２章　行列

2.1 行列とは

行列は様々な分野で使われている非常に重要な概念です。普通の数はただ１つの成分しか持たないのに、行列は縦横に数を並べた構造を持っています。以下に行列の例を示します。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3.2 & 4.1 & 2.3 & -2.5 \\ 5.1 & -2.4 & 1.5 & 3.3 \\ -8.1 & 1.2 & -2.7 & 4.8 \end{pmatrix}$$

通常、行列は括弧でくくって表わします。行列の横方向を行、縦方向を列といいます。上の行列はそれぞれ、2 行 2 列、3 行 3 列、3 行 4 列の行列です。この本では行列を太字で $\mathbf{A}$ のように表します。更に行数と列数を明らかにする場合には、（行数×列数）の表記を加えて、例えば 3 行 4 列の行列を $\mathbf{A}(3\times 4)$ のように表すこともあります。一般の m 行 n 列の行列を以下のように表します。

$$\mathbf{A}(m\times n)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

行列内のそれぞれの数を行列の成分または要素といいます。上の行列の 2 行 3 列成分は a_{23} 、i 行 j 列成分は a_{ij} です。行列 $\mathbf{A}$ の i 行 j 列成分を $(\mathbf{A})_{ij}$ と書くこともあります。即ち、この例では $(\mathbf{A})_{ij}=a_{ij}$ です。

<u>以後ことわらない場合でも、行列 $\mathbf{A}$ の (i,j) 成分は a_{ij}、行列 $\mathbf{B}$ の (i,j) 成分は b_{ij} というように行列名を小文字で表して与えるものとします。</u>

2.2 行列の種類

ここではこれから使う代表的な行列とそれに伴う操作について説明します。

1) 正方行列

一般の行列の中で行と列の数が等しいものを正方行列といいます。例えば前節の最初の例で 1 番目と 2 番目の行列が正方行列です。一般には(2.1)式の中で $m=n$ の場合で、以下のように表わされます。

$$\mathbf{A}(n\times n)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

正方行列の i 行 i 列成分、即ち $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ 成分を行列の対角成分と言います。

2）対角行列

対角行列は正方行列の中で対角成分以外は全て 0 である行列を言います。即ち、以下のような行列です。

$$\mathbf{W}(n\times n)=\begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_n \end{pmatrix}$$

この対角成分の中のいくつかが 0 であっても構いません。

3）単位行列

単位行列とは対角行列の中で対角成分が全て 1 の以下のような行列をいいます。

$$\mathbf{I}(n\times n)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

この本では単位行列を $\mathbf{I}$ で表しますが、他に $\mathbf{E}$ で表す本もあります。この行列は普通の数字の 1 の行列への拡張で、この先重要な役割をする行列ですので、絶対に忘れないようにしましょう。

この単位行列の $(\mathbf{I})_{ij}$ 成分は $i=j$ のとき 1、$i\neq j$ のとき 0 となります。これは**クロネッカー**のδ（**デルタ**）と呼ばれる記号 δ_{ij} で表します。

$$(\mathbf{I})_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{for } i=j \\ 0 & \text{for } i\neq j \end{cases} \tag{2.3}$$

クロネッカーのδも頻繁に使われますので、絶対に覚えておきましょう。

問題

以下の対角行列 $\mathbf{W}$ の成分をクロネッカーの δ を用いて表すと、どのように表示されるでしょう。

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n \end{pmatrix}$$

解答

$$(\mathbf{W})_{ij} = \begin{cases} w_i \cdot 1 & for\ i = j \\ w_i \cdot 0 & for\ i \neq j \end{cases} = w_i \delta_{ij}$$

4) 行列の転置

行列の行と列とを入れ替えることを行列の転置といいます。以下の例を見て下さい。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

行列 $\mathbf{A}$ の１行目が ${}^t\mathbf{A}$ の１列目、２行目が２列目になっています。逆に、$\mathbf{A}$ の１列目が ${}^t\mathbf{A}$ の１行目等となっています。この ${}^t\mathbf{A}$ を $\mathbf{A}$ の転置行列といいます。転置行列はこの他に、${}^T\mathbf{A}$，$\mathbf{A}^t$，$\mathbf{A}^T$，$\mathbf{A}'$ 等の記号で書くこともありますが、この本では ${}^t\mathbf{A}$ に統一します。一般に、行列 $\mathbf{A}(m \times n)$ と転置行列 ${}^t\mathbf{A}(n \times m)$ との関係を書くと以下のようになります。

$$\mathbf{A}(m \times n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad {}^t\mathbf{A}(n \times m) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

