

6. 線形計画法（ゲーム理論への準備）【第1回】

6.1 線形計画法とは

例

原料の供給量の範囲内で、利益が最大となる製品の生産量は？

原料 \ 製品	1	2	原料の供給量 (kg)
A	1	3	60
B	3	4	100
C	2	1	50
製品1単位当りの利益 (万円)	5	6	

問題の定式化

目的関数 (objective function)

$$z = 5x_1 + 6x_2 \quad \text{利益の最大化}$$

制約条件 (constraints)

$$x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

このように線形の目的変数に線形の制約条件が付く問題を線形計画問題といい、それを解く方法も含めて線形計画法という。線形計画問題を解く有名な方法はシンプレックス法である。

パソコンでの解法【分析・数学・OR・線形計画法】 「テキストエディタ」

$$z = 5 * x_1 + 6 * x_2 \text{ max}$$

$$x_1 + 3 * x_2 \leq 60$$

$$3 * x_1 + 4 * x_2 \leq 100 \quad \Rightarrow \quad \text{「テキスト入力」} \quad \Rightarrow \quad \text{「結果出力」}$$

$$2 * x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

最適解

x1	x2	z
20	10	160

問題 1

以下の線形計画問題の最適解を求めよ。

目的関数 $z = x_1 + 2x_2 + x_3$ 最大化

$$\text{制約条件} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 600 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 300 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

最適解

x1	x2	x3	z
60	180	0	420

問題 2

製品 1 と 2 の製造のためには 3 つの原料 A, B, C が必要である。各製品 1 単位製造するために必要な各原料の量 (kg)、各原料の供給量の上限 (kg) 及び、各製品 1 単位生産するごとの利益 (万円) は以下の表の通りである。原料の供給量の範囲内で、利益が最大となる各製品の生産量 (単位) はいくらか。解答は少数で表せ。

	製品 1	製品 2	原料供給量上限
原料 A	1.5	3.2	60
原料 B	3.4	4.3	100
原料 C	2.1	1.4	50
利益 (万円)	5.2	6.3	

最適解

製品 1	製品 2	利益
17.5644	9.3677	150.3513

6.2 一般の線形計画問題【第2回】

先週の問題（標準的は線形計画問題）

目的関数

$$z = 5x_1 + 6x_2 \quad \text{最大化}$$

制約条件

$$x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

標準的な線形計画問題とは？

- 1) 最大化問題である
- 2) 右辺が非負
- 3) 変数が非負
- 4) 不等号の向きが「 $\leq$ 」

これ以外の場合にはどうするか。

2段階シンプレックス法というものが用意されている。

例1 等号条件の場合

目的関数

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \text{最大化}$$

制約条件

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 60$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

最適解

x_1	x_2	x_3	z
20	0	20	80

例2 変数に非負条件が付かない場合

目的関数

$$z = x_1 + 2x_2 \quad \text{最大化}$$

制約条件

$$-2x_1 + x_2 \geq -2$$

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 \geq 0$$

x_2 に非負条件なし

$$x_2 = x_{2_1} - x_{2_2}$$

のように分解して答えを求める。

最適解

x1	x2	z
0	4	8

問題1 以下の線形計画問題の最適解を求めよ。

目的関数

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad \text{最大化}$$

制約条件

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 20$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

最適解

x1	x2	x3	z
3.5714	4.6429	0	21.0714

問題2 以下の線形計画問題の最適解を求めよ。

目的関数

$$z = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{最小化}$$

制約条件

$$-x_1 + x_2 = 60$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 40$$

$$x_2 \geq 0$$

最適解

x1	x2	z
-16	44	100

演習 1

1) 以下の線形計画問題の最適解を求めよ。

目的関数 $z = 3x_1 + 2x_2$ 最大化

$$\text{制約条件} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 50 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

最適解

x_1	x_2	z
22	6	78

2) 制約条件が以下のように変わると解はどうなるか。表示されるコメントを書き、その理由を考えよ。

$$\text{制約条件} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 50 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

コメント [解をいくらでも大きくできます]

3) 制約条件が以下のように変わると解はどうなるか。表示されるコメントを書き、その理由を考えよ。

$$\text{制約条件} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

コメント [正值解がありません]

演習 2

以下の 2 つの問題は互いに双対問題の関係にあると言うが、質問に答えて、空欄を埋めよ。但し、主問題を表に入力すると、双対問題は「双対問題作成」ボタンで別のページに作ることができる。

主問題

$$z = 5x_1 + 6x_2 \quad \text{最大化}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

双対問題

$$z' = 60y_1 + 100y_2 + 50y_3 \quad \text{最小化}$$

$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 6$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

- 1) 主問題と双対問題の解を求めよ。

主問題の解

x1	x2	z
20	10	160

双対問題の解

y1	y2	y3	z'
0	1.4	0.4	160

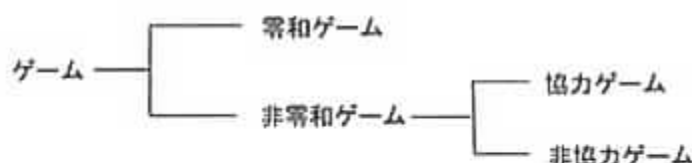
- 2) 主問題が最大化問題なら、双対問題は「**最小化**」問題である。
- 3) 主問題の最大値と双対問題の最小値は値が「**等しい**」。
- 4) 双対問題の解は、主問題の答の中で「**双対価格**」として表示されている。
- 5) 主問題の制約式の不等号が $\leq$ なら、双対問題では「 **$\geq$** 」である。
- 6) 主問題の横に並んだ制約式の係数は、双対問題では「**縦**」に並んでいる。
- 7) 主問題の目的関数の係数は、双対問題の制約式の「**右**」辺に並んでいる。

以上述べたことがらは主問題と双対問題の関係として一般的に言えることがらである。

7. ゲーム理論（意思ある相手を対象とする意思決定）【第1回】

ゲーム理論の取り扱う問題

意思決定主体が自らの利益の最大化をはかって行動し、結果が相手の行動に依存する問題



7.1 純粋戦略零和2人ゲーム

純粋戦略（純戦略）ゲームとは1回の打ち手で勝負を決めるゲームのこと

ゲームの利得行列（プレイヤー1の利得で表す）

		プレイヤー2				
		1	2	3	4	5
プレイヤー1	1	7	-1	-2	5	-3
	2	4	3	2	3	3
	3	-1	1	0	1	5
	4	0	8	1	2	-2

解法

プレイヤー1は、自分の戦略それぞれに対して最悪の場合を想定する。

$$1 : -3, 2 : 2, 3 : -1, 4 : -2 \quad (\min_j a_{ij} = \{-3, 2, -1, -2\})$$

それぞれの最悪の場合の中でも最良の手を選ぶ。

$$\text{戦略2を選択} \quad \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{-3, 2, -1, -2\} = 2$$

利得2をマクスミン値と呼ぶ

プレイヤー2も、自分の戦略それぞれに対して最悪の場合を想定する。

$$1 : 7, 2 : 8, 3 : 2, 4 : 5, 5 : 5 \quad (\max_j a_{ij} = \{7, 8, 2, 5, 5\})$$

それぞれの最悪の場合の中でも最良の手を選ぶ。

$$\text{戦略3を選択} \quad \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \{7, 8, 2, 5, 5\} = 2$$

利得2をミニマックス値と呼ぶ

$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i^*, j^*}$ のとき、均衡点が存在すると言いい、 a_{i^*, j^*} の値をゲームの値と呼ぶ。同じ値の均衡点が複数ある場合もある。

均衡点が存在しない場合

利得行列の例

		プレイヤー 2		
		1	2	3
プレイヤー 1	1	5	2	-2
	2	2	1	3
	3	-1	3	6

プレイヤー 1 : 戦略 2 を選択 $\max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{-2, 1, -1\} = 1$

プレイヤー 2 : 戦略 2 を選択 $\min_j \max_i a_{ij} = \min_j \{5, 3, 6\} = 3$

均衡点は存在しない

問題 1

利得行列が以下のように与えられる純粋戦略零和 2 人ゲームの解を求めよ。

利得行列	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
------	--

プレイヤー 1 : $\max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{ \textcolor{red}{3}, \textcolor{red}{1} \} = [\textcolor{red}{3}]$

戦略 [/] を選択 利得 [$\textcolor{red}{3}$]

プレイヤー 2 : $\min_j \max_i a_{ij} = \min_j \{ \textcolor{red}{3}, \textcolor{red}{4} \} = [\textcolor{red}{3}]$

戦略 [/] を選択 損失 [$\textcolor{red}{3}$]

均衡点 あり・なし

問題 2

利得行列が以下のように与えられる純粋戦略零和 2 人ゲームの解を求めよ。

利得行列	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
------	---

プレイヤー1: $\max_j \min_i a_{ij} = \max_j \{ 2, 3, 2 \} = [3]$

戦略 [2] を選択 利得 [3]

プレイヤー2: $\min_j \max_i a_{ij} = \min_j \{ 5, 7, 6 \} = [5]$

戦略 [/] を選択 損失 [5]

均衡点 [あり・なし]

問題3

利得行列が以下のように与えられる純粋戦略零和2人ゲームの解を求めよ。

$$\text{利得行列} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

プレイヤー1: $\max_j \min_i a_{ij} = \max_j \{ -1, -3, -3 \} = [-1]$

戦略 [/] を選択 利得 [-1]

プレイヤー2: $\min_j \max_i a_{ij} = \min_j \{ 3, -1, 4, 2 \} = [-1]$

戦略 [2] を選択 損失 [-1]

均衡点 [あり・なし]

7.2 混合戦略零和2人ゲーム【第2回】

例

$$\text{利得行列} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{プレイヤー1: } \max_i \min_j a_{ij} = \max_i (\quad, \quad) = [\quad]$$

戦略 [2] を選択 利得 [2]

$$\text{プレイヤー2: } \min_j \max_i a_{ij} = \min_j (\quad, \quad) = [\quad]$$

戦略 [2] を選択 損失 [3]

均衡点 [あり・なし] 純粋戦略零和2人ゲームとして解はあるか。 [ある・ない]

均衡点は存在しないが、戦略の選択に確率の概念を導入すると均衡点が得られることが知られている。即ち、2人のプレイヤーがそれぞれの確率で手を打ち続けるとそれが2人にとって最良となる。(1回限りの勝負ではない)

線形計画法によって確率的な解が求められる。

プレイヤー1: 確率 p_1 で戦略1、確率 p_2 で戦略2を選択するとする。

プレイヤー2が戦略1のとき

$$\text{プレイヤー1の利得の期待値} \quad 5p_1 + 2p_2$$

プレイヤー2が戦略2のとき

$$\text{プレイヤー1の利得の期待値} \quad p_1 + 3p_2$$

これらがある数 u より大きいとして、 u を最大化する。 線形計画法

目的関数

$$z = u \quad \text{最大化}$$

制約式

$$5p_1 + 2p_2 - u \geq 0$$

$$p_1 + 3p_2 - u \geq 0$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_1, p_2 \geq 0$$

解答

プレイヤー1 (プレイヤー1の利得は目的関数値)

利得	p1	p2
2.6	0.2	0.8

プレイヤー2 (双対価格のところを見る。)

損失	q1	q2
2.6	0.4	0.6

問題1 プレイヤー1の

利得行列が以下のように与えられる零和2人ゲームの解を求めよ。

$$\text{利得行列} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

解答

$$\text{プレイヤー1: } \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{ 1, 1 \} = 1$$

$$\text{プレイヤー2: } \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \{ 2, 2 \} = 2$$

均衡点 [あり・なし] 純粋戦略零和2人ゲームとして解はあるか。 [ある・ない]

