2.9 行列の余因子

2.9.1 行列の余因子とは

　この節では、この後に詳しく述べる逆行列の話の準備として、行列の余因子と言われるものについて説明します。以下の定義を見て下さい。

定義

　行列 $\mathbf{A}$ の i, j 余因子 $\Delta\mathbf{A}_{ij}$ とは、行列 $\mathbf{A}$ の i, j 成分を除いた行列の行列式の値に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものである。

以下の行列の i, j 余因子について、定義から見てみましょう。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

最初に 1,1 余因子 $\Delta\mathbf{A}_{11}$ です。1 行 1 列の成分を除いた行列式に $(-1)^{1+1} = 1$ を掛けます。

$$\Delta\mathbf{A}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

同様にして、$\Delta\mathbf{A}_{12}$ と $\Delta\mathbf{A}_{23}$ についても求めてみます。

$$\Delta\mathbf{A}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$\Delta\mathbf{A}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

次に、最も簡単な 2 行 2 列の行列について、i, j 余因子をすべて求めてみましょう。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

$$\Delta\mathbf{A}_{11} = (-1)^{1+1}d = d \qquad \Delta\mathbf{A}_{12} = (-1)^{1+2}c = -c$$

$$\Delta\mathbf{A}_{21} = (-1)^{2+1}b = -b \qquad \Delta\mathbf{A}_{22} = (-1)^{2+2}a = a$$

2.9.2 余因子による行列式の表示 [Skip OK]

　i, j 余因子は行列式と密接に関係しています。i, j 余因子と行列式との間に以下の関係があることが知られています。

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta\mathbf{A}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\Delta\mathbf{A}_{kj} = |\mathbf{A}|\delta_{ij} \tag{2.23}$$

ここに$|\mathbf{A}|$は行列$\mathbf{A}$の行列式、δ_{ij}はクロネッカーのデルタで、$i=j$のとき 1、$i \neq j$のとき 0 となります。

では、具体的に 2 行 2 列の行列でこの関係を調べてみましょう。

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として、$i=j$と$i \neq j$の場合をやってみます。

$$\sum_{k=1}^{2} a_{1k}\Delta\mathbf{A}_{1k} = a_{11}\Delta\mathbf{A}_{11} + a_{12}\Delta\mathbf{A}_{12} = ad + b(-c) = |\mathbf{A}|$$

$$\sum_{k=1}^{2} a_{1k}\Delta\mathbf{A}_{2k} = a_{11}\Delta\mathbf{A}_{21} + a_{12}\Delta\mathbf{A}_{22} = a(-b) + ba = 0$$

他の成分についても同様に計算できますので、自分で確かめてみて下さい。

問題

上に述べたことを確かめよ。

解答

$$\sum_{k=1}^{2} a_{2k}\Delta\mathbf{A}_{1k} = a_{21}\Delta\mathbf{A}_{11} + a_{22}\Delta\mathbf{A}_{12} = cd + d(-c) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{2} a_{2k}\Delta\mathbf{A}_{2k} = a_{21}\Delta\mathbf{A}_{21} + a_{22}\Delta\mathbf{A}_{22} = c(-b) + da = |\mathbf{A}|$$

2.10 逆行列

2.10.1 逆行列とは

2 行 2 列の行列$\mathbf{A}$に対して、以下の行列$\mathbf{B}$を考えます。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

これらの行列を掛け合わせると、$\mathbf{AB}$と$\mathbf{BA}$それぞれ以下のように与えられます。

$$\mathbf{AB} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{BA} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

ここに、$\mathbf{I}$ は単位行列です。

これらの関係を普通の数で考えてみましょう。行列 $\mathbf{A}$ は数 a に、行列 $\mathbf{B}$ は数 b に対応し、単位行列は 1 に対応します。すなわち、$ab = ba = 1 \Leftrightarrow b = a^{-1}$ であり、b は a の逆数となります。これに対して、以下の関係を満たす行列 $\mathbf{B}$ を行列 $\mathbf{A}$ の逆行列といい、$\mathbf{A}^{-1}$ と表します。

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

定義

正方行列 $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ とは、以下の性質を満たすものをいう。

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{2.24}$$

2.10.2 逆行列の計算

さて、次に逆行列を実際に計算してみましょう。n 行 n 列の行列 $\mathbf{A}(n \times n)$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}(n \times n)$ は以下で与えられることが知られています。

$$\mathbf{A}(n \times n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{A}_{11} & \Delta\mathbf{A}_{21} & \cdots & \Delta\mathbf{A}_{n1} \\ \Delta\mathbf{A}_{12} & \Delta\mathbf{A}_{22} & \cdots & \Delta\mathbf{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta\mathbf{A}_{1n} & \Delta\mathbf{A}_{2n} & \cdots & \Delta\mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

