College Analysis で見る特殊相対論的効果

福井正康

福山平成大学経営学部経営学科

概要

我々は College Analysis で 3 次元図形を表示させるために 3D ビューアを開発し、赤青眼鏡で見るアナグリフ立体視やアクション機能など、種々のオプション機能を加えてきた。今回これらの機能に、観測できないが物理の原理に従った特殊相対論的視覚効果というシミュレーションを加えてみた。これは光速に近い速さで近づく（遠ざかる）物体がどのように見えるかというもので、ローレンツ収縮に光の速さの有限性を加味した、不思議な世界を体験してもらいたい。

キーワード

College Analysis，3D ビューア，特殊相対性理論

URL: http://www.heisei-u.ac.jp/ba/fukui/

１．はじめに

我々は３次元グラフや物理シミュレーションの表示用に、College Analysis の中で 3D ビューアを開発した[1),2)]。今回はこれを用いて、動いている物体の長さや時間が変化する、特殊相対性理論の世界を視覚的に表現することを試みる。

光速に近い速さで動く物体はローレンツ収縮し、運動方向の長さが縮むことはよく知られている。しかし、これがそのまま観測者に見えるわけではない。厳密にいうと、物体の各部位から発せられた光が観測者に達する時刻（見える時刻）を同一に考えると、光が発せられる時刻は、物体の部位によって異なってくる。例えば、物体の観測者に近い部位からの光は、遠い部位からの光に比べて遅く発せられた光である。通常この差はごくわずかで、その間の物体の移動は当然無視できるが、光速に近い速さで動く物体の場合、この差は無視できなくなる。即ち、物体が近づく場合、物体の前方は（遅く光が出るわけであるから)、観測者にとってより近く見える。これは、いわゆる「鼻デカワンコ」の写真に似ている。ただこの映像が見えた刹那（10m の距離で見たとして、約 3×10^{-8} 秒後)、観測者または観測機器の命運は尽きる。

このプログラムではまた、光のドップラー効果についても視覚効果を入れている。一般に物体が近づく場合青方変異、遠ざかる場合赤方変異となることが知られている。青方変異の場合、赤色の可視光は青くシフトするが、その分赤外線が赤色にシフトしてくる。我々はこの赤外線の成分について知識がないので、可視光の範囲内だけで考えており、実際の色を再現しているわけではない。あくまでも色が変わる効果があるという程度のものである。

このようなことから、これは物理シミュレーションとは言いづらい。そのため、論文としては物理シミュレーションのシリーズに入れず、単独の研究報告とした。とにかく、この不思議な感覚を体験してもらえれば幸いである。

２．理論的背景

特殊相対性理論は、互いに相対的に運動する慣性系の間での光速度不変の原理と特殊相対性原理を基にして、構成される。それによると１つの慣性系 S（S 系と呼ぶ）に対して z 方向に速さ v で運動する慣性系 S’（S’ 系と呼ぶ）のそれぞれの座標 (t,x,y,z) と (t',x',y',z') は以下の Lorentz 変換によって関係づけられる。ここに c は光速度を表す。

$$t'=\frac{t-(v/c^2)z}{\sqrt{1-(v/c)^2}},\qquad x'=x,\qquad y'=y,\qquad z'=\frac{z-vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

まず、動いている棒を観測する問題を考える。S’ 系の長さ $z'_2-z'_1$ を S 系で観測する場合、S 系においては同時刻に測ることが必要であるから、t を同じ値として、

$$z'_2 - z'_1 = \frac{(z_2 - vt) - (z_1 - vt)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

より、$l = l_0\sqrt{1-(v/c)^2}$ となる。ここに、$l_0 \equiv z'_2 - z'_1$ は静止系で測定した距離、$l \equiv z_2 - z_1$ は運動している系で測定した距離を表している。すなわち、動いている棒には Lorentz 収縮が起こる。時間については、同時刻は同じ位置で測定して、それを他の系から眺める必要があるため、上の Lorentz 変換を逆に考えて、

$$t_2 - t_1 = \frac{\{t'_2 + (v/c^2)z'\} - \{t'_1 + (v/c^2)z'\}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

より、$\tau = \tau_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$ となる。ここに、$\tau_0 = t'_2 - t'_1$ は静止系で測定した時間、$\tau = t_2 - t_1$ は運動している系で測定した時間を表している。これは時間の遅れを意味する。これらは、光速度不変の原理を基に求められる結論である。