混合戦略の場合は以下を求めよ。

目的関数

$$z = u \quad \text{最大化}$$

制約式 (相手の戦略によらず一定の利得 u は確保)

$$2p_1 + p_2 - u \geq 0$$

$$p_1 + 2p_2 - u \geq 0$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_1, p_2 \geq 0$$

プレイヤー1

利得	p1	p2
1.5	0.5	0.5

プレイヤー2

損失	q1	q2
1.5	0.5	0.5

双対価格を見る

問題2【第3回】

利得行列が以下のように与えられる零和2人ゲームの解を求めよ。

$$\text{利得行列} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

解答

1) 純粋戦略問題として考える。

$$\text{プレイヤー1: } \max_j \min_i a_{ij} = \max_j \{ 2, 1 \} = [2]$$

$$\text{プレイヤー2: } \min_i \max_j a_{ij} = \min_i \{ 3, 4 \} = [3]$$

均衡点 [あり・なし]

純粋戦略零和2人ゲームとして解はあるか。 [ある・ない]

混合戦略の場合は以下を求めよ。

2) 線形計画問題 (プレイヤー1)

目的関数

$$z = u \quad \text{最大化}$$

制約式

$$2p_1 + 3p_2 - u \geq 0$$

$$4p_1 + p_2 - u \geq 0$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_1, p_2 \geq 0$$

3) 線形計画法の解

プレイヤー1

利得	p1	p2
2.5	0.5	0.5

プレイヤー2 (双対価格・利得と損失は目的関数値に同じ)

損失	q1	q2
2.5	0.75	0.25

注) 純粋戦略の問題を混合戦略の問題として解くと、少数解が求まることもある。

問題3

利得行列が以下のように与えられる零和2人ゲームの解を求めよ。

$$\text{利得行列} \begin{matrix} & \begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

解答

1) 純粋戦略問題として考える。

$$\text{プレイヤー1: } \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{ -2, 1, -1 \} = [1]$$

$$\text{プレイヤー2: } \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \{ 5, 3, 6 \} = [3]$$

均衡点 [あり・なし]

純粋戦略零和2人ゲームとして解はあるか。 [ある・ない]

混合戦略の場合は以下を求めよ。

2) 線形計画問題 (プレイヤー1)

目的関数

$$z = u \text{ 最大化}$$

制約式

$$5p_1 + 2p_2 - p_3 - u \geq 0$$

$$2p_1 + p_2 + 3p_3 - u \geq 0$$

$$-2p_1 + 3p_2 + 6p_3 - u \geq 0$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

3) 線形計画法の解

プレイヤー1

利得	p1	p2	p3
2.1071	0.3929	0.2500	0.3571

プレイヤー2 (双対価格・利得と損失は目的関数値に同じ)

損失	q1	q2	q3
2.1071	0.4643	0.2143	0.3214

問題4【第4回】

以下の純粋戦略零和2人ゲームを線形計画問題として解くと解はどうか。

$$\text{利得行列} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1) 純粋戦略問題として考える。

$$\text{プレイヤー1: } \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \{ -3, 2, -1, -2 \} = [2]$$

$$\text{プレイヤー2: } \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \{ 7, 8, 2, 5, 5 \} = [2]$$

均衡点 あり・なし

純粋戦略零和2人ゲームとして解はあるか。 ある・ない

2) 強制的にプレイヤー1の線形計画問題として考えてみる。

目的関数

$$Z = u \text{ 最大化}$$

制約式

$$\begin{aligned} 7p_1 + 4p_2 - p_3 - u &\geq 0 \\ -p_1 + 3p_2 + p_3 + 8p_4 - u &\geq 0 \\ -2p_1 + 2p_2 + p_4 - u &\geq 0 \\ 5p_1 + 3p_2 + p_3 + 2p_4 - u &\geq 0 \\ -3p_1 + 3p_2 + 5p_3 - 2p_4 - u &\geq 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1 \\ p_1, p_2, p_3, p_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

線形計画法の解

プレイヤー1

利得	p1	p2	p3	p4
<u>2</u>	0	1	0	0

プレイヤー2

損失	q1	q2	q3	q4	q5
<u>2</u>	0	0	1	0	0

3) この例の場合は、純粋戦略問題の解と 一致する・一致しない

注) 純粋戦略の問題を混合戦略の問題として解くと、混合戦略の少数解が求まること
があるが、目的関数の値は同じであり、これも1つの解である。

問題5

以下の混合戦略零和2人ゲームをプレイヤー2の線形計画問題として解け。プレイヤー2の各戦略の選択の確率は、 q_1, q_2, q_3 とする。

$$\text{利得行列} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

目的関数

$$z' = u \text{ 最小化}$$

制約式

$$5g_1 + 2g_2 - 2g_3 - u \leq 0$$

$$2g_1 + g_2 + 3g_3 - u \leq 0$$

$$-g_1 + 3g_2 + 6g_3 - u \leq 0$$

$$g_1 + g_2 + g_3 = 1$$

$$g_1, g_2, g_3 \geq 0$$

線形計画法の解

プレイヤー2

z	q1	q2	q3
2.1071	0.4643	0.2143	0.3214

プレイヤー1

z'	p1	p2	p3
2.1071	0.4643	0.2143	0.3214
	0.3929	0.2500	

7.3 混合戦略零和2人ゲームの一般的解法【第4回】

1. 双対問題とは（標準的問題の双対問題）

主問題

$$z = 5x_1 + 6x_2 \quad \text{最大化}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

双対問題

$$z' = 60y_1 + 100y_2 + 50y_3 \quad \text{最小化}$$

$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 6$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

簡単に言うと、横に並んだ係数を縦に見直す問題を双対問題という。

双対問題の目的関数値は一致する（ $z = z'$ ）ことが知られている。

2. 混合戦略零和2人ゲームの双対問題

例 定式化1

以下の利得行列で表される混合戦略零和2人ゲームのプレイヤー1の線形計画問題の双対問題をソフトウェアを使って求め、それがプレイヤー2の問題になっていることを確かめる。

$$\text{利得行列} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

プレイヤー1について

目的関数

$$z = u \quad \text{最大化}$$

制約式（相手の戦略によらず一定の利得 u は確保）

$$5p_1 + 2p_2 - u \geq 0 \quad \text{プレイヤー2が戦略1を選択した場合の期待利得}$$

$$p_1 + 3p_2 - u \geq 0 \quad \text{プレイヤー2が戦略2を選択した場合の期待利得}$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_1, p_2 \geq 0$$

上の問題の双対問題をソフトウェアから求める。

目的関数

$$z = y_3 \text{ 最小化}$$

制約式

$$-5y_1 - y_2 + y_3 \geq 0$$

$$-2y_1 - 3y_2 + y_3 \geq 0$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$y_1 \rightarrow q_1, y_2 \rightarrow q_2, y_3 \rightarrow v$ と置き換え、制約式の最初の2つの符号を変えるとプレイヤー2の線形計画問題として見やすくなる。

目的関数

$$z = v \text{ 最小化}$$

制約式

$$5q_1 + q_2 - v \leq 0$$

$$2q_1 + 3q_2 - v \leq 0$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

$$q_1, q_2 \geq 0$$

プレイヤー1

利得	p1	p2
2.6	0.2	0.8

プレイヤー2

損失	q1	q2
2.6	0.4	0.6

なお、この線形計画問題は標準的な問題としても定式化できる。(演習参照)

自由課題 定式化2

混合戦略零和2人ゲームの線形計画問題は、 $p'_i = p_i/u, q'_i = q_i/v$ とするとさらに分かりやすく以下ようになる。

プレイヤー1

目的関数 $z = p'_1 + p'_2 + \dots + p'_m (= 1/u)$ 最小化

制約式

$$a_{11}p'_1 + a_{21}p'_2 + \dots + a_{m1}p'_m \geq 1$$

...

$$a_{1n}p'_1 + a_{2n}p'_2 + \dots + a_{mn}p'_m \geq 1$$

$$p'_1, p'_2, \dots, p'_m \geq 0$$

プレイヤー2

目的関数 $z' = q'_1 + q'_2 + \dots + q'_n (= 1/v)$ 最大化

制約式

$$a_{11}q'_1 + a_{12}q'_2 + \dots + a_{1n}q'_n \leq 1$$

...

$$a_{m1}q'_1 + a_{m2}q'_2 + \dots + a_{mn}q'_n \leq 1$$

$$q'_1, q'_2, \dots, q'_n \geq 0$$

プレイヤー1とプレイヤー2の線形計画問題は互いに双対問題の関係になっている。

ゲームの解は以下で求められる。

解 プレイヤー1の最大値 $u = 1/z = 1/z' = v$

確率 $p_i = p'_i/z, q_i = q'_i/z'$

注) 特にプレイヤー2の問題は標準的な線形計画問題である。

演習

以下の利得行列の問題から定式化2の方法によって双対問題の関係を確かめよ。但し、 $u > 0$ とする。

$$\text{利得行列} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

プレイヤー1について

目的関数

$$z = 1/u \quad \text{最小化} \quad (z = u \text{ だと最大化})$$

制約式

$$5p_1 + 2p_2 \geq u$$

$$p_1 + 3p_2 \geq u$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_1, p_2 \geq 0$$

目的関数に $p_1 + p_2 = 1$ の関係を使って、

$$z = p_1/u + p_2/u \quad \text{最小化}$$

$p'_1 = p_1/u$, $p'_2 = p_2/u$ とすると、

$$z = [p'_1 + p'_2] \quad \text{最小化}$$

制約式の1番目と2番目の式を u で割って、 p'_1 , p'_2 を使うと

$$[5p'_1 + 2p'_2 \geq 1]$$

$$[p'_1 + 3p'_2 \geq 1]$$

制約式の3番目の式はすでに目的関数に入っているから省略する。

制約式の4番目の非負条件は p'_1 , p'_2 を使っても変わらないので

$$p'_1, p'_2 \geq 0$$

プレイヤー2について

この双対問題の式を求める。

制約式の1行目の変数を q'_1 、2行目の変数を q'_2 とすると

目的変数の係数は右辺の値を使うので、

$$z' = [q'_1 + q'_2] \quad \text{最大化}$$

制約式は行の係数と列の係数を入れ替え、不等号の向きを逆にし、目的関数の係数を右辺に使うので

$$[5q'_1 + q'_2 \leq 1]$$

$$[2q'_1 + 3q'_2 \leq 1]$$

非負条件は q'_1 , q'_2 に対しても成り立ち

$$q'_1, q'_2 \geq 0$$

この主問題と双対問題の解を求める。

$z = z' = 1/u$	$p1' = p1/u$	$p2' = p2/u$	$q1' = q1/u$	$q2' = q2/u$
0.3846	0.0769	0.3077	0.1538	0.2308

上の解より、利得=損失として

利得 = $u = 1/z$	$p1$	$p2$	$q1$	$q2$
2.600104	0.199948	0.800052	0.399896	0.600104
2.6	0.2	0.8	0.4	0.6