これを成分で書くと以下となります。

$$({}^t\mathbf{A})_{ij} = (\mathbf{A})_{ji} = a_{ji}$$

5）対称行列

対称行列とは元の行列とその転置行列が等しくなるような行列です。以下の例を見て下さい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

これらは転置しても元の行列と同じになります。これらの行列は対角成分を対称軸として、対称的に数字が並んでいますので対称行列と呼ばれています。当然、行の数と列の数が等しく（正方行列で）なければなりません。

行列 $\mathbf{A}$ が対称行列であるとは、式で書くと、

$$ {}^t\mathbf{A} = \mathbf{A} \tag{2.4a}$$

が成り立つということになります。行列が等しいとはその行列の全ての成分が等しいということなので、上式は $(\mathbf{A})_{ij} = ({}^t\mathbf{A})_{ij}$ と同じです。成分表示では、対称行列は以下のように書けます。

$$a_{ji} = a_{ij} \tag{2.4b}$$

問題

以下の行列の転置行列を求めよ。また、対称行列はどれか。

1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解答

1) ${}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ 2) ${}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ 3) ${}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) の場合が対称行列である。

2.3 行列の演算

2.3.1 行列の定数倍

行列に通常の数を掛ける計算を考えてみます。これは普通の数どうしの掛け算を拡張したものです。行列の定数倍は行列の各成分にその定数を掛けたものであると定義します。例えば、行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

の 2 倍を考えてみます。この定義によると以下のようになります。

$$2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 12 \\ -4 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

一般に行列 $\mathbf{A}(m \times n)$ の k 倍は以下のようになります。

$$k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

成分表示では $(k\mathbf{A})_{ij} = ka_{ij}$ となります。

2.3.2 行列の和

ここでは行列どうしの和を考えてみます。行列の和はそれぞれの成分の和として表されます。これが計算出来るためには当然２つの行列の行数と列数が等しくなければなりません。以下の例を見て下さい。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

２つの行列の和は以下のようになります。

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 9\\ 0 & 4 & -7\end{pmatrix}$$

一般に行列 $\mathbf{A}(m\times n)$ と $\mathbf{B}(m\times n)$ の和は以下のようになります。

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{21}+b_{21}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

これを成分で書くと $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ となります。もちろん、この演算で交換法則と結合法則は成り立ちます。

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad \text{（交換法則）}$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad \text{（結合法則）}$$

行列の差は定数 -1 を掛けて和をとるという方法で計算しますが、これは成分どうしの引き算になります。即ち、成分で計算すると

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})_{ij}=(\mathbf{A}+(-1)\mathbf{B})_{ij}=a_{ij}+(-1)b_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$$

となります。

問題

行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ が次のように与えられるとき、以下の行列の計算をせよ。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

1) $3\mathbf{A}$　2) $\mathbf{B}+\mathbf{C}$　3) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$　4) $\mathbf{B}-2\mathbf{C}$

解答

1) $\begin{pmatrix}-3 & 6 & 3\\ 3 & 3 & 9\end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　3) 計算できない

4) $\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}$

2.3.3 行列の積

行列どうしの積は多少複雑です。以下の例を見て下さい。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ \boxed{0 \quad 3 \quad 2}\end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}2\\-1\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\3\\0\end{matrix}\end{pmatrix}$$

の２つの行列の積は以下のようになります。

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1\times 2+1\times(-1)+0\times 1 & 1\times 0+1\times 3+0\times 0\\ 0\times 2+3\times(-1)+2\times 1 & 0\times 0+3\times 3+2\times 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \boxed{-1} & 9\end{pmatrix}$$

四角で囲まれた部分は、行列 **A** の 2 行目、行列 **B** の 1 列目を順番に掛けて和を取っています。成分表示では以下のように表わされます。

$$(\mathbf{AB})_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}$$
$$(\mathbf{AB})_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}$$
$$(\mathbf{AB})_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}$$
$$(\mathbf{AB})_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}$$

これを一般的に書くと

$$(\mathbf{AB})_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}$$

となります。この計算から分かることは行列 **A** の列数と行列 **B** の行数が等しくなければ積 **AB** は計算出来ないということです。また、できる行列の行数は行列 **A** の行数に、列数は行列 **B** の列数に等しくなります。これを形式的に書くと以下のようになります。

$$\mathbf{C}(m\times n)=\mathbf{A}(m\times p)\mathbf{B}(p\times n)$$

各行列の成分をそれぞれ小文字で表すと、成分の間の関係は以下となります。

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj} \tag{2.7}$$

次に順序を入れ替えた行列の積 **BA** を計算してみましょう。行列 **B** の列数と行列 **A** の行数が等しくなければ計算出来ませんが、今の場合これらは共に 2 ですので計算可能です。結果は以下のようになります。