但し、$|\mathbf{A}| \neq 0$ で、$\Delta\mathbf{A}_{ij}$ は行列 $\mathbf{A}$ の i, j 余因子です。行列式が 0 の行列の場合、逆行列は求まりません。特に逆行列における i, j 余因子の並びは、通常の行列成分の並びの転置（行と列が逆）になっていることに注意しましょう。

さて以下の 2 行 2 列の行列 $\mathbf{A}$ の場合、実際に逆行列を求めてみましょう。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

i, j 余因子は簡単に求められ、**2.10.1** で与えた結果が導かれます。

$$|\mathbf{A}| = ad - bc$$

$$\Delta\mathbf{A}_{11} = d,\ \Delta\mathbf{A}_{12} = -c,\ \Delta\mathbf{A}_{21} = -b,\ \Delta\mathbf{A}_{22} = a$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{A}_{11} & \Delta\mathbf{A}_{21} \\ \Delta\mathbf{A}_{12} & \Delta\mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

次に、以下の 3 行 3 列の行列についても逆行列を求めてみます。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{A}| = 2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{A}_{11} & \Delta\mathbf{A}_{21} & \Delta\mathbf{A}_{31} \\ \Delta\mathbf{A}_{12} & \Delta\mathbf{A}_{22} & \Delta\mathbf{A}_{32} \\ \Delta\mathbf{A}_{13} & \Delta\mathbf{A}_{23} & \Delta\mathbf{A}_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

計算ができた方は、実際に $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ が成り立つことを確かめて下さい。

問題

以下の行列の逆行列を求めよ。

1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

解答

1) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

5) $\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & -8 & 4 \end{pmatrix}$

逆行列の定義 [Skip OK]

2.9.2 で与えた i, j 余因子の性質

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \Delta \mathbf{A}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \Delta \mathbf{A}_{kj} = |\mathbf{A}| \delta_{ij}$$

を用いて逆行列の表式 (2.25) の正当性を示します。

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{A})_{ik} (\mathbf{A}^{-1})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{1}{|\mathbf{A}|} \Delta \mathbf{A}_{jk} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \Delta \mathbf{A}_{jk} = \delta_{ij}$$

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{A}^{-1})_{ik} (\mathbf{A})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\mathbf{A}|} \Delta \mathbf{A}_{ki} a_{kj} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \Delta \mathbf{A}_{ki} = \delta_{ij}$$

以上より、$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ が示されました。

逆行列の一意性

今２つの行列 $\mathbf{X}$ と $\mathbf{X}'$ が以下の逆行列の関係を満たすとします。

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{AX}' = \mathbf{X}'\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

これから、$\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{X}') = \mathbf{I} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$ となりますが、左から $\mathbf{X}$ を掛けると、

$$\mathbf{0} = \mathbf{XA}(\mathbf{X} - \mathbf{X}') = \mathbf{I}(\mathbf{X} - \mathbf{X}') = \mathbf{X} - \mathbf{X}'$$

となり、$\mathbf{X} = \mathbf{X}'$ となります。これは、逆行列が存在すれば、それはただ１つだけであるということを示しています。これより、逆行列を１つの方法で求めると後は考えなくてよいということになります。

2.10.3 逆行列の性質

ここではいくつかの逆行列の性質について見てみます。

1) $\left(\mathbf{AB}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

行列の積 $\mathbf{AB}$ に左から $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ を掛けてみましょう。

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right)\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{IB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$$

結果は単位行列となります。また、右から掛けても同じ結果となります。

$$\mathbf{AB}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right) = \mathbf{I}$$

これは、$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ が、$\mathbf{AB}$ の逆行列 $(\mathbf{AB})^{-1}$ であることを表わしています。

同様に、３つの行列の積 $\mathbf{ABC}$ の逆行列は以下のようになります。

$$\left(\mathbf{ABC}\right)^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

問題

行列の積 $\mathbf{ABC}$ の逆行列が $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ となることを証明せよ。

解答

$\mathbf{BC}=\mathbf{X}$ とおくと、$\mathbf{X}^{-1}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ である。

よって、$(\mathbf{ABC})^{-1}=(\mathbf{AX})^{-1}=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ となる。

また、$\mathbf{ABC}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})=(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{ABC}=\mathbf{I}$ を示してもよい。