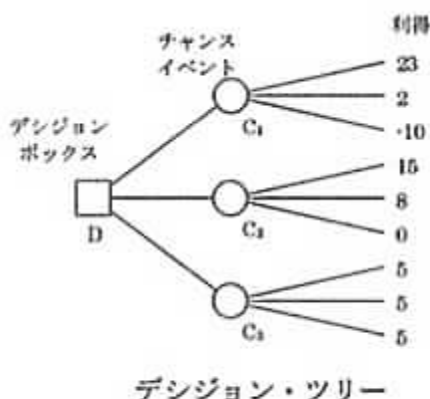
6. デシジョン・ツリー（不確実状況下の意思決定）【第6回】

6.1 利得行列とデシジョン・ツリー

利得行列

	好況(0.2)	平時(0.5)	不況(0.3)
投機株(C ₁)	23	2	-10
優良株(C ₂)	15	8	0
債権(C ₃)	5	5	5

() 内は主観確率



1) どの選択肢を選ぶべきか。

期待値を用いる。

$$\text{投機株 } E(X) = 0.2 \times 23 + 0.5 \times 2 + 0.3 \times (-10) = 2.6$$

$$\text{優良株 } E(X) = 0.2 \times 15 + 0.5 \times 8 + 0.3 \times 0 = 7$$

$$\text{債権 } E(X) = 0.2 \times 5 + 0.5 \times 5 + 0.3 \times 5 = 5$$

優良株が最適である。

2) 指定した確率は正しいか。

このような問題で正しい確率は求めにくく、意思決定者が事前に考える確率を用いる。これを主観確率という。

6.2 主観確率の決定法（補足）

意思決定者が当該事象に全く情報を持たない場合

離散の場合 同確率

連続の場合 一様分布

意思決定者が事前に何らかの情報を持つ場合

直接確率割付法（主に離散の場合）

事象を2つずつに分け、出現確率を求めてゆく。

平時以上 0.7 不況 0.3

平時以上の中で、好況 0.3, 平時 0.7

以上より

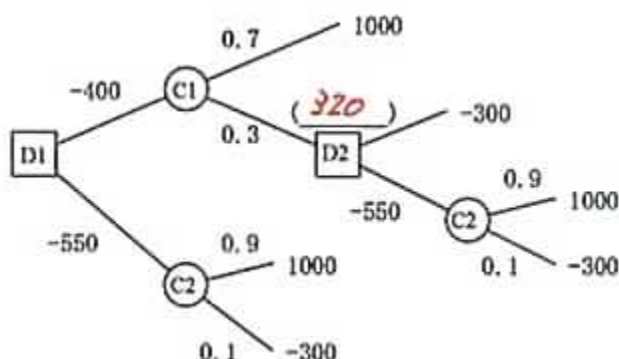
好況 $0.7 \times 0.3 = 0.21$, 平時 $0.7 \times 0.7 = 0.49$, 不況 0.3

一度に確率を割り当てより、順を追って割り当てて行くほうが確実

6.3 多段階決定問題

以下の状況を考える。

1. A社は新製品GをB社に納入したい。
2. 成功した場合の報酬は1000万円、失敗した場合の違約金は300万円である。
3. A社は2つの開発法C1とC2を持っており、最初にどちらか選べる。
4. C1には開発費400万円、C2には開発費550万円がかかる。
5. C1で成功する確率は0.7、失敗する確率は0.3である。
6. C1で失敗した場合、違約金を払うか、もう一度C2で挑戦が可能である。
7. C2で成功する確率は0.9、失敗する確率は0.1である。
8. C2で失敗した場合、違約金を払って開発を打ち切るしかない。



D2において

中止を選べば、-300

C2を開発すると、 $1000 \times 0.9 + (-300) \times 0.1 - 550 = 320$ こちらを選択

後者（最良期待値）を選択 → デシジョン・ツリーに書き込む

D1において

C1を選べば、 $1000 \times 0.7 + 320 \times 0.3 - 400 = 396$ こちらを選択

C2を選べば、 $1000 \times 0.9 + (-300) \times 0.1 - 550 = 320$

最初にC1を選び、失敗したらC2で再挑戦するのが良い。

最適性原理

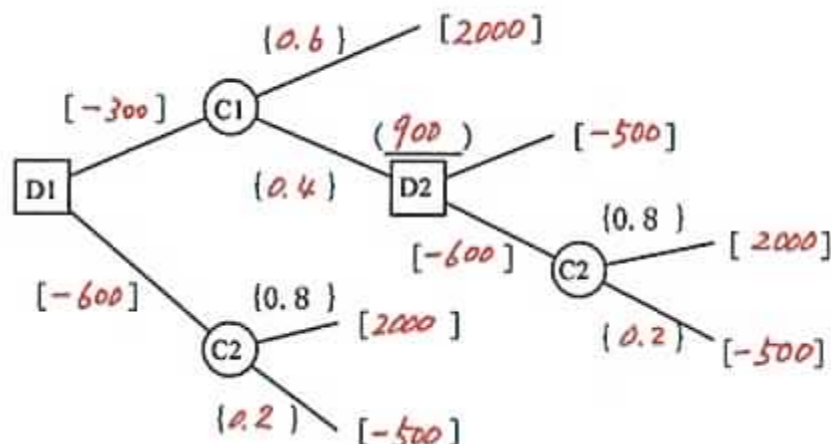
前の決定が何であろうとそれ以降の決定は最適なものを選ばなければならない。

問題

以下の状況説明を読んで問いに答えよ。

1. A社は新製品GをB社に納入したい。
2. 成功した場合の報酬は2000万円、失敗した場合の違約金は500万円である。
3. A社は2つの開発法C1とC2を持っており、最初にどちらか選べる。
4. C1には開発費300万円、C2には開発費600万円がかかる。
5. C1で成功する確率は0.6、失敗する確率は0.4である。
6. C1で失敗した場合、違約金を払うか、もう一度C2で挑戦が可能である。
7. C2で成功する確率は0.8、失敗する確率は0.2である。
8. C2で失敗した場合、違約金を払って開発を打ち切るしかない。

1) デシジョンツリーを完成させよ。但し、[] は金額、{ } は確率である。



2) 一度失敗した場合 (D2) の利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

やめる [-500] 万円

C2で再挑戦 [900] 万円 $0.8 \times 2000 + 0.2 \times (-500) - 600$

[やめる ・ C2で再挑戦] を選択する。

3) 最初の段階 (D1) での利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

C1を選択 [1260] 万円 $0.6 \times 2000 + 0.4 \times 900 - 300$

C2を選択 [900] 万円 $0.8 \times 2000 + 0.2 \times (-500) - 600$

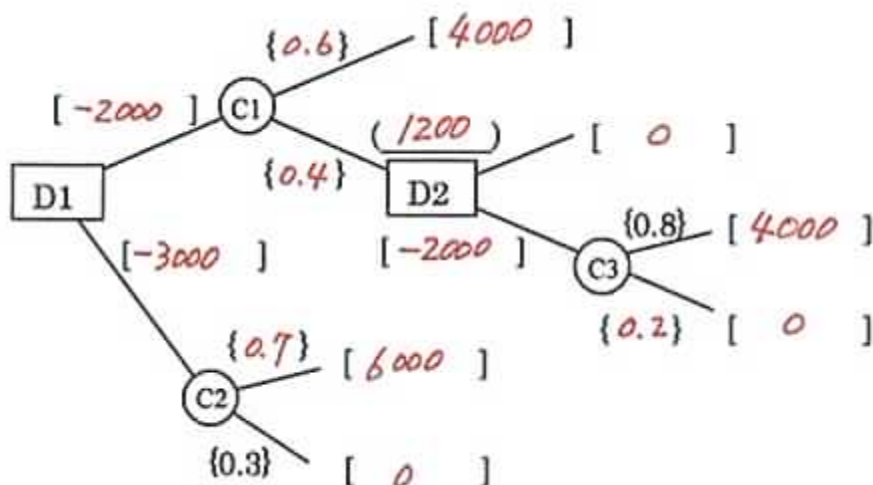
[C1 ・ C2] を選択する。

問題 1 【第 7 回】

1. ある会社で新製品を開発しようとしている (D1)。
2. 最初の方法には C1 (研究開発費 2,000 万円) と C2 (研究開発費 3,000 万円) の方法がある。
3. C1 では、うまく行く確率 0.6 で利益が 4,000 万円である。うまく行かない場合には研究を中止することも再挑戦することもできる (D2)。研究を中止する場合の利益は無くなる。
4. C2 では、うまく行く確率は 0.7 で利益はノウハウの蓄積も合わせて 6,000 万円となる。うまく行かない場合、利益は無くなり研究を中止する。
5. C1 の後に再挑戦で C3 (研究開発費 2,000 万円) を選択するとうまく行く確率を 0.8 にでき、利益は 4,000 万円となる。うまく行かない場合、利益は無くなり研究を中止する。

以下の問いに答えよ。

- 1) 空欄を埋めてデシジョンツリーを完成させよ。但し、[] は金額、{ } は確率である。



2) 一度失敗した場合 (D2) の利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

やめる [0] 万円

再挑戦 [1200] 万円 $0.2 \times 0 + 0.8 \times 4000 - 2000 = 1200$

[やめる・再挑戦] を選択する。

3) 最初の段階 (D1) での利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

C1 を選択 [880] 万円 $0.6 \times 4000 + 0.4 \times 1200 - 2000 = 880$

C2 を選択 [1200] 万円 $0.7 \times 6000 - 3000 = 1200$

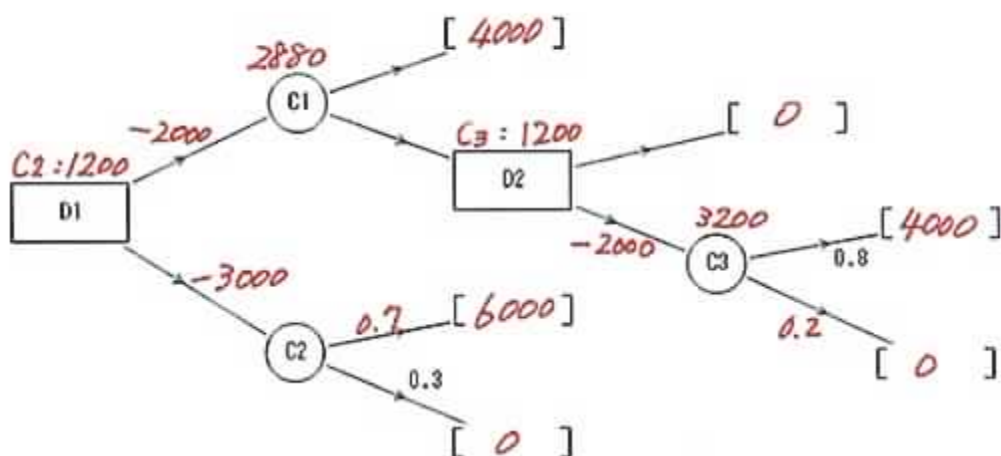
[C1 ・ C2] を選択する。

問題1【第6回B】パソコンを使って問題を解く

1. ある会社で新製品を開発しようとしている (D1)。
2. 最初の方法には C1 (研究開発費 2,000 万円) と C2 (研究開発費 3,000 万円) の方法がある。
3. C1 では、うまく行く確率 0.6 で利益が 4,000 万円である。うまく行かない場合には研究を中止することも再挑戦することもできる (D2)。研究を中止する場合の利益は無くなる。
4. C2 では、うまく行く確率は 0.7 で利益はノウハウの蓄積も合わせて 6,000 万円となる。うまく行かない場合、利益は無くなり研究を中止する。
5. C1 の後に再挑戦で C3 (研究開発費 2,000 万円) を選択するとうまく行く確率を 0.8 にでき、利益は 4,000 万円となる。うまく行かない場合、利益は無くなり研究を中止する。

以下の問いに答えよ。

- 1) パソコンを使って以下のデシジョンツリーを作り、ボックスとラインをクリックしてデータを完成させよ。但し、□から出る線には金額、○から出る線には確率を入れる。