光速度に近い速さで運動する物体を観測する場合、特殊相対論的効果だけでなく、光速度が有限に感じられるようになることの効果も大きい。即ち、運動している物体の２点からの光を同時に観測した時、観測者から近い点はより遅く、観測者から遠い点はより早く光を出しているはずで、その効果によって２点の位置が、静止しているときよりずれて見える。例えば物体が観測者に向かって動いている場合、観測者に近い側は遠い側に比べてより近くに見えるはずである。この効果は物体が光速に近い速さになれば顕著となる。我々のプログラムは、物体が観測者に対して角度を持って、近づいたり遠ざかったりする場合にも対応している。

この Lorentz 収縮の効果と有限光速度の効果を計算する。まず図１に光速に近い速さvで、観測者（z 方向）に対して角度θで近づく物体（四角形）とその Lorentz 収縮を与える。

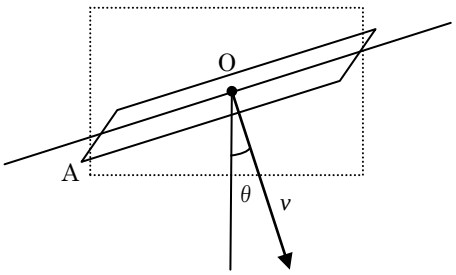

図１　Lorentz 収縮

この Lorentz 収縮は物体を一度、角度$-\theta$だけ回転させて、z 方向で Lorentz 収縮させ、もう一度角度θ戻すことによって簡単に得ることができる。

次に、観測点 Z_0 $(0,0,z_0)$ に点 O $(0,0,o_z)$ からの光が届く際に点 A (x,y,z) からの光はどの位置から発せられるかを考える。その位置を A' (x',y',z') とする。その位置関係を図２に表す。

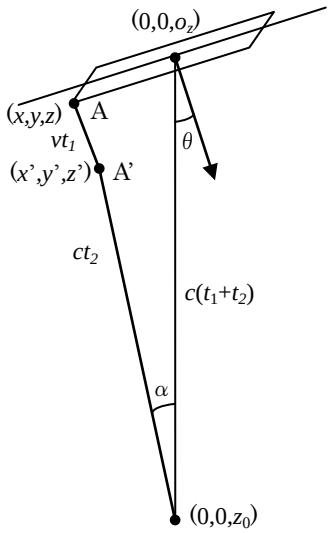

図 2　光速度有限化の影響

ここに y 方向は紙面に垂直な方向とする。

この関係を式で書くと、以下となる。

$$x' = x + vt_1 sin\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = z + vt_1 cos\theta$$
$$(ct_2)^2 = x'^2 + y'^2 + (z_0 - z')^2$$
$$c(t_1 + t_2) = z_0 - o_z$$

簡単のため $c = 1$ の単位系を用いてこれをまとめると、t_1 に対して、以下の 2 次方程式を得る。

$$(1 - v^2)t_1^2 - 2[(z_0 - o_z) + \{(z - z_0)cos\theta + xsin\theta\}v]t_1 + [(z_0 - o_z)^2 - \{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2\}] = 0$$

この解のうち、小さい方は物体の進行方向と同じ方向から光が到着する解で、もう 1 つは逆向きから到着する解である。プログラムはこれらの解を用いて、光の発射位置 A' を求めている。

次に相対論的な効果として求められるものは、物体が光の速さに近づく際の光のドップラー効果である。速度 v で移動する光源から振動数 f で発射された光が、図 2 のように観測者に対して角度αで入射する際の、振動数 f' は以下のように与えられる。

$$f' = f\frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 - v\cos\alpha}$$

ここで、光のドップラー効果は、光源の運動による時間の遅れが含まれており、角度 90 度からの光でもドップラー効果を受ける。

我々はこの効果をイメージするため、可視光のみ考え、色を光の 3 要素に分解し、それぞれのドップラー効果による色の変化を、再度光の 3 要素に分解して、強度に応じて足し合わせ、新しい色を作

り上げている。この場合強度が設定された許容範囲（0～255）を超える場合もあるが、許容範囲で打ち切りにしている。また、紫は純粋な短波長のものと赤と青の合成されたものと区別が付かないとして、後者を採用した。おそらく現実の色とは違いが生じているであろうが、可視光のみ考えるという設定からして現実的でないので、あくまでドップラー効果のイメージとして捉えてもらいたい。