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 2\times1+0\times0 & 2\times1+0\times3 & 2\times0+0\times2 \\ -1\times1+3\times0 & -1\times1+3\times3 & -1\times0+3\times2 \\ 1\times1+0\times0 & 1\times1+0\times3 & 1\times0+0\times2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 8 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これを見ても分かるように、一般に行列どうしの積について計算可能でも交換法則は成り立ちません。

$$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$$

また交換法則は行列 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ が正方行列どうしでも一般には成り立ちません。以下の例を見て下さい。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

問題

行列 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ が次のように与えられるとき、以下の行列の計算をせよ。また、求められない場合はその旨を示せ。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\mathbf{C}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1) $\mathbf{AB}$　　2) $\mathbf{BA}$　　3) $\mathbf{BC}$

4) $\mathbf{B}^2$　　5) $\mathbf{C}^2$　　6) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

解答

1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$　　2) 計算できない　　3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 5 \\ -4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$　　5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$　　6) $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.3.4 行列のトレース

行列に関する演算でよく出てくるものに、行列のトレースがあります。これは正方行列に対して行われる演算で、行列の対角成分の合計が演算結果です。すなわち、次の行列 $\mathbf{A}$ のトレースは $\mathrm{tr}\mathbf{A}$ と書いて、以下のように求まります。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{tr}\mathbf{A} = 1 + 2 + (-2) = 1$$

一般に、行列 $\mathbf{A}(n \times n)$ のトレース $\mathrm{tr}\mathbf{A}$ は以下のように表わされます。

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\mathbf{A} &= a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{aligned} \tag{2.8}$$

問題

以下の行列の中でトレースの計算出来るものはその値を求めよ。

1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ 2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解答

1) 計算できない 2) 2 3) 0

2.4 行列の性質と演算

ここでは行列の性質と演算との関係で、実際の計算に役立つ公式を紹介します。

2.4.1 行列と単位行列の積

一般の行列と単位行列の積に関して以下の関係が成り立ちます。

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(m \times m)\mathbf{A}(m \times n) &= \mathbf{A}(m \times n) \\ \mathbf{A}(m \times n)\mathbf{I}(n \times n) &= \mathbf{A}(m \times n) \end{aligned} \tag{2.9}$$

特に行列 $\mathbf{A}$ が正方行列である場合は

$$\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$$

が成り立ちます。例を見てみましょう。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&2&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$$ として、

$$\mathbf{IA}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&2&-1\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&2&-1\\2&1&0\end{pmatrix}=\mathbf{A}$$

$$\mathbf{AI}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&2&-1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&2&-1\\2&1&0\end{pmatrix}=\mathbf{A}$$

となります。このように単位行列 $\mathbf{I}$ は数値の 1 の拡張となっています。これが単位行列の「単位」の語源です。

問題

行列と単位行列の積を成分を用いて計算せよ（クロネッカーのδの性質を使って計算する）。

解答

$$(\mathbf{AI})_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{kj}=a_{ij}=(\mathbf{A})_{ij}$$

$$(\mathbf{IA})_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}a_{kj}=a_{ij}=(\mathbf{A})_{ij}$$

2.4.2 行列の演算と転置

行列の定数倍、和、積と、転置との関係は以下のように与えられます。

1) $^{t}(k\mathbf{A})=k\,^{t}\mathbf{A}$ (2.10)

2) $^{t}(\mathbf{A}+\mathbf{B})={}^{t}\mathbf{A}+{}^{t}\mathbf{B}$ (2.11)

3) $^{t}(\mathbf{AB})={}^{t}\mathbf{B}\,^{t}\mathbf{A}$ (2.12)

例を見てみましょう。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\quad {}^{t}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix},{}^{t}\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$$ より、

1) $$^{t}(k\mathbf{A})={}^{t}\begin{pmatrix}k&0\\3k&2k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&3k\\0&2k\end{pmatrix}\quad k\,^{t}\mathbf{A}=k\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&3k\\0&2k\end{pmatrix}$$

2) $^t(\mathbf{A}+\mathbf{B})= {}^t\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad {}^t\mathbf{A}+{}^t\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) $^t(\mathbf{AB})= {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad {}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

問題

上の 3) の関係を行列の成分を用いて証明せよ。

解答

$$({}^t(\mathbf{AB}))_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} ({}^t\mathbf{B})_{ik} ({}^t\mathbf{A})_{kj} = ({}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A})_{ij}$$

以上より $\quad {}^t(\mathbf{AB}) = {}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$