データを「グリッド出力」し、「分析実行」ボタンを押して以下の問いに答えよ。

2) 一度失敗した場合 (D2) の利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

やめる [0] 万円

再挑戦 [1200] 万円

[やめる・再挑戦] を選択する。

3) 最初の段階 (D1) での利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

C1 を選択 [880] 万円

C2 を選択 [1200] 万円

[C1 ・ C2] を選択する。

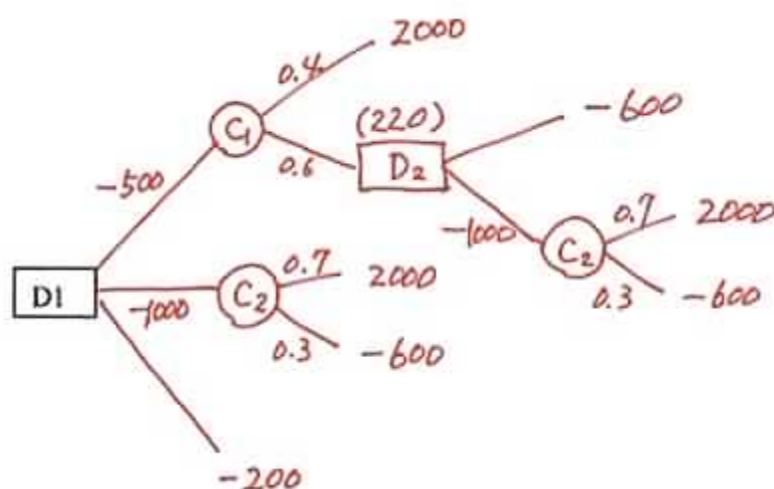
4) 「グラフィック表示」のボタンを押した結果を前ページの図にすべて書き込め。

演習1 [第7回]

以下の状況説明を読んで問いに答えよ。

1. A社にB社から機械の納入の相談があった。
2. 成功した場合の報酬は2000万円、失敗した場合の違約金は600万円である。
3. A社は2つの開発法C1とC2を持っており、最初にどちらか選べるし、受注しないこともできる(D1)。
4. 受注しない場合、信用の損失で200万円のダメージとなる。
5. C1には開発費500万円、C2には開発費1000万円がかかる。
6. C1で成功する確率は0.4、失敗する確率は0.6である。
7. C1で失敗した場合、違約金を払って中止するか、もう一度C2で挑戦が可能である(D2)。
8. C2で成功する確率は0.7、失敗する確率は0.3である。
9. C2で失敗した場合、違約金を払って開発を打ち切るしかない。

1) デシジョンツリーを完成させよ。



- 2) C1 で一度失敗した場合の意思決定 (D2) の利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

やめる [-600] 万円

C2 で再挑戦 [220] 万円 $0.7 \times 2000 + 0.3 \times (-600) - 1000 = 220$

[やめる ・ C2 で再挑戦] を選択する。

- 3) 最初の段階 (D1) での利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

C1 を選択 [432] 万円 $0.4 \times 2000 + 0.6 \times 220 - 500 = 432$

C2 を選択 [220] 万円 $0.7 \times 2000 + 0.3 \times (-600) - 1000 = 220$

受注しない [-200] 万円

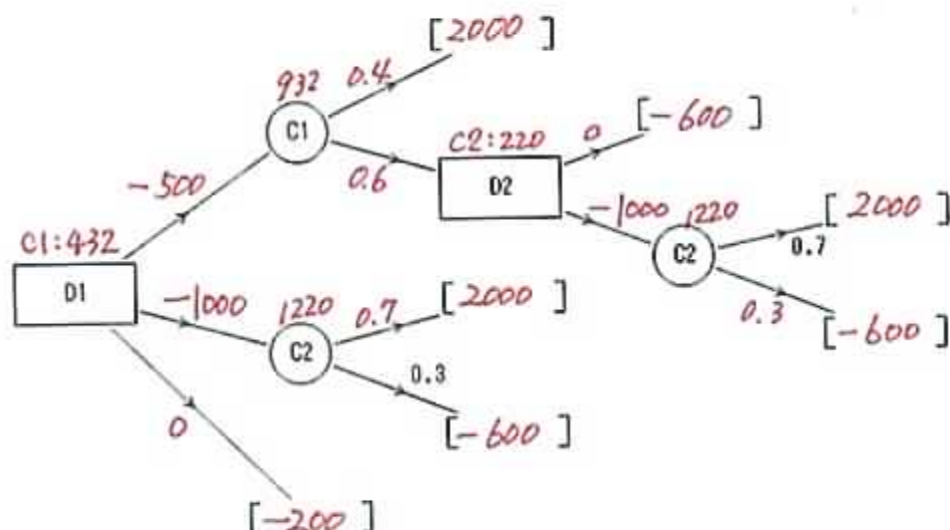
[C1 ・ C2 ・ 受注しない] を選択する。

演習1【第7回B】パソコンを使って問題を解く

以下の状況説明を読んで問いに答えよ。

1. A社にB社から機械の納入の相談があった。
2. 成功した場合の報酬は2000万円、失敗した場合の違約金は600万円である。
3. A社は2つの開発法C1とC2を持っており、最初にどちらか選べるし、受注しないこともできる(D1)。
4. 受注しない場合、信用の損失で200万円のダメージとなる。
5. C1には開発費500万円、C2には開発費1000万円がかかる。
6. C1で成功する確率は0.4、失敗する確率は0.6である。
7. C1で失敗した場合、違約金を払って中止するか、もう一度C2で挑戦が可能である(D2)。
8. C2で成功する確率は0.7、失敗する確率は0.3である。
9. C2で失敗した場合、違約金を払って開発を打ち切るしかない。

- 1) パソコンを使って以下のデシジョンツリーを作り、ボックスとラインをクリックしてデータを完成させよ。但し、□から出る線には金額、○から出る線には確率を入れる。



データを「グリッド出力」し、「分析実行」ボタンを押して以下の問いに答えよ。

- 2) C1 で一度失敗した場合の意思決定 (D2) の利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

やめる [-600] 万円

C2 で再挑戦 [220] 万円

[やめる ・ C2 で再挑戦] を選択する。

- 3) 最初の段階 (D1) での利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

C1 を選択 [432] 万円

C2 を選択 [220] 万円

受注しない [-200] 万円

[C1 ・ C2 ・ 受注しない] を選択する。

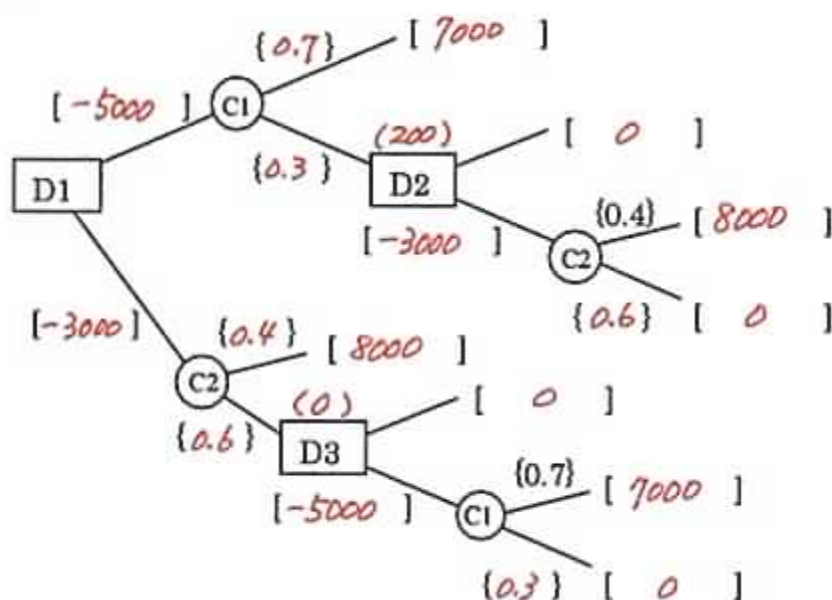
- 4) 「グラフィック表示」のボタンを押した結果を前ページの図にすべて書き込め。

問題2【第8回】

- ある会社で新製品開発を他社に依頼するか自社開発するか選ぼうとしている (D1)。
- 他社に依頼する場合 (C1) には契約金 5,000 万円がかかるが、自社開発 (C2) だと 3,000 万円の予算である。
- 他社に依頼する場合 (C1) には、仕様をみたす製品になる確率が 0.7 で、これにより当社の利益は 7,000 万円である。うまく行かない場合には開発を断念することも、自社開発で一度だけ再挑戦することもできる (D2)。開発を断念する場合、利益はなくなる。
- 自社開発では、うまく行く確率は 0.4 で利益はノウハウの蓄積も合わせて 8,000 万円となる。うまく行かない場合、開発を断念することも一度だけ他社に依頼して再挑戦することもできる (D3)。開発を断念する場合、利益はなくなる。
- 再挑戦の場合の条件は、2つのケース (D2 と D3) とともに最初に挑戦する場合と同じである。

以下の問いに答えよ。

- 空欄を埋めてデシジョンツリーを完成させよ。但し、[] は金額、() は確率である。



2) 一度失敗した場合 (D2) の利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

やめる [0] 万円

再挑戦 [200] 万円 $0.4 \times 8000 - 3000 = 200$

[やめる・再挑戦] を選択する。

3) 一度失敗した場合 (D3) の利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

やめる [0] 万円

再挑戦 [-100] 万円 $0.7 \times 7000 - 5000 = -100$

[やめる・再挑戦] を選択する。

4) 最初の段階 (D1) での利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

他社に依頼する [-40] 万円 $0.7 \times 7000 + 0.3 \times 200 - 5000 = -40$

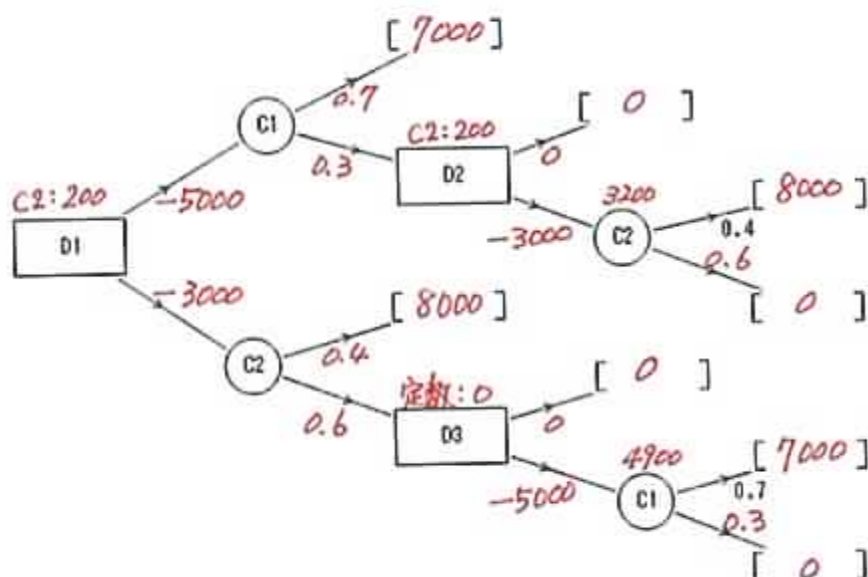
自社開発する [200] 万円 $0.4 \times 8000 - 3000 = 200$

[他社に依頼する・自社開発する] を選択する。

問題 演習2 [第8回B]