2) $\left|\mathbf{A}^{-1}\right|=\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$

ここでは逆行列の行列式の値を求めて見ましょう。逆行列の定義、

$$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{I}$$

の両辺の行列式を取ると、

左辺$=\left|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right|=\left|\mathbf{A}^{-1}\right|\left|\mathbf{A}\right|$，右辺$=|\mathbf{I}|=1$ となり、$\left|\mathbf{A}^{-1}\right|\left|\mathbf{A}\right|=1$ より、以下の関係を得ます。

$$\left|\mathbf{A}^{-1}\right|=\frac{1}{|\mathbf{A}|}$$

例えば、以下の行列の逆行列の行列式を求めてみましょう。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\qquad |\mathbf{A}|=5\quad \text{以上より、}\left|\mathbf{A}^{-1}\right|=\frac{1}{5}$$

このことから行列式の値を求めるだけなら、逆行列の具体的な表式を求める必要はありません。

2.10.4 連立１次方程式への利用

2.5 節で、連立１次方程式の行列表示について述べました。即ち、例えば左下の連立１次方程式は右下の行列表示で書けるということを示しました。

$$\begin{aligned}2x_1-2x_2+3x_3&=2\\ x_1+x_2+x_3&=2\\ x_1+3x_2-x_3&=3\end{aligned}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

ここで、$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$，$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$ とおくと、連立１次方程式は

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

のように書けます。さて、この式の両辺に左から行列 $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を掛けてみましょう。

左辺＝ $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{I}\mathbf{x}=\mathbf{x}$，右辺＝ $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

となり、以下の結果を得ます。

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{2.26}$$

これは連立１次方程式の解が求まったことに他なりません。

上の例で具体的に、計算すると以下のようになります。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -4 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & -8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この方法は $|\mathbf{A}|=0$ である場合には、逆行列が求まりませんので使えません。もうお分かりのように、**2.5** 節で述べた解の判定（$|\mathbf{A}|\neq 0$ の場合に解は１つに求まり、$|\mathbf{A}|=0$ の場合に解は１つに求まらない。）はこれを元にしています。

ここで、特に $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ の場合、$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ となり、$|\mathbf{A}|\neq 0$ のときは必ず $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ となります。このような明らかな解を自明な解と呼びます。また、以下のような $|\mathbf{A}|=0$ の場合、

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+3x_3&=0 \\ x_1+x_2+x_3&=0 \\ x_1+x_2+2x_3&=0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

1 行－2 行＝3 行のような関係が成り立ち、独立な方程式の数が減っています。それゆえ、変数の値が一意的には決まりません。

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0 \\ x_1+x_2+2x_3&=0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_3&=0 \\ x_1&=-x_2 \end{aligned} \qquad \text{解は不定（無数に求まる）}$$

$\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ の場合には、その値によって解が不定であったり、解が無かったりします。

$|\mathbf{A}|\neq 0$ であるとき、行列 $\mathbf{A}$ は正則であると言います。また、$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の独立な方程式の数を行列 $\mathbf{A}$ の階数（rank）と言います。

問題

上の例において $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ で、解がない場合と解が不定の場合の例を１つずつ挙げよ。

解答

例えば、解がない場合　$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,　　　解が不定の場合　$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

2.11 行列の固有値と固有ベクトル [Skip OK]

2.11.1 ベクトルについて

固有ベクトルの話を始める前に、ベクトルの話をしておきましょう。直感的にベクトルとは方向性を持った線分のことです。通常座標系の中に矢印で描かれますが、それを数値的に表すのに矢印の先頭の座標を用い、この座標をひとまとまりに表すために n 行 1 列の縦行列で表現します。例えば、2 次元では、以下のようになります。

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

さて、ベクトルは方向性を持った線分ですから、当然その長さ $|\mathbf{a}|$ があります。これは以下のようにして、求められます。

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{{}^t\mathbf{a}\mathbf{a}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

ここで、記号 $|\mathbf{a}|$ は行列式ではありませんので注意して下さい。

また、２つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の間の角度は、以下の式で与えられます。

$$\cos\theta=\frac{{}^t\mathbf{a}\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$$

ここで、${}^t\mathbf{a}\mathbf{b}$ はベクトル $\mathbf{a}$ とベクトル $\mathbf{b}$ の内積と呼ばれています。この内積が 0 の場合、$\theta=90°$ となり、２つのベクトルは直交しています。

2.11.2 行列の固有方程式と固有値

自然科学や統計学に行列が応用される際、頻繁に登場する行列の方程式があります。それは正方行列 $\mathbf{A}(n\times n)$ を用いた以下のような方程式です。

$$\mathbf{A}\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u} \tag{2.27}$$