2.4.3 行列の演算とトレース

行列の定数倍、和、積とトレースとの関係は以下のように与えられます。

1) $\mathrm{tr}(k\mathbf{A}) = k\,\mathrm{tr}\mathbf{A}$ (2.13)

2) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{tr}\mathbf{A} + \mathrm{tr}\mathbf{B}$ (2.14)

3) $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$ (2.15)

例を見てみましょう。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $\mathrm{tr}(k\mathbf{A}) = 4k$, $\qquad k\,\mathrm{tr}\mathbf{A} = 4k$

2) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 7$, $\qquad \mathrm{tr}\mathbf{A} + \mathrm{tr}\mathbf{B} = 4+3 = 7$

3) $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 6 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} = 5$, $\qquad \mathrm{tr}(\mathbf{BA}) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = 5$

これらは、一般にも簡単に証明することができます。1) と 2) は明らかなので、3) について見てみましょう。

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$$

問題

3) の関係は、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が正方行列でない場合でも、成り立つことがある。どのような場合か。

解答

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}(m\times n)\mathbf{B}(n\times m)) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij} = \mathrm{tr}(\mathbf{B}(n\times m)\mathbf{A}(m\times n))$$

より、それぞれの行数と列数が、 $\mathbf{A}(m\times n)$, $\mathbf{B}(n\times m)$ となっている場合である。

2.5 連立１次方程式

行列の積を用いると表示が簡単になる例があります。以下の方程式を見て下さい。

$$\begin{aligned} x + y + \ \ z &= 2 \\ 2x - y - \ \ z &= 4 \\ x - y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

これは変数が (x, y, z) の連立１次方程式です。これは３元連立方程式ですから、解くことは容易ですが、社会科学の分析ではもっとたくさんの変数を使った複雑な連立１次方程式を解くこともあります。もちろん答えを出すためにコンピュータを利用しますが、この計算に非常に役立つのが連立１次方程式の行列表示です。では実際に行列表示に書き換えてみましょう。

最初に以下のように行列 $\mathbf{A}, \mathbf{x}, \mathbf{b}$ を定義します。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ は方程式の係数からできていますので、係数行列とも呼ばれます。 $\mathbf{x}, \mathbf{b}$ は 3 行 1 列の行列で、成分が縦に並んでいることから、縦ベクトルとも言います。これらを用いると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - y - z \\ x - y - 2z \end{pmatrix}$$

の関係から、上の連立方程式は行列表示で以下のように書けることが分かります。

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

もちろん等号は各成分毎に成り立っているものとしています。この形にしておくことが、計算機の計算では大きな便宜を提供します。

問題

以下の連立方程式を行列形式で表示せよ。

$$
\begin{aligned}
x_1 + \ x_2 + x_3 + \ x_4 &= 2\\
-2x_1 - \ x_2 \qquad + \ x_4 &= 4\\
x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad &= 3\\
x_3 + 2x_4 &= -1
\end{aligned}
$$

解答

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

次に、連立方程式の解の有無と係数行列の関係について考えてみましょう。以下の２つの連立方程式の解を求めます。

$$
\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x - y &= 5 \end{aligned}
\qquad
\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{b}
$$

解　$x = 2$, $y = 1$　１つに決まる

$$
\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 5 \end{aligned}
\qquad
\mathbf{A'x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{b}
$$

解　なし

上の方程式は解を１つ持ちますが、下の方程式には解がありません。違いは係数行列だけなので原因はこの行列にあると思われます。そこで係数行列の成分を用いた以下の式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ を計算してみます。

$\mathbf{A}$ の場合　$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \times (-1) - 2 \times 3 = -7 \neq 0$

$\mathbf{A'}$ の場合　$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \times 2 - 1 \times 2 = 0$

このような量は、後に時間をかけて学びますが、行列式と呼ばれています。そしてこれが、解が１つに決まるかどうかを判定する量なのです。特に、これが 0 でない場合、方程式は一意的な解を持ち、0 の場合、方程式は解を持たないか、場合によっては解を無数に持ちます。

問題

方程式の解が無数に存在する場合と存在しない場合の例を示せ。

解答

例えば、以下の形の方程式を考える。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$b = 2a$ のとき、解は無数に存在する。

$b \neq 2a$ のとき、解は存在しない。

2.6 置換

数字等の並び替えを置換といいます。例えば、以下の数字の並びを見て下さい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

上の段と下の段を比べると、2 と 3 が入れ替わっています。これは置換の１つの例で、特にこのように２つの数字を入れ替えただけのものを互換といいます。

次の例を見て下さい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{1 \quad 3 \quad 2 \quad 4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 2 \quad 4} \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