- ある会社で新製品開発を他社に依頼するか自社開発するか選ぼうとしている (D1)。
- 他社に依頼する場合 (C1) には契約金 5,000 万円がかかるが、自社開発 (C2) だと 3,000 万円の予算である。
- 他社に依頼する場合 (C1) には、仕様をみたす製品になる確率が 0.7 で、これにより当社の利益は 7,000 万円である。うまく行かない場合には開発を断念することも、自社開発で一度だけ再挑戦することもできる (D2)。開発を断念する場合、利益は無くなる。
- 自社開発では、うまく行く確率は 0.4 で利益はノウハウの蓄積も合わせて 8,000 万円となる。うまく行かない場合、開発を断念することも一度だけ他社に依頼して再挑戦することもできる (D3)。開発を断念する場合、利益は無くなる。
- 再挑戦の場合の条件は、2つのケース (D2 と D3) とともに最初に挑戦する場合と同じである。

- パソコンを使って以下のデシジョンツリーを作り、ボックスとラインをクリックしてデータを完成させよ。但し、□から出る線には金額、○から出る線には確率を入れる。



データを「グリッド出力」し、「分析実行」ボタンを押して以下の問いに答えよ。

2) 一度失敗した場合 (D2) の利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

やめる [0] 万円

再挑戦 [200] 万円

[やめる・再挑戦] を選択する。

3) 一度失敗した場合 (D3) の利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

やめる [0] 万円

再挑戦 [-100] 万円

[やめる・再挑戦] を選択する。

4) 最初の段階 (D1) での利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

他社に依頼する [-40] 万円

自社開発する [200] 万円

[他社に依頼する・自社開発する] を選択する。

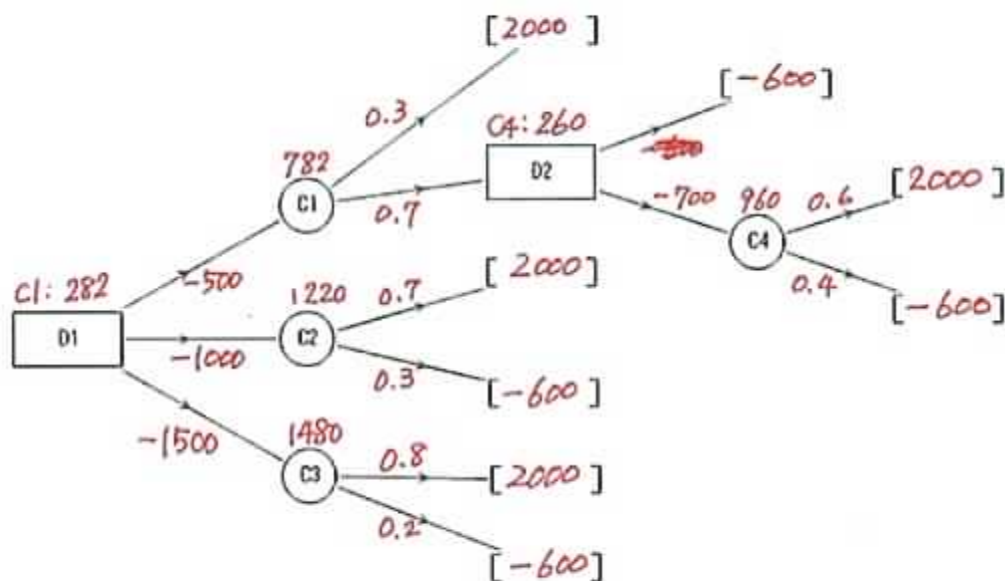
5) 「グラフィック表示」のボタンを押した結果を前ページの図にすべて書き込め。

演習2【第9回】

以下の状況説明を読んで問いに答えよ。

1. A社にB社から機械の納入の相談があった。
2. 成功した場合の報酬は2000万円、失敗した場合の違約金は600万円である。
3. A社は3つの開発法C1, C2, C3を持っており、最初にどれか選べる(D1)。
4. C1には開発費500万円、C2には1000万円、C3には1500万円がかかる。
5. C1で成功する確率は0.3、失敗する確率は0.7である。
6. C1で失敗した場合、違約金を払って開発を打ち切るか、再度C1の改良型C4で挑戦する方法がある(D2)。
7. C4の開発費はこれまでの設備を応用できて700万円で、成功する確率は0.6、失敗する確率は0.4である。
8. C2で成功する確率は0.7、失敗する確率は0.3である。
9. C2で失敗した場合は開発を中止するしかない。
10. C3で成功する確率は0.8、失敗する確率は0.2である。
11. C3で失敗した場合は開発を中止するしかない。

1) 上の問題を表すデシジョンツリーの線と [] に必要なデータを書き込め。



書きこんだデータを用いて分析を実行し、以下の問いに答えよ。

2) C1 で一度失敗した場合の意思決定 (D2) の利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

やめる [-600] 万円

C4 で再挑戦 [260] 万円

[やめる ・ C4 で再挑戦] を選択する。

3) 最初の段階 (D1) での利益の期待値はどうなるか。そのときどちらを選ぶか。

C1 を選択 [282] 万円

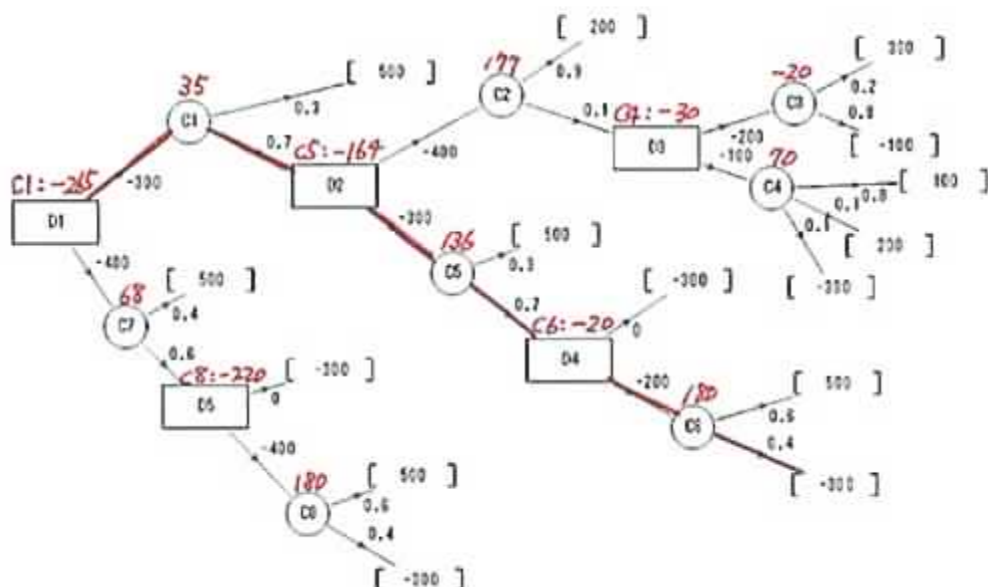
C2 を選択 [220] 万円

C3 を選択 [-20] 万円

[C1 ・ C2 ・ C3] を選択する。

演習 3

以下の意思決定過程の各意思決定 D1～D5 では、それぞれどのチャンスイベント（または定数）を選択すれば効率的か。また、~~そのときのそれぞれの期待値はいくらか。~~



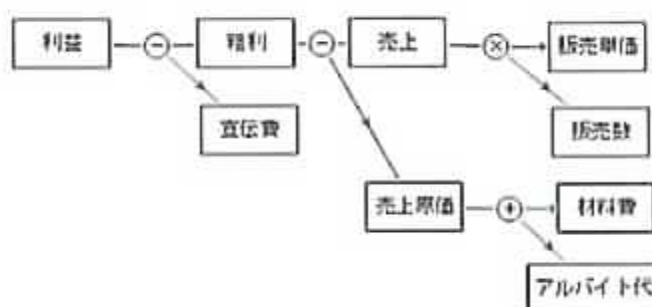
結果を「グラフィック表示」で出力し、D1～D5 までの意思決定をこれらの□の上に記入し、最良の戦略を取りつつも運悪く結果が失敗するまでの道筋を（D1 からどこかの -300 まで）太く塗って示せ。

9. リスク分析【第9回】

事業体の利益（一般には量的な各種指標）は、意思決定者の決断とそれによる影響、及び意思決定者には操作不能の、事業体を取り巻く環境によって変化する。リスク分析は、事業体の利益に関する数量的構造モデルを作成し、その中で、意思決定者が決定できる事項には1つの数値を設定し、環境には上限と下限の幅を持った数値を設定して、それらの影響により利益がどのように変化するかを調べる手法である。

例

以下のような利益の構造がある。グラフィックエディタを用いてデータを入力する。



「変量（値）出力」ボタンでデータ入力画面を表示し、以下のように入力する。

	変量値	基準値	最小値	最大値	変動[0/1]
アルバイト代	50000	50000	40000	60000	1
宣伝費	50000				0
材料費	80000	80000	70000	110000	1
販売単価	300				0
販売数	1000	1000	800	1200	1

これらのデータを用いて、以下の問いに答えよ。

- 1) 上の設定で以下はいくらになるか。

利益	粗利	売上	売上原価
120000	170000	300000	130000

- 2) 販売単価を270円にして、販売数が1200に増えると、以下はいくらになるか。

利益	粗利	売上	売上原価
144000	194000	324000	130000

注) このように設定を変えて変更を見る分析を、What-If分析という。

販売単位と販売数を元の設定に戻すこと。

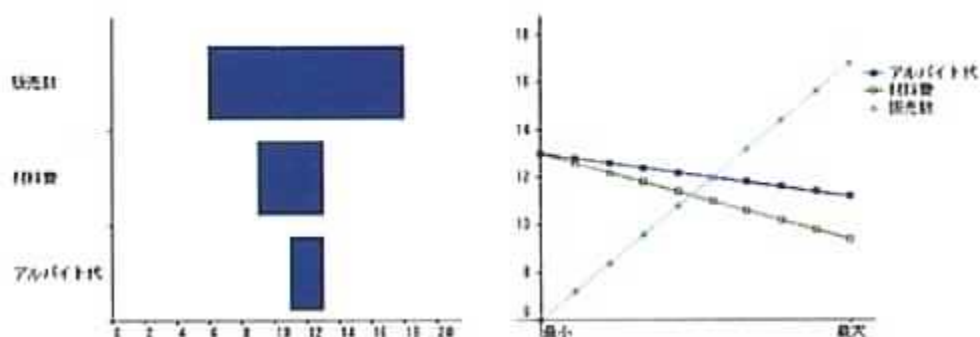
- 3) アルバイト代、材料費、販売数の値を最小値から最大値まで別々に変化させるとき、利益がどのように変化するかを示す。トルネードチャート（下図 単位、万円）を描け。

- 4) 利益が最も大きく変化する変量は何か。[**販売数**]

- 5) それぞれの変量が増加する時の利益の最小値と最大値はいくらか。

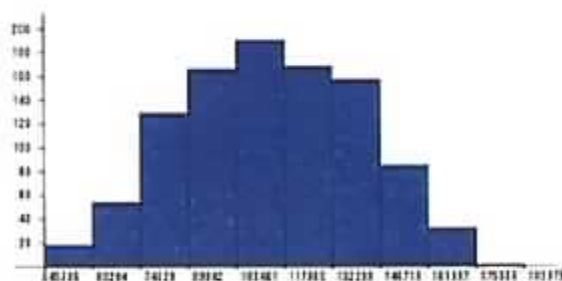
利益について	販売数	材料費	アルバイト代
最小値	60000	90000	110000
最大値	180000	130000	130000

- 6) 販売数、材料費、アルバイト代が最小から最大になるとき、利益はどのように変化するか。スパイダーチャート（下図 単位、万円）を描いて表示する。



トルネードチャート 一様分布 スパイダーチャート

- 8) 販売数、材料費、アルバイト代を基準値を頂点とする三角分布として変化させるモンテカルロシミュレーションを実行し、利益のヒストグラムを表示する。その際、シミュレーションの設定はデフォルトとする。