ここに、記号 λ（ラムダ）は方程式から決まる数値で、固有値と呼ばれます。また、$\mathbf{u}$ は方程式の解を表わす縦行列で固有ベクトルと言われています。この方程式のことを、行列 $\mathbf{A}$ の固有方程式と呼びます。

次に具体的な例を用いて、固有方程式の解法を見ていきましょう。以下のような固

有方程式を考えます。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 2x + y = \lambda x \\ x + 2y = \lambda y \end{array}$$

これを解くためには、右辺を左辺に持っていき、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とします。この x, y が自明の解（ $x = y = 0$ ）以外の解を持つためには、

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

が成り立っていなければなりません。これを具体的に書き下すと、以下のような２次方程式が得られます。

$$(2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

これを解くと、固有値が得られます。

固有値　$\lambda = 3, 1$

一般に、行列 $\mathbf{A}(n \times n)$ の固有方程式 $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$ については、これを書き換えて $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$ とします。この方程式が自明（ $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ）以外の解を持つためには、$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ の関係が必要となります。これは λ について n 次方程式となっています。n 個の解を $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすると、これが固有値となります。

2.11.3 固有値と固有ベクトル

固有方程式から固有値 λ を求める方法は分かりましたが、今度はそれぞれの固有値ごとに固有ベクトルを求めてみます。

前出の固有方程式を例に考えましょう。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 2x + y = \lambda x \\ x + 2y = \lambda y \end{array}$$

ここでは固有ベクトルを以下のように表わしています。

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

この方程式の固有値は $\lambda = 3, 1$ であることが分かっています。これらの２つの固有値

に対して、それぞれの固有ベクトルを求めてみましょう。

固有値$\lambda = 3$に対して

固有方程式は以下のようになります。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

この方程式をxとyの関係に直すと、$x - y = 0$となります。$x = y = c$とおくと、固有ベクトルは、以下の形になります。

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$$

固有ベクトルはcの大きさと符号によって、長さと向きに自由度が残ります。後に述べることを便利にするため、通常この長さを 1 にする、固有ベクトルの規格化と言われる操作が行われます。即ち、

$$^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 = c^2 + c^2 = 2c^2 = 1$$

とし、$c = \pm 1/\sqrt{2}$を得ます。これから、規格化された固有ベクトルは以下のようになります。

$$\mathbf{u}_1 = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

固有値$\lambda = 1$に対して

同様にして$\lambda = 1$に対する場合をまとめておきましょう。解説は省略しますが、理解できると思います。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 0 \quad \text{これより、} \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}$$

固有ベクトルの規格化

$$^t\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 = c^2 + c^2 = 2c^2 = 1 \quad \text{よって、} c = \pm 1/\sqrt{2}$$

これより、規格化された固有ベクトルは、以下となります。

$$\mathbf{u}_2 = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ここで、$\lambda = 3$に対する固有ベクトルを$\mathbf{u}_1$、$\lambda = 1$に対する固有ベクトルを$\mathbf{u}_2$としましたが、当然どちらの固有値に対する固有ベクトルを$\mathbf{u}_1$にしても構いません。

今までの処理を一般的にまとめておきましょう。

固有方程式

$$\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$$

固有値

$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ より、$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

固有ベクトル

各固有値 λ_i に対して、

$\mathbf{Au}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$　→　固有ベクトル　$\mathbf{u}_i$

規格化された固有ベクトル

${}^t\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i = 1$　の条件を付ける。

問題

以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$　　2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

解答

1) $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$　が解を持つためには、

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

固有値　$\lambda = 3, 1$

固有値　$\lambda = 3$　に対して、

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$　$x = -y = c$　規格化して、$\mathbf{u}_1 = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

固有値　$\lambda = 1$　に対して、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$　$x = y = c$　規格化して、$\mathbf{u}_2 = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2) $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$　が解を持つためには、

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

固有値　$\lambda = 4, -1$

$\lambda = 4$　の場合

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad x = y = c \quad \text{規格化して} \quad \mathbf{u}_1 = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1$　の場合

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad x = c,\ y = -\frac{2}{3}c \quad \text{規格化して} \quad \mathbf{u}_2 = \pm\begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

2.11.4 固有ベクトルの性質

２つの行列についてその固有ベクトルを求め、その特徴を見てみましょう。

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **（対称行列）の場合**

$$\lambda_1 = 3,\ \mathbf{u}_1 = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 1,\ \mathbf{u}_2 = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