３．プログラムの動作

相対論的な効果を表すには、まず 3D ビューアを用いて 3D モデルや 3 次元関数グラフを描画する。例として図 3 に $z = sin\,x + cos\,y$ の形のグラフを示す。

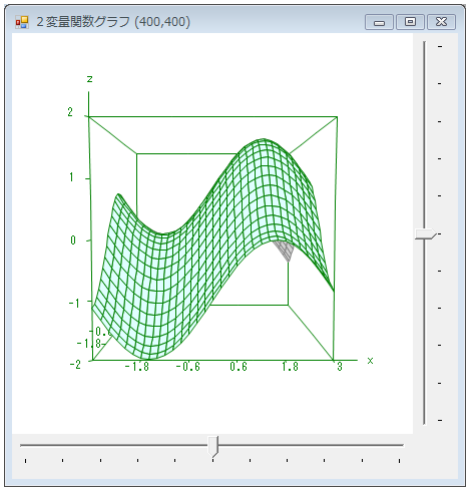

図 3　2 変量関数グラフ

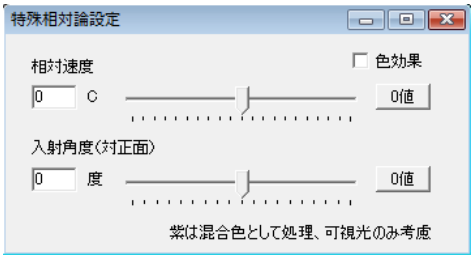

図 4　特殊相対論設定画面

3D ビューアのメニュー［表示ー相対論的効果[ON/OFF]］を選択して、デフォルトの OFF から ON に切り替えると、図 4 の特殊相対論設定画面が表示される。ここでは、物体の速さ v（画面前方を正、後方を負とする）と画面前面垂直方向に対する進行角度 θ（画面に向かって右が正、左が負）が設定できる。その他に、ドップラー効果による色の変化の効果を加えるかどうかのチェックボックスがある。図 5 に、θ=0°で、v=0.5, 0.7, 0.9 の場合の相対論的な効果を示す。

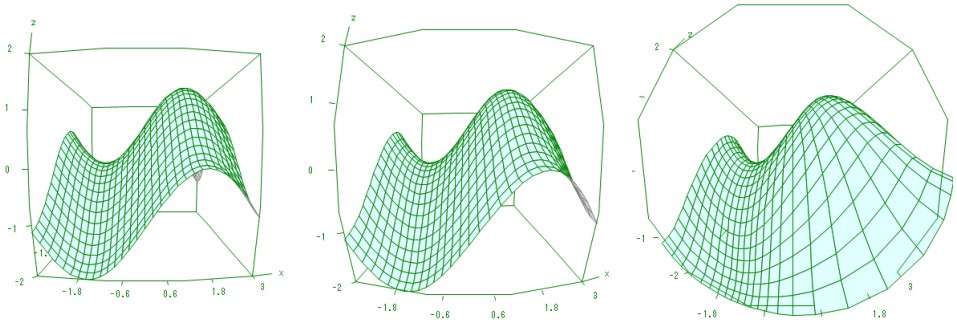

図 5　θ=0°, v=0.5, 0.7, 0.9 の場合の結果

本来、Lorentz 収縮によって物体は前後に縮むが、光速度の有限性の効果によって、前方に飛び出したように見えている。次に、図 6 に、θ=0 で、v=-0.5, -0.7, -0.9 の場合の相対論的な効果を示す。