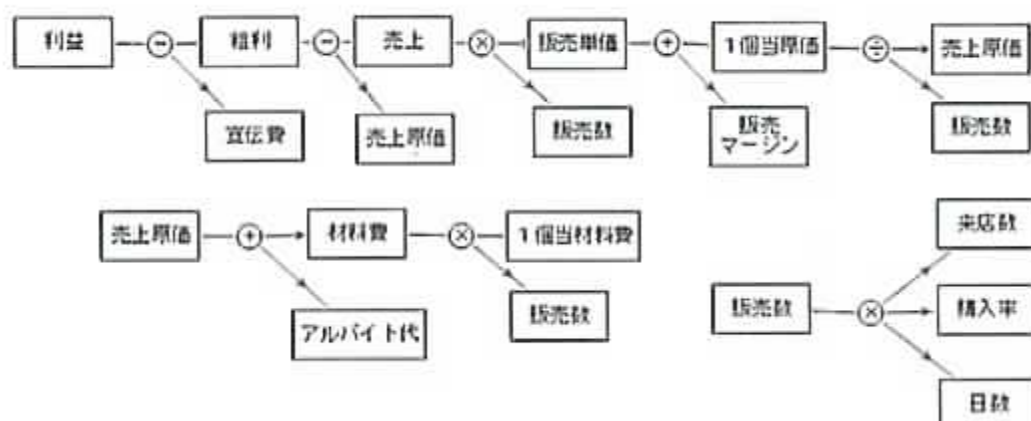


- 9) 上のシミュレーションで、利益の平均値、中央値、標準偏差を求めよ。

平均値 [**113551**] 中央値 [**113277**] 標準偏差 [**26717**]
 11048 108819 37753

問題1【第10回】

以下のような利益の構造がある。グラフィックエディタを用いてデータを入力する。



「変数（値）出力」ボタンでデータ入力画面を表示し、以下のように入力する。

	変数値	基準値	最小値	最大値	変動[0/1]
アルバイト代	82000				0
宣伝費	130000	150000	130000	150000	1
日数	30				0
来店数	3500	3500	3200	4300	1
販売マージン	140	140	110	150	1
購入率	0.02	0.02	0.015	0.03	1
1個当材料費	70				0

これらのデータを用いて、以下の問いに答えよ。

- 1) 上の設定で以下はいくらになるか。

利益	粗利	売上	売上原価	販売数
164000	294000	523000	229000	2100

- 2) 購入率を 0.022 にすると以下はいくらになるか。

利益	粗利	売上	売上原価	販売数
193400	323400	567100	243700	2310

購入率の設定を元に戻すこと

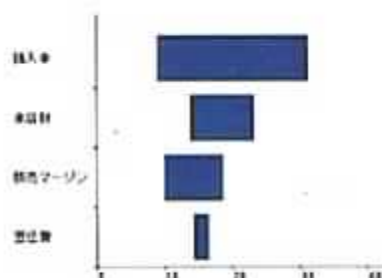
- 3) 宣伝費、来店数、販売マージン、購入率の値を最小値から最大値まで別々に変化させたとき、利益がどう変化するかを示す。トルネードチャート（下図 単位、万円）を描け。

4) 利益が最も大きく変化する変数は何か。[購入率]

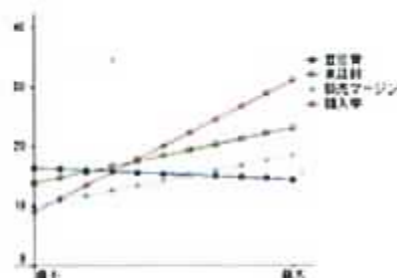
5) それぞれの変数が変化するときの利益の最小値と最大値はいくらか。

利益について	宣伝費	来店数	販売マージン	購入率
最小値	144000	138800	101000	90500
最大値	164000	231200	185000	311000

6) 宣伝費、来店数、販売マージン、購入率が最小から最大になるとき、利益はどのように変化するか。スパイダーチャート(下図 単位、万円)を描いて表示する。



トルネードチャート



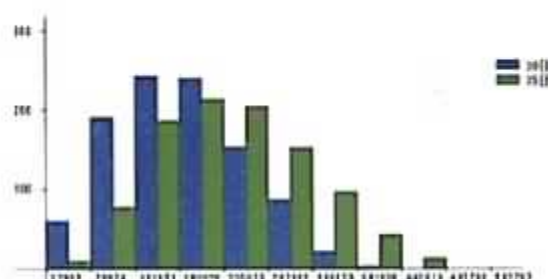
スパイダーチャート

7) 来店数、購入率が変化するとき、販売数の最小値と最大値はいくらか。

販売数について	来店数	購入率
最小値	1920	1575
最大値	2580	3150

トルネードチャート

8) 宣伝費、来店数、販売マージン、購入率を一樣分布とし、日数を30日と35日にしたモンテカルロシミュレーションを実行し、利益について比較する以下のヒストグラムを表示する。



9) 上のシミュレーションで、利益の平均値、中央値、標準偏差を求めよ。

30日のとき 平均値[189817] 中央値[184916] 標準偏差[74188]

35日のとき 平均値[244834] 中央値[238862] 標準偏差[86494]

7. 意思決定を支援する分析【第9回】

7.1 ISM (Interpretive Structure Modeling)

ISMの目的は、

- ①要素間の隣接的な関係から、間接的な影響を重視した階層構造モデルを示す。
- ②要素間の関係から、階層性を重視した構造モデルを示す。
- ③要素間の（隣接的な）関係から、階層構造図や構造図を描く助けをする。

例

以下の主張から要素を選び出し、それらの関係についてその構造をISMによってモデル化せよ。

- わが社の経営は利益の追求と社会への貢献を目的としている。
- わが社の利益の追求の方針は廉価販売である。また、廉価販売によって利益の追求の効果が上がっている。
- 廉価販売によって広く良い商品が普及し、社会への貢献となる。



直接影響を及ぼす要素間の関係は → 隣接行列 (関係行列)

直接の影響をたどって到達できる要素間の関係は → 可到達行列

可到達行列を階層的に見やすく表示するには → 階層化可到達行列

隣接行列を階層的に見やすく表示するには → 階層化隣接行列 (造語)

相互に影響を与え合う要素を1まとめにすると → 縮約階層化行列 (造語)

縮約階層化行列で直接の影響だけ残すと → 縮約隣接行列 (造語)

縮約階層化行列で階層的に飛びのない関係だけ残すと → 構造化行列

手順と理論

1) 隣接行列・関係行列を設定する。

直接的に影響する要因間を1でつないだ行列を隣接行列という。

直接間接を問わず影響すると思われる要因間を1でつないだ行列を関係行列という。

$$\begin{array}{c} \text{データ入力} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{array}{c} \text{隣接行列} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2) 可到達行列を求める。

以下のような演算を考える。

$$(\mathbf{A}^2)_{ij} = (\mathbf{A})_{ik} \wedge (\mathbf{A})_{kj}$$

$\wedge$: 1を真、0を偽と見た場合の論理積

$\vee_k$: k についての論理和

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} * \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列 $\mathbf{A}^2$ は最大2つの矢印を通して到達できる要因間を1で繋いでいる。

同様に $\mathbf{A}^3$ を計算する。

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} * \mathbf{A} * \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^2 \equiv \mathbf{R}$$

これは $\mathbf{A}^2$ と同じであり、 $\mathbf{A}$ をいくら掛けてもこれ以上の関係は作れない。この $\mathbf{R}$ を可到達行列という。この行列はどの要素間に直接・間接を含めた影響があるかを示す。

3) 階層化可到達行列を求める。

可到達行列の行(列)成分の並べ替えで、階層化された要素間の間接的なつながりが明瞭になる。例えば、(1,2,3,4)を(1,2,4,3)と並べ替えると以下ようになる。この行列 $\mathbf{R}^*$ を階層化可到達行列という。ここに四角で囲まれた部分が相互に影響しあう要素の集合である。

$$R^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}$$

隣接・関係行列の行と列をこの階層順に並べたらどうなるのか、これが分ると「構造図」などを描く際に便利である。このような行列 A^* を「階層化隣接行列」と呼ぶ。

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}$$

4) その他の行列を求める。

要素2と要素4は互いに影響を及ぼしあうひとまとまりの要素なので、これをひとつにまとめておくと行列が簡単になる。この行列 $\tilde{R}$ を「縮約階層化行列」と呼ぶ。

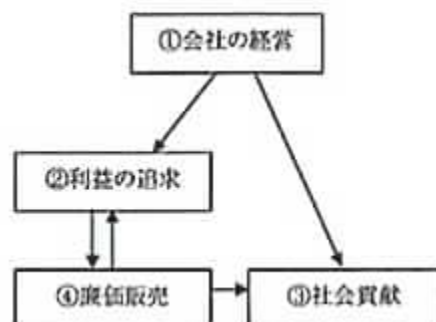
$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2+4 \\ 3 \end{matrix}$$

縮約階層化行列において隣接行列で直接結ばれた関係だけを残した行列は「縮約構造図」を描く際には最も役に立つ。この行列 $\tilde{A}$ を「縮約隣接行列」と呼ぶ。但し、この例の場合、 $\tilde{A} = \tilde{R}$ である。

縮約階層化行列の中で要素1から要素3へは要素2+要素4を経由しても到達することができるので、要素2+要素4の階層は要素1の下、要素3の上と解釈する。この解釈によって、階層を飛ばした関係を消すことにすると以下の行列 S を得る。これを「構造化行列」と呼ぶ。これは直接間接を区別しない関係行列から要素間の「階層構造図」などを描く際には有効である。

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列による構造図は右のようになる。



問題 1

以下の関係を隣接行列に直して質問に答えよ。

①→②、②→④⑤、③→④、④→⑤、⑤→②⑥

1) 隣接行列 (左) と可到達行列 (右) を求めよ。

	①	②	③	④	⑤	⑥
①	1					
②		1		1	1	
③			1	1		
④				1	1	
⑤		1			1	1
⑥						1

	①	②	③	④	⑤	⑥
①	1			1	1	
②		1		1	1	1
③		1	1	1	1	1
④		1		1	1	1
⑤		1		1	1	1
⑥						1

2) 要素名を記して階層化可到達行列 (左) と「階層化隣接行列」 (右) を求めよ。

	①	③	④	⑤	⑥
①	1		1	1	1
③		1	1	1	1
②			1	1	1
④			1	1	1
⑤			1	1	1
⑥					1

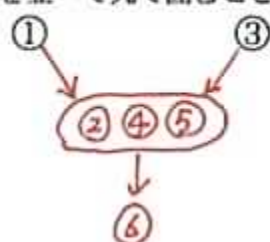
	①	③	④	⑤	⑥
①	1		1		
③		1	1		
②			1	1	
④			1	1	
⑤			1	1	1
⑥					1

