2) = \frac{9}{10}$$

以上より、

$$P(A_1|B) = \frac{2^3 \times 8^7}{2^3 \times 8^7 + 9^7 \times 9} = \frac{1}{1 + (9/8)^8} = 0.28044$$

最後の部分は電卓か Excel で計算すること。