これから、それぞれの固有ベクトルを掛け合わせてみます。規格化されているので、同じもの同志を掛けると 1 になりますが、異なる固有値に対応する固有ベクトルを掛けると 0 になります。

$${}^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 = {}^t\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 = 1,\quad {}^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 = \pm\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

即ち、異なる固有値に対する固有ベクトルは直交していると言えます。

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **（非対称行列）の場合**

$$\lambda_1 = 4,\ \mathbf{u}_1 = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -1,\ \mathbf{u}_2 = \pm\begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

今度は、異なった固有値に対しても２つの固有ベクトルは直交していません。

$${}^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 = {}^t\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 = 1,\quad {}^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 = \pm\left(\frac{3}{\sqrt{26}} - \frac{2}{\sqrt{26}}\right) = \frac{\pm 1}{\sqrt{26}} \neq 0$$

一般に n 行 n 列の行列に対して、以下の定理が成り立つことが知られています。

定理

　対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する。

この定理について簡単に証明しておきましょう。
固有方程式 $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ の左から固有値 λ_j に関する固有ベクトル ${}^t\mathbf{u}_j$ を掛けてみます。

$$ {}^t\mathbf{u}_j \mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i {}^t\mathbf{u}_j \mathbf{u}_i $$

一方、固有値 λ_j に対する固有方程式の転置をとった ${}^t\mathbf{u}_j {}^t\mathbf{A} = \lambda_j {}^t\mathbf{u}_j$ を用いて、右辺から $\mathbf{u}_i$ を掛けて以下を得ます。

$$ {}^t\mathbf{u}_j \mathbf{A}\mathbf{u}_i = {}^t\mathbf{u}_j {}^t\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_j {}^t\mathbf{u}_j \mathbf{u}_i $$

これらの式の左辺同士は等しいので、両式の差をとると、$(\lambda_i - \lambda_j){}^t\mathbf{u}_j \mathbf{u}_i = 0$ となります。これより、異なる固有値（$\lambda_i \neq \lambda_j$）に対しては、${}^t\mathbf{u}_j \mathbf{u}_i = 0$ となり、２つの固有ベクトルは直交することが示せました。

2.11.5 直交行列による対角化

固有ベクトルの応用として、これらを用いて作られた行列による、元の行列の対角化について見てみましょう。

今、対称行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda = 3, 1$ の規格化された固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を用いて、以下の行列 $\mathbf{U}$ を作ります。

$$ \mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} $$

ここに符号の取り方は問いません。

対称行列に対する規格化された固有ベクトルの性質 ${}^t\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$ により、この行列には以下の関係があることが分かります。

$$ {}^t\mathbf{U}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{u}_1 \\ {}^t\mathbf{u}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1 & {}^t\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \\ {}^t\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1 & {}^t\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} $$

このような関係 ${}^t\mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{I}$ を満たす行列 $\mathbf{U}$ を直交行列と言います。
この行列を用いると、行列 $\mathbf{A}$ は以下の演算で固有値を対角成分とする対角行列になることが知られています。

$$ {}^t\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

これはなぜでしょうか。この理由を見るために、$\mathbf{U}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ の表式を用いて計算を再現してみます。

$$
{}^t\mathbf{UAU}=\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{u}_1 \\ {}^t\mathbf{u}_2 \end{pmatrix}\mathbf{A}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)=\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{u}_1 \\ {}^t\mathbf{u}_2 \end{pmatrix}(\mathbf{Au}_1,\mathbf{Au}_2)=\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{u}_1 \\ {}^t\mathbf{u}_2 \end{pmatrix}(\lambda_1\mathbf{u}_1,\lambda_2\mathbf{u}_2)
$$

$$
=\begin{pmatrix} \lambda_1\,{}^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 & \lambda_2\,{}^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \\ \lambda_1\,{}^t\mathbf{u}_2\mathbf{u}_1 & \lambda_2\,{}^t\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}
$$

この計算には固有方程式の形と直交化された固有ベクトルの性質を使っています。いままでのことを一般化して、以下の定理を得ます。

定理

実対称行列 $\mathbf{A}$ は固有ベクトルによって作られる直交行列 $\mathbf{U}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n)$ によって以下のように対角化される。その際、対角成分は $\mathbf{A}$ の固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ になる。

$$
{}^t\mathbf{UAU}=\mathbf{W}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{2.28}
$$

注意

固有値に同じものが複数個あっても、それぞれに対応した直交する固有ベクトルが選べることが知られています（Schmidt の直交化）。それゆえ、対角