3) 要素名を記して「縮約階層化行列」 (左) と「縮約隣接行列」 (右) を求めよ。

	①	③	②④⑤	⑥
①	1		1	1
③		1	1	1
②④⑤			1	1
⑥				1

	①	③	②④⑤	⑥
①	1		1	
③		1	1	
②④⑤			1	1
⑥				1

4) 「縮約隣接行列」の関係から階層図を描け。但し、ひとかたまりになった要素は要素名を並べて丸で囲むこと。

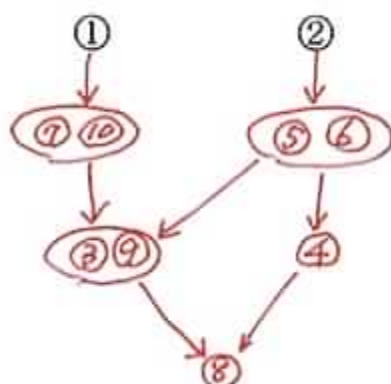


問題2【第12回】

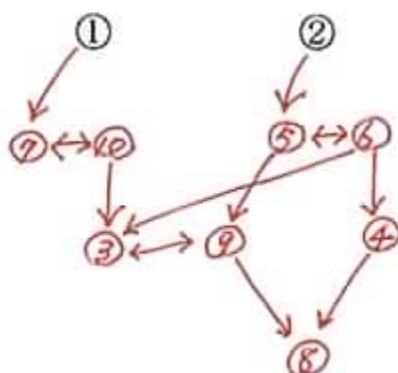
以下の隣接関係を隣接行列に直して以下の問いに答えよ。

①→⑦, ③→⑨, ④→⑧, ⑦→⑩, ⑤→⑥⑨, ②→⑤, ⑥→③④⑤,
⑨→③⑧, ⑩→③⑦

- 1) 「縮約隣接行列」を求め、「縮約構造図」を描け。但し、ひとかたまりになった要素は要素名を並べて丸で囲むこと。(手書き)



- 2) 「階層化隣接行列」を求め、「構造図」を見易く表示せよ。但し、同じ階層のものはできるだけ横に並べて表示すること。(手書き)



- 3) この構造図から、パスは最大何ステップまであるか。[5] ステップ

問題3 関係行列から構造行列を作って階層性を調べる例（かなり自明）

以下の関係を関係行列に直して解答せよ。

①→②～⑬、②→⑦⑨⑬、③→④⑤、⑥→⑧⑪⑫⑬、⑬→⑧⑫

但し、

①立替物件の選定

⑧用途地域

②物件内容

⑨庭の広さ

③立地条件

⑩日当たり

④交通の便

⑪景観

⑤買物の便

⑫騒音

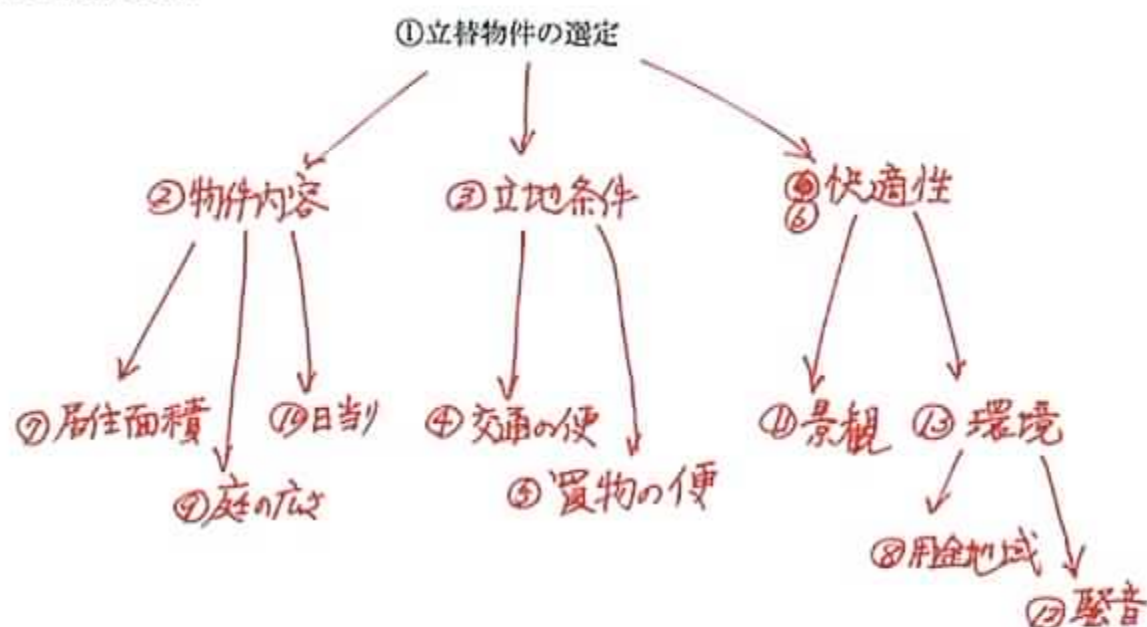
⑥快適性

⑬環境

⑦居住面積

「構造行列」から「階層構造図」（階層性を表す図）を見易く描け。但し、上の番号と名前を用いること。この関係は AHP などにも応用される。（これについてはグラフィックの結果を印刷してもよい。）

番号と名前で表示



8.2 Dematel 法 (Decision Making Trial and Evaluation Laboratory) 【第12回】

スイス・バテル研究所 (1971) が世界的複合問題の解決のために開発した手法
例

環境問題について専門家へのアンケートによって Samples\Dematel1.txt のようなクロス
サポート行列が得られた。Dematel 法を用いてこれらの要素の関係を調べたい。

	工場	車	CO2	NOx	フロン	温暖化	健康
工場	0	2	4	4	2	4	2
車	2	0	2	0	0	4	4
CO2	0	0	0	0	0	8	2
NOx	0	0	0	0	0	0	4
フロン	0	0	0	0	0	0	4
温暖化	0	0	2	0	0	0	2
健康	0	0	0	0	0	0	0

Dematel 法の目的 → システムの構成要素間の構造を認識する。

要素間の強さの入力は。 → クロスサポート行列

要素間の直接的な影響の強さをみるには。 → 直接影響行列

要素間の間接的な影響の強さをみるには。 → 間接影響行列

要素間の直接・間接を合わせた全影響の強さをみるには。 → 全影響行列

各影響行列で強い影響のところだけ取り出してみるには。

→ 各しきい値と影響行列の種類を設定し、しきい値影響行列をみる。

しきい値影響行列を階層的により見やすくするには。 → 階層化影響行列

各要素の影響力の強さを比較するには。 → 被影響度・影響度

被影響度と影響度の強さを視覚化するには。 → 影響グラフ

I SMとの相違は。

- 1) 要素間の影響の決定は I SMでは人間とコンピュータで対話的に行われるが、Dematel では専門家へのアンケートにより処理する。
- 2) 要素間の関係は I SMでは 0/1 であったが、Dematel 法では 0, 2, 4, 8 (あるいは 1, 2, 3, 4) という段階で与えるため、間接的な影響の求め方が異なる。

手順と理論

- 1) 専門家に与えられた問題に対する要素を抽出してもらう。(済み)
- 2) 各要素間の直接影響の強さ a_{ij} ($= (A)_{ij}$) を専門家に決めてもらう。(済み)

非常に大きな影響 8 かなりの影響 4
ある程度の影響 2 無視しうる影響 0 A : クロスサポート行列

3) 後で行う行列の演算が収束するための尺度因子の設定

$$s \leq \sup = \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|} \quad (\text{通常 } s = \sup, \frac{3}{4} \sup, \frac{1}{2} \sup \text{ が一般的})$$

小さな s だと間接的な影響が小さくなる。

4) 直接影響行列の設定

$$\mathbf{D} = s\mathbf{A} \quad s : \text{尺度因子}$$

$$d_{i*} = \sum_{k=1}^n d_{ik} \quad \text{要素 } i \text{ が他の要素に与える直接影響の総和}$$

$$d_{*i} = \sum_{k=1}^n d_{ki} \quad \text{要素 } i \text{ が他の要素から受ける直接影響の総和}$$

$$d_i = d_{i*} + d_{*i} \quad \text{要素 } i \text{ の直接影響強度}$$

$$W_i(d) = \frac{d_{i*}}{\sum_{j=1}^n d_{j*}} = \frac{d_{i*}}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n d_{jk}} \quad \text{要素 } i \text{ の直接影響度}$$

$$V_i(d) = \frac{d_{*i}}{\sum_{k=1}^n d_{*k}} = \frac{d_{*i}}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n d_{kj}} \quad \text{要素 } i \text{ の被直接影響度}$$

5) 全影響行列の設定

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} + \mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^3 + \mathbf{D}^4 \dots = \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}$$

上と同様に全影響度 $W_i(f)$, 被全影響度 $V_i(f)$ を定義する。

6) 間接影響行列の設定

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^3 + \mathbf{D}^4 + \dots = \mathbf{D}^2(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}$$

上と同様に間接影響度 $W_i(h)$, 被間接影響度 $V_i(h)$ を定義する。

7) 各影響行列で影響力の大きい関係だけを取り出してみる。

しきい値影響行列でしきい値以下の影響は 0 にする。

8) しきい値影響行列を元に要素を階層化して構造を見やすくする。

ISM の技術の利用

9) 各要素の影響度と被影響度を調べ、その強さを視覚化する。

問題 1

例で与えた Samples\Dematell.txt のクロスサポート行列で、Dematel 法を用いて以下の問いに答えよ。

1) 直接影響行列と尺度因子の値を求めよ。

	工場	車	CO2	NOx	フロン	温暖化	健康
工場		0.111	0.222	0.222	0.111	0.222	0.111
車	0.111		0.111	0.444		0.222	0.222
CO2						0.444	0.111
NOx							0.222
フロン							0.222
温暖化			0.111				0.111
健康							

尺度因子 [0.0556]

2) 全影響行列の値を求めよ。

	工場	車	CO2	NOx	フロン	温暖化	健康
工場	0.013	0.113	0.279	0.275	0.113	0.374	0.296
車	0.113	0.013	0.174	0.475	0.013	0.327	0.402
CO2			0.052			0.468	0.169
NOx							0.222
フロン							0.222
温暖化			0.117				0.130
健康							

3) 上の行列でしきい値を0.2としたとき、工場が影響を与える要素は何か。

[CO₂, NO_x, 温暖化, 健康]

4) 直接影響でしきい値を0.2としたとき、工場が影響を与える要素は何か。

[CO₂, NO_x, 温暖化]

全影響行列について以下の問いに答えよ。

5) 各要素の影響力の強さと影響を受ける強さを求めよ。

	工場	車	CO2	NOx	フロン	温暖化	健康
影響度	0.332	0.344	0.156	0.050	0.050	0.068	0.000
被影響度	0.028	0.028	0.141	0.170	0.028	0.277	0.327

6) 最も影響力の強い要素は何か。

[車]

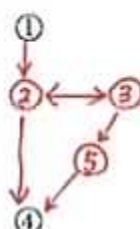
7) 最も影響を受けやすい要素は何か。

[健康]

問題 2

Samples\Dematel3.txt のクロスサポート行列で、Dematel 法を用いて問いに答えよ。

- 1) このクロスサポート行列から構造図を描け。但し同じ階層は同じ高さに描くこと。



- 2) 全影響行列と尺度因子の値を求めよ。以後すべて全影響行列を使用する。

	①	②	③	④	⑤
①		0.696	0.739	0.616	0.148
②			0.087	0.887	0.043
③		0.435		0.435	0.217
④					
⑤				0.400	

尺度因子 [0.1]

- 3) 上の行列でしきい値を 0.2 としたとき、③が影響を与える要素は何か。
[② ④ ⑤]
- 4) 上の行列でしきい値を 0.2 としたとき、③に影響を与える要素は何か。
[① ②]
- 5) しきい値をそのまま、尺度因子の値を 1/2sup とした場合、③が影響を与える要素は何か。[②]
- 6) 上のように尺度因子の値を下げることは間接影響をより [大きく・小さく] 見積もることである。 尺度因子の値は元に戻しておくこと
- 7) 各要素の影響力の強さと影響を受ける強さを求めよ。