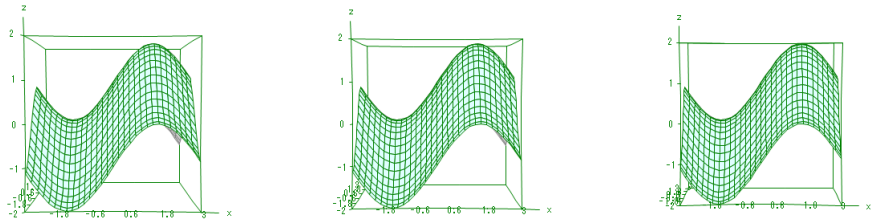

図 6　θ=0°, v=-0.5, -0.7, -0.9 の場合の結果

遠ざかる場合は近付く場合に比べて距離の変化は少なく、Lorentz 収縮の効果がよく見える。

次に、物体が観測者に対して角度を持って近づいて来る場合について、図 7 に v=0.9, θ=30°, 60°, 90°の場合の相対論的な効果を示す。

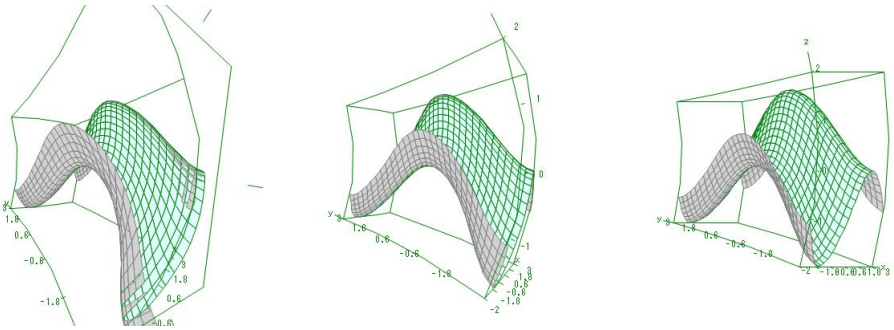

図 7　v=0.9, θ=30°, 60°, 90°の場合の結果

ここで、θ=30°の図は多少乱れている。90°の場合は、物体は右向きに移動していることになる。図 8 に v=-0.9 , θ=30°, 60°, 90°の場合の相対論的な効果を示す。

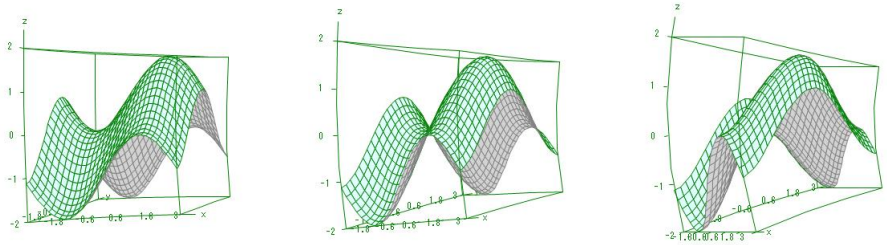

図 8　v=-0.9, θ=30°, 60°, 90°の場合の結果

特に極端な場合、図 9 に v=0.99, θ=-90°, 90°の場合の結果を示す。

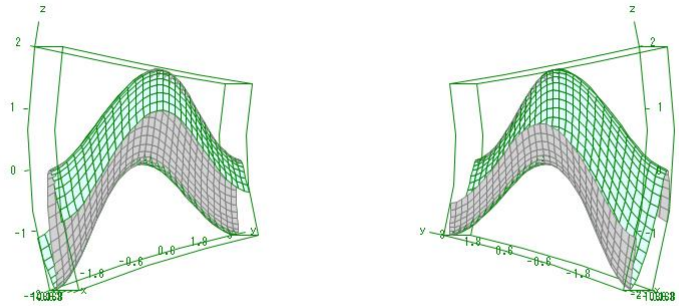

図 9　v=0.99, θ=-90°, 90°の場合の結果

これは Lorentz 収縮により横方向に縮むが、光の到達時間の差によって正面方向がほぼ左右を向く様子を表したものである。

次に光のドップラー効果により、色の変わる様子を示す。この効果は図 4 のメニューで「色効果」チェックボックスをチェックすることで調べることができる。図 10 に θ=0°, v=-0.4, 0.35, 0.55 の場合の結果を示す。

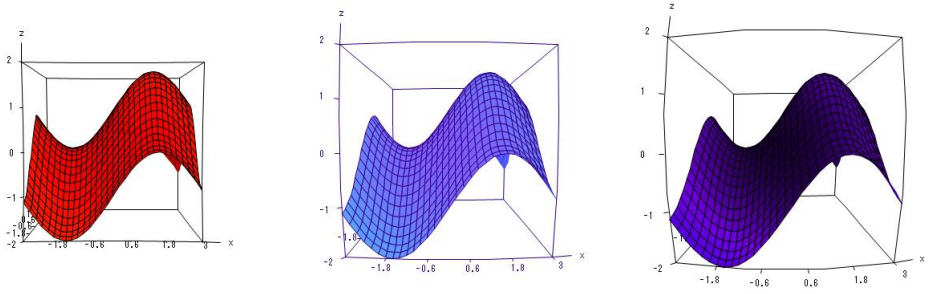

図 10　θ=0°, v=-0.4, 0.35, 0.55 の場合の光のドップラー効果

観測者への光の入射角度によりドップラー効果に影響が表れるので、右側 2 つの図では、中央の色に違いがある。これをより明らかにするために物体の進行角度を変更させる。図 11 に v=0.55, θ=30°, 70°, 90°の結果を表示する。