これは、2 と 3 を入れ替え、さらに 2 と 4 を入れ替えた例です。左辺の置換が右辺の２つの互換を続けて行うことによって得られることが分かります。このような２度の操作を互換の積と言います。表記が似ていますが、行列の積と混同しないようにして下さい。

一般に任意の置換は、必ず互換の積で表され、その互換の数が奇数個か偶数個かで、奇置換または偶置換と呼ばれます。この例では、前者が奇置換、後者が偶置換です。

ある置換を表す互換の個数は、その並べ替えの方法によって異なりますが、奇数か偶数かは定まっていることが知られています。

問題

以下の置換を互換の積に分解し、奇置換か偶置換か判定せよ。

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

解答

1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&1&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$　偶置換

2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&1&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&2&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$　奇置換

問題

以下の並びの置換を偶置換と奇置換に分けてすべて挙げよ。

1) $\begin{pmatrix}1&2\\ & \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\ & & \end{pmatrix}$

解答

1)　偶置換：$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$,　奇置換：$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$

2)　偶置換：$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$

　奇置換：$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$

2.7 行列式

ここでは、**2.5** で述べた行列式の一般的な定義を見てみましょう。

定義

任意の正方行列 $\mathbf{A}(n\times n)$ について、行列式 $|\mathbf{A}|$ は以下のように与えられる。

$$|\mathbf{A}|=\sum_{\sigma}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \tag{2.16}$$

ここに σ は $(1\quad 2\quad \cdots\quad n)$ についての１つの置換を表わし、$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は σ が偶置換なら+1、奇置換なら -1 を与える記号です（sgn はサインの意味です）。$\sum_{\sigma}$ はすべての置換について和をとるという意味で、行列の成分 $a_{1\sigma(1)}$ の $\sigma(1)$ は、置換 σ によって 1 が変化した数を表わします。この定義から明らかなように、正方行列以外の行列については行列式は計算できません。行列式は通常 $|\mathbf{A}|$ のように行列を| |でくくって表わします。具体的に成分まで含んだ表記の場合は、行列の括弧の代わりに| |を用います。また、行列式の英語 determinant より、$\det\mathbf{A}$ のような表わし方もします。

さて、定義を説明しただけでは分かりにくいと思いますので、実際に計算してみま

しょう。最初は 2 行 2 列の行列の例ですが、前節の問題が参考になります。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{のとき、}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sigma(1) & \sigma(2) \end{pmatrix} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \\ &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned} \tag{2.17}$$

具体的な数値例では以下のようになります。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{のとき、} |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 2-(-2)\times 3 = 8$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{のとき、} |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\times d - b\times c = ad-bc$$

ここで注意することは、行列と行列式を混同しないということです。行列は縦横に数字の並んだものですが、行列式の値は単なる数です。

2 行 2 列の場合は簡単でしたが、3 行 3 列になると多少面倒になります。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{のとき、}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \\ &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{23}a_{31} + \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad + \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32} + \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} a_{13}a_{22}a_{31} + \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

通常、後に述べる図的な計算法で暗記しますので、上式の順番を少しだけ変えて書き直しておきます。

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \tag{2.18}$$

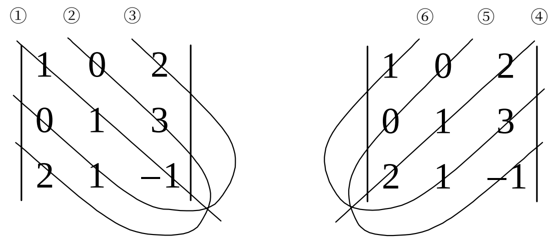
具体的な数値を用いるとこの計算は以下のようになります。

$$
|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
= 1\times1\times(-1) + 0\times3\times2 + 2\times1\times0 - 2\times1\times2 - 0\times0\times(-1) - 1\times1\times3
$$

$$
= -1 - 4 - 3 = -8
$$

計算はかなり複雑で覚えにくいので、以下のような図にして覚えておきます。番号の付いた線をたどって掛け算し、線の傾きの方向によって足したり引いたりします。



$|\mathbf{A}| = ① + ② + ③ - ④ - ⑤ - ⑥$　で計算する。

問題

以下の行列の行列式を求めよ。

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}
$$

解答

$$
|\mathbf{A}| = aei + bfg + chd - ceg - bdi - ahf
$$

4 行 4 列以上の行列の行列式は複雑過ぎて（例えば 4 行 4 列では項の数が 24 個）直接定義から計算する訳にはいきません。そこで、行列式の様々な性質を利用して、簡単に求める工夫をします。これについては、次節で学習します。