	①	②	③	④	⑤
影響度	0.439	0.247	0.234	0	0.080
被影響度	0	0.243	0.208	0.467	0.082

- 8) 最も影響力の強い要素とその影響度は。
要素名 [①] 影響度 [0.439]
- 9) 最も影響を受けやすい要素とその被影響度は。
要素名 [④] 被影響度 [0.467]

8.3 KSIM (Kane's Simulation) 【第12回】

KSIM とは 種々の量の大きな変化のイメージを補助するための定性的なシミュレーション手法

(定性的：数値にはこだわらず、性質のみを対象にすること)

各変数の値 (主観的な量) すべて 0~1 の間に入る。

パラメータ 2つ (dt: 時間的な分割単位, scale (c): 影響の強さ、直感で指定)

厳密なシミュレーションか 全く違う (特に時間的な変化では)

理論

KSIM は経済システムや社会システムのように、はっきりと定義されないシステムの時間的な変化をシミュレートする手法である。取扱う変数は、数値的なものの場合もあれば、数値的に表されない好みや傾向といったものもあるが、基本的にはすべて主観的な量に変換して分析を行う。即ち全ての変数、例えば工業化の度合い等も、0 より大きく 1 より小さい数値で表す。

システムの i 番目の変数について時刻 t から $t+dt$ までの変化を以下で定義する。

$$x_i(t+dt) = x_i(t)^{p_i(t)}$$

ここに $p_i(t)$ は影響力を与える因子で、以下で定義される。

$$p_i(t) = \frac{1 + \frac{cdt}{2} \sum_{j=1}^n (|a_{ji}| - a_{ji}) x_j(t)}{1 + \frac{cdt}{2} \sum_{j=1}^n (|a_{ji}| + a_{ji}) x_j(t)}$$

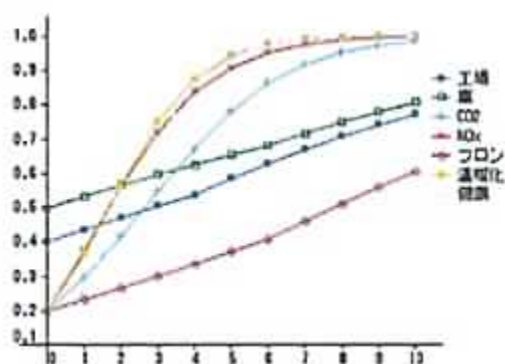
行列 $A = (a_{ij})$ はインパクト行列と呼ばれ、変数 x_i から x_j への影響を表す。慣例的に相互作用の強さは -3 から 3 程度の大きさの整数値で表される。

dt は時間の刻み値、 c は省かれることが多いが、相互作用の大きさを表すパラメータである。

例

Samples\KSIM3.txt は前節で述べた環境問題について専門家へのアンケートによって得られたクロスサポート行列と各変数の初期値である。KSIM を用いてこれらの要素の変化の様子を調べよ。但し、期間: 10, dt : 0.5, $scale$: 0.1 とすること。

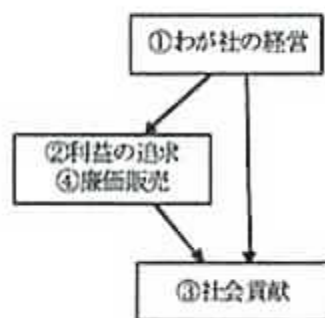
	工場	車	CO2	NOx	フロン	温暖化	健康
初期値	0.4	0.5	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1
工場	0	2	4	4	2	4	2
車	2	0	2	0	0	4	4
CO2	0	0	0	0	0	8	2
NOx	0	0	0	0	0	0	4
フロン	0	0	0	0	0	0	4
温暖化	0	0	2	0	0	0	2
健康	0	0	0	0	0	0	0



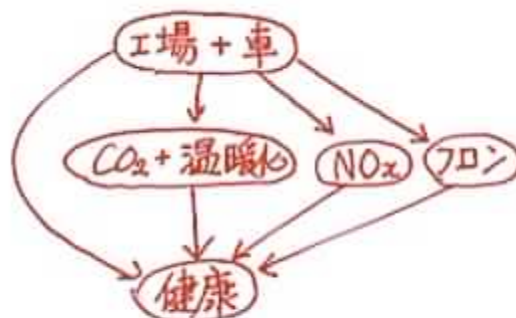
このデータを Dematel 法や ISM で分析することも考える。

問題 1

Samples\KSIM3.txt の 2 ページ目のデータを用いて ISM で分析し、「縮約隣接行列」を表示させ、縮約構造図を描け。



縮約構造図の例



問題 2

Samples\KSIM1.txt のデータを用いて KSIM を実行し、以下の問いに答えよ。但し、パラメータの値はデータに指定した通りとする。

- 1) シミュレーション終了時点で最も大きい変数は何か。 [x_5]
- 2) シミュレーション終了時点で最も小さい変数は何か。 [x_3]
- 3) 時間を長くしていくと変数 x_3 はどうなるか。 [上がる] 変わらない・下がる]

このデータ (2 ページ目) を使って Dematel 法で分析する。

- 4) 全影響で見た場合、最も影響力のある変数はどれか。 [x_1]
- 5) 全影響で見た場合、最も影響される変数はどれか。 [x_5]

このデータ (2 ページ目) を使って ISM で分析する。

- 6) これらのデータは階層的であるか。
[階層的である・互いに影響し合っており階層的でない]

問題 3

Samples\KSIM2ex.txt のデータを用いて KSIM を実行し、以下の問いに答えよ。但し、パラメータの値はデータに指定した通りとする。

- 1) 最終的に大きくなっていく変数は何か。 [x_4, x_6]
- 2) 一旦上がって、下がりだす変数は何か。 [x_2, x_3]

1 ページ目のデータから新しいページにデータを作って Dematel 法で分析する。

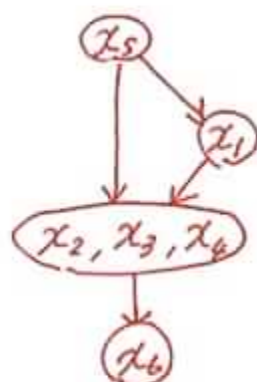
- 3) 全影響で見た場合、最も影響力のある変数はどれか。 [x_4]
- 4) 全影響で見た場合、最も影響される変数はどれか。 [x_2]

上で作ったデータを使って ISM で分析する。

- 5) これらのデータは階層的であるか。
[階層的である・互いに影響し合っており階層的でない]

上で作ったデータから Dematel 法で直接影響のしきい値影響行列（しきい値は 0.2 とする）を作って、ISM で分析する。（大きな影響を考えるとここで描く図のような関係になる）

7) しきい値影響行列の縮約構造図を描け。



9. 問題解決支援手法【第13回】

高橋誠，問題解決手法の知識，日本経済新聞社

9.1 問題解決とは

問題の定義

問題とは、期待と現状との差である。

問題の種類

問題には唯一解と多解答のものがある

唯一解の問題 代替案からの選択や効率的な計画などの問題

多解答の問題 ブログの利用法のようにいくつも方法があるような問題

問題には発生型と発見型がある

発生型 天災のように予測しにくいもの

発見型 未来を予知して見つけ出す問題

問題解決の基本手順

個人発想ステップ

①熟考 ②あためめき ③ひらめき

集団での問題解決ステップ

①問題設定 問題とは何かをはっきりと規定する。

②問題把握 関連した事実を洗い出し、徹底的に分析して核心をとらえる。

③目標設定 解決の目標を決める。

④問題解決 解決策と手順を決める。構想計画→具体計画→手順計画

⑤総合評価 実行前に検討評価する

問題解決の心構え

問題把握は細心に、問題解決は大胆に

まずは発散思考、後で収束思考

発散時は発散のみ、収束時は収束のみ

9.2 問題解決の技法

発散技法

自由連想法 ブレイン・ストーミング、ブレインライティング、CBS法

強制連想法 属性列挙法、チェックリスト法、入出法、形態分析法

類比法 等価変換法、ゴードン法、シネクティクス、NM法

収束技法

空間型

演繹法 図書分類等、各種分類法

帰納法 KJ法、親和図法、7×7法、クロス法

系列型

因果法 特性要因図、因果分析法

時系列法 ストーリー法、PERT、カードパート法

統合技法

ワークデザイン法、ZK法、ブリッジ法、ハイブリッジ法

態度技法

瞑想型法 催眠、自立訓練法、ヒベックス、禅、工学禅、ヨーガ、瞑想法、
超越瞑想法、SMC、IC法

交流型法 カウンセリング、TA、ST、エンカウンターグループ

演劇型法 心理劇、社会劇、ロールプレイング、クリエイティブ・ドラマチクス

9.3 手法の概要

ブレイン・ストーミング (アレックス・P・オズボーン)

具体的なテーマに対して改善案をできるだけ自由に多く集める手法

ルール：批判厳禁、自由奔放、質より量、結合改善（他人の意見に便乗可）

CBS法

カードを用いたブレイン・ストーミング改良法、発言量の少ない人も活かす方法

チェックリスト法

発想のチェックリスト（オズボーンの9項目が有名）にもとづき、テーマを考えてゆく手法。

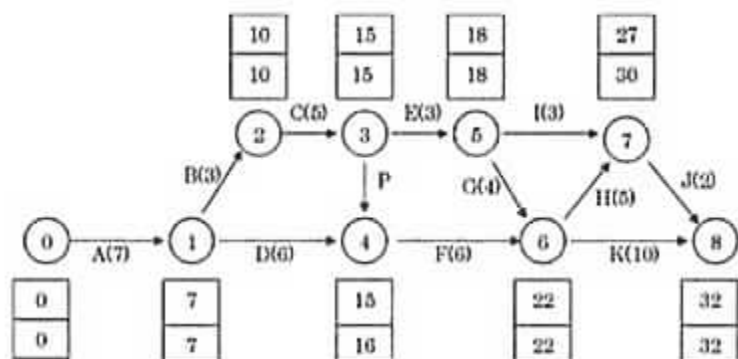
1) 他への転用は、2) 他の応用は、3) 変更したら、4) 拡大したら、5) 縮小したら、6) 代用したら、7) 再配列なら、8) 逆転したら、9) 結合したら

NM法 (中山正和)

設定された課題にキーワードを設け、それにそって似たものを並べ、機能を検討して新しい発想のものを創り出す手法

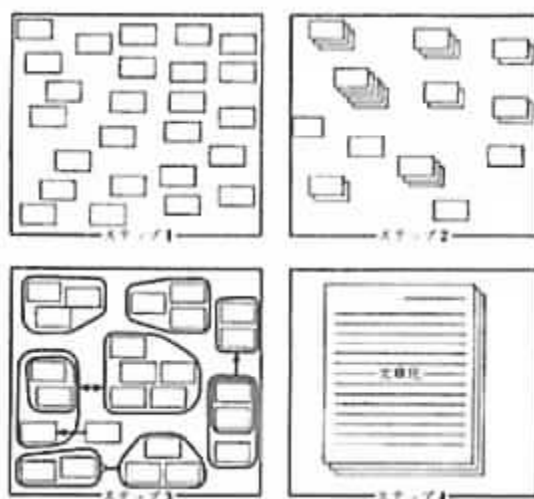
PERT

プロジェクトなどのスケジュール管理用に考えられた技法



KJ法 (川喜田二郎)

設定されたテーマで思いつくことをカードに書き、それを机上で並べて、似たもの同士のつながりを見てゆく過程で新たな発想を得ようとする手法



参考: <http://www.crew.sfc.keio.ac.jp/lecture/kj/kj.html> より

これら以外にもいくつもの技法があり、将来どこかで体験するかも知れません。

問題

ブレイン・ストーミングを用いて学生のSPIの点数を上げる方法を集め、KJ法によって意見を集約せよ。