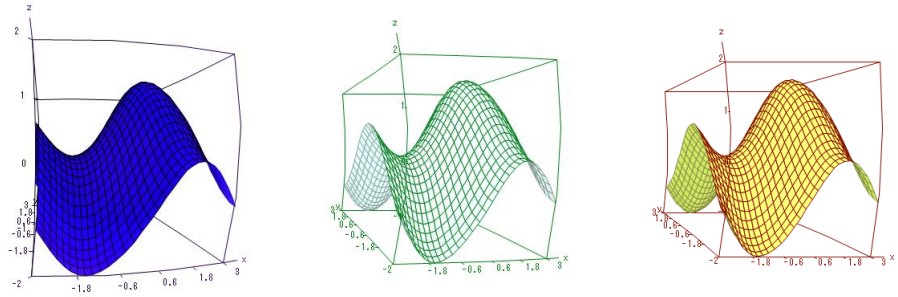

図 11　v=0.55, θ=30°, 70°, 90°の場合の光のドップラー効果

この場合は、物体の進行方向の角度により、一度 70°当りでドップラー効果が無くなり、90°では横ドップラー効果と呼ばれる赤色方向へのシフトが起きている。

光速度に非常に近く、ある程度角度を付けて物体が近づく場合、図 12 のように裏表が逆になって見えることがある。これはもちろん裏表が逆になっているのではなく、図形の左右反転が起こって、プログラム上の裏表の表示の規則から反転しているように見えるだけである。仮に図 13 のように、2 枚の平面を並べて、裏表の反転が起こっているときと同じ条件で見てみると、実際に左右反転が起こっていることが分かる。3D ビューアのメニュー［色－表裏[ON/OFF]］で、表裏を無くしておくとよい。

図 12　v=0, θ=0°, v=0.99, θ=45°の場合の結果

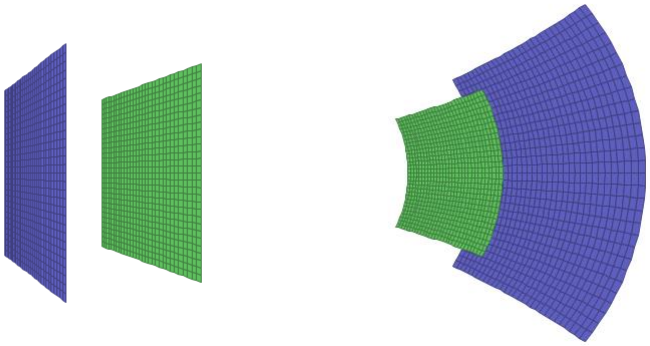

図 13　v=0, θ=0°, v=0.99, θ=45°の場合の左右反転

最後に、近づいて来る図 12 の円筒の内側に入った場合の画像を図 14 に載せておく。2 つの出口が同時に見えるという不思議な現象が見えている。

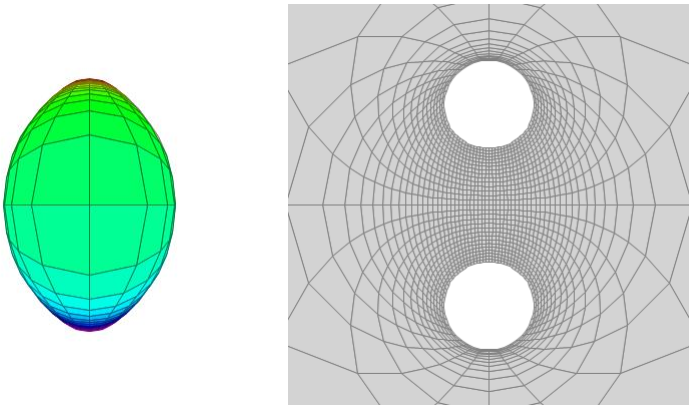

図 14　v=0.95, θ=0°の場合の入る直前と内部に入った後

参考文献

1) 社会システム分析のための統合化プログラム 16 －3D ビューアとその応用－, 福井正康, 尾崎誠, 石丸敬二, 福山平成大学経営研究, 7 号, (2011) 111-127.

2) 数理系教育ソフトウェアにおける汎用グラフィックインターフェースの提案, 福井正康, 石丸敬二, 尾崎誠, 日本教育情報学会誌「教育情報研究」, 第 27 巻, 第 4 号, (2012) 55-66.