2.8 行列式の性質と計算

この節ではさらに複雑な行列式の値を求めるために、行列式の性質を詳しく学びます。見出しとして番号を付けてその性質を書いてありますので、十分理解して下さい。

1）ある行（列）の成分は行列式の各項の中に必ず１回だけ現れる。

行列式の定義の中で各項は、$\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ という形ですから、例えば i 行の成分は $a_{i\sigma(i)}$ のみ、 j 列の成分は $\sigma(k) = j$ となる $a_{k\sigma(k)}$ のみということになります。

2） $|{}^t\mathbf{A}|=|\mathbf{A}|$

以下の例を見て下さい。

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2 \qquad |{}^t\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-2$$

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1+4=5 \qquad |{}^t\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+4=5$$

これらは、

$$|{}^t\mathbf{A}|=|\mathbf{A}| \tag{2.19}$$

を満たしています。

一般に定義式より、

$$|{}^t\mathbf{A}|=\sum_{\sigma}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

であり、この中の、$\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)$ は、1, 2, ･･･ , n を並べ替えただけのものですから、これを 1, 2, ･･･ , n のように再度並べ替えると、今度は右側の添え字が置換された値になります。

$$=\sum_{\sigma'}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma'(1)}a_{2\sigma'(2)}\cdots a_{n\sigma'(n)}$$

ところが、置換 σ' は σ を元に作られたものですから、奇置換であるか偶置換であるかという性質は変わりません。よって $\mathrm{sgn}(\sigma')=\mathrm{sgn}(\sigma)$ であり、

$$=\sum_{\sigma'}\mathrm{sgn}(\sigma')a_{1\sigma'(1)}a_{2\sigma'(2)}\cdots a_{n\sigma'(n)}$$

$$=\sum_{\sigma}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$=|\mathbf{A}|$$

となります。

3）１つの行（列）に共通因子があればくくり出せる。

ある行または列に共通の因子があれば、行列式の値はその因子と因子を取り除いた行列式の積に等しくなります。以下の例を見て下さい。

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}1 & 2\\ \boxed{1 \quad 3}\end{vmatrix}=2\times1=2 \qquad \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}1 & \boxed{1}\\ 2 & \boxed{3}\end{vmatrix}=2\times1=2$$

例えば、最初の例は２行目の、また次の例は２列目の共通因子をくくり出しています。

問題

以下の行列式から共通因子をくくり出して表式を簡単にし、計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解答

例えば、以下のようにする。

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\times\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 2} \\ 6 \quad 3 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \end{vmatrix} = 4\times 3\times\begin{vmatrix} 1 \quad 0 \quad 2 \\ \boxed{2 \quad 1 \quad 0} \\ 0 \quad 1 \quad 1 \end{vmatrix} = 4\times 3\times 5 = 60$$

次に、ある行列を定数倍した行列の行列式について考えます。例えば、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について、行列式$|2\mathbf{A}|$の値はどうなるでしょうか。これまでの話を使えば、共通因子の 2 は次々とくくり出されて、元の行列の行列式との関係が分かります。

$$|2\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 2} \\ 4 \quad 2 \quad 0 \\ 0 \quad 2 \quad 2 \end{vmatrix} = 2\times 2\times\begin{vmatrix} 1 \quad 0 \quad 2 \\ \boxed{2 \quad 1 \quad 0} \\ 0 \quad 2 \quad 2 \end{vmatrix} = 2\times 2\times 2\times\begin{vmatrix} 1 \quad 0 \quad 2 \\ 2 \quad 1 \quad 0 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 1} \end{vmatrix}$$
$$= 2^3\times|\mathbf{A}|$$

これから一般に、n 行 n 列の行列では、各行（列）から掛けた数がくくり出されて、以下のような関係が示されます。

$$|k\mathbf{A}(n\times n)| = k^n|\mathbf{A}| \tag{2.20}$$

4) ２つの行（列）を入れ換えると符号が変る。

行列のある２つの行または列を入れ替えたとき、行列式はどうなるのでしょうか。例えば、簡単な以下の 2 行 2 列の行列を見て下さい。

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad \text{行の入れ換え}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad \text{列の入れ換え}$$

最初の入れ替えは２つの行で、次の入れ替えは２つの列ですが、それぞれ符号が変わっています。このように任意の２つの行または列の入れ替えによって一般に行列式の符号が変わります。

問題

以下の行列式はどの行または列を入れ替えており、その値はいくらになるか。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow \text{1)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{2)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{3)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解答

1) は 1 行と 2 行、2) は 2 行と 3 行、3) は 1 列と 3 列の入れ替えで、これらすべて値は –5 である。

この関係を行列式の定義から見てみましょう。この解説は少し厄介なので飛ばしてもらって構いません。

$$|\mathbf{A}| = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ここで、i 行と j 行の値を交換するとします。これにより、行列式は

$$\sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

と変形されますが、この置換を新たに σ' とすると以下のように書けます。

$$= \sum_{\sigma'} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{i\sigma'(i)} \cdots a_{j\sigma'(j)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$$

ここに置換 σ と σ' との違いは $\sigma(i)$ と $\sigma(j)$ との入れ替えですので、１つの互換の違いです。即ち、これによって、

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma')$$

であり、最終的に以下のようになります。

$$= -\sum_{\sigma'} \mathrm{sgn}(\sigma') a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{i\sigma'(i)} \cdots a_{j\sigma'(j)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$$

$$= -|\mathbf{A}|$$

もちろん、列の入れ替えについても同じ議論をすることができます。

5) ２つの行（列）の各成分が同じならば行列式は0

前の **4)** の性質を利用して、２つの行または列の成分が同じなら、行列式が 0 であることを示すことができます。例えば以下の例を計算してみて下さい。

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$　　2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

左の例は 1 列と 2 列が、右の例は 1 行と 3 行が等しい例です。**4)** の性質を右の例に使ってみましょう。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \ (=0)$$

最初の等号は 1 行目と 3 行目を入れ替えたことによって、行列式に-1 が掛かったことを表しています。しかし、1 行目と 3 行目は同じものですから、-1 が掛かるだけとなり、この行列式の値は 0 でなければならないことが分かります。

6) ２つの行（列）の各成分が比例するなら、行列式の値は0

3) の性質と **5)** の性質を使うと、２つの行または列の各成分が比例するなら行列式が 0 となることを示すことができます。1 行目と 3 行目が比例する以下の例を見て下さい。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

最初の等号は 3 行目の共通因子 2 をくくり出したものです。また次の等号は 1 行目と 3 行目が同じであることからの結果です。一般に **5)** の性質より、この **6)** の性質の方がよく使われます。

7) ある行列の1行（列）成分が（1,1）成分を除いて全て 0 のとき、行列式は（1,1）成分と残りの行列の行列式との積になる。

ちょっと分かりにくいかも知れませんが、以下の例を見て下さい。

$$\begin{vmatrix}4&0&0\\1&1&2\\5&-1&3\end{vmatrix}=4\times1\times3-4\times2\times(-1)=4\times(1\times3-2\times(-1))=4\times5=20$$

$$\begin{vmatrix}4&0&0\\1&1&2\\5&-1&3\end{vmatrix}=4\times\begin{vmatrix}1&2\\-1&3\end{vmatrix}=4\times5=20$$

上は 3 行 3 列の行列式を通常の定義に従って、計算した例です。これを見ると 1 行 1 列成分の 4 が共通因子として現れているのが、分かります。この性質を用いて計算を簡単化したのが下の例です。1 行成分が 1 列目を除いてすべて 0 の場合には、1 行 1 列成分に、1 行成分と 1 列成分を除いた行列の行列式を掛けたものが、元の行列式の値となります。

この性質を利用すると、以下のように 4 行 4 列以上の行列の行列式を計算する方法が少しだけ見えてきます。

$$\begin{vmatrix}3&1&3&5\\0&-1&4&-2\\0&0&4&1\\0&0&2&2\end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix}-1&4&-2\\0&4&1\\0&2&2\end{vmatrix}=3\times(-1)\times\begin{vmatrix}4&1\\2&2\end{vmatrix}=3\times(-1)\times6=-18$$

下の例のように、対角成分より左下（または右上）の成分がすべて 0 の行列を三角行列と呼びますが、この行列の行列式は、対角成分の積で表されることが分かります。これはなかなか便利な性質です。

$$\begin{vmatrix}2&1&3&4\\0&-1&2&-3\\0&0&3&8\\0&0&0&1\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}-1&2&-3\\0&3&8\\0&0&1\end{vmatrix}=2\times(-1)\times\begin{vmatrix}3&8\\0&1\end{vmatrix}=2\times(-1)\times3\times1=-6$$

8) ある行（列）の成分を2つの量に分けると、それぞれの量を成分とした2つの行列式の和は元の行列の行列式に等しい

ここでは、このままでは少し使いにくい性質を学びます。この性質は次の性質 **9)** に応用されて威力を発揮します。ここでは、その基礎を学びます。

以下の 3 つの行列式の計算を見て下さい。

$$\begin{vmatrix}1&2\\-3&-1\end{vmatrix}=5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1-4 & 1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = (-1) + 6 = 5$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3-1 \\ -3 & -1+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 8 + (-3) = 5$$

最初のものは普通に計算したもので、２番目は 2 行目を無理にふたつの数字の合計に変えて、２つの行列式に分けて計算したものです。また、３番目は 2 列目を分けています。これらが同じ答えを持つというのがここでの性質です。

*これは行列式の定義を用いると簡単に理解できます。

$$|\mathbf{A}| = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

上の定義で、例えば i 行成分を以下のように２つに分けたとすると、明らかに $|\mathbf{A}|$ は２つの行列式の和で書かれることが分かります。

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (a^{(1)}_{i\sigma(i)} + a^{(2)}_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a^{(1)}_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a^{(2)}_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= |\mathbf{A}^{(1)}| + |\mathbf{A}^{(2)}| \end{aligned}$$

ここに、$|\mathbf{A}^{(1)}|$ と $|\mathbf{A}^{(2)}|$ とはそれぞれ、元の行列式の成分 $a_{i\sigma(i)}$ の代わりに、$a^{(1)}_{i\sigma(i)}$ と $a^{(2)}_{i\sigma(i)}$ とを用いて作った行列の行列式です。このように、任意の行または列を２つの成分に分けて行列式を計算することもできます。

9) 1つの行（列）の各成分の定数倍を他の行（列）に加え（引い）ても、行列式の値は変わらない

さて、以上で準備が整いましたので、行列式の計算で最もよく利用される性質を見てみましょう。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2+2 & 3+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7$$

この式の最初の等号の右辺第 2 項は、

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

のように 1 行目を 2 倍して 2 行目としています。２つの行は比例しますので、**6)** より、行列式は 0 です。さらに、**8)** より、これらの和は１つの行列式にまとまり、行列式の各成分の値が変更されます。もちろん、２つの行列式の値自身は同じです。

ここで分かったことは、ある行または列に他の行の定数倍を足しても行列式の値が変わらないということです。ではなぜこのようなことをするのでしょう。それは、この性質を利用して、1 行 1 列を残して、1 行目または 1 列目をすべて 0 にできるからです。こうすると **7)** で述べたように行数と列数が１つ少ない行列の行列式として計算できるようになります。

次の例を見てみましょう。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

最初の等号は 2 行目から 1 行目の 2 倍を引いたもので、次の等号は 3 行目から 1 行目を引いたものです。これにより、3 行 3 列の行列式が 2 行 2 列の行列式で計算できるようになりました。さらに行数と列数の多い行列式については、以下の例を参照して下さい。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

8) $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \times |\mathbf{B}|$

１つの行列式を計算するための性質ではありませんが、よく使われる重要な関係

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \times |\mathbf{B}| \tag{2.21}$$

について説明します。

正方行列の積として表される行列の行列式は、各々の行列式の積に等しくなることが知られています。

以下の例を見て下さい。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列について行列式は、$|\mathbf{A}| = -4$, $|\mathbf{B}| = 2$ となります。また、これらの行列について積をとると

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

となりますが、行列式は $|\mathbf{AB}| = -8 = |\mathbf{A}| \times |\mathbf{B}|$ の関係を満たしていることが分かります。これは、一般の正方行列について成り立つことが知られていますが、証明については多少厄介なので省略します。

この関係を使うと同じ正方行列を何回か掛けた行列についての行列式の計算が簡単になります。例えば、上記の $\mathbf{A}$ の場合、

$$|\mathbf{AAA}| = |\mathbf{A}| \times |\mathbf{A}| \times |\mathbf{A}| = (-4)^3 = -64$$

となります。正方行列 $\mathbf{A}$ を n 回掛けた行列を $\mathbf{A}^n$ とすると、一般に以下の関係が成り立ちます。

$$|\mathbf{A}^n| = |\mathbf{A}|^n \tag{2.22}$$

これまで述べてきた行列式の性質を利用して、次の問題で具体的に行列式の値を計算してみましょう。

問題　以下の行列式の値を求めよ。

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$　2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$　3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y+1 & z+2 \\ x & y+2 & z+3 \end{vmatrix}$　5) $\begin{vmatrix} 1 & a & 1/a \\ a & 2a^2 & 2 \\ 1/a & 2 & 0 \end{vmatrix}$　6) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & x+y & z \\ x & x+y+z & x+z \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$　8) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$　9) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解答

1) 8 2) 8 3) -1 4) $-x$

5) -2 6) x^3 7) -1 8) $-abcd$

9) 0 10) $-(x^2-1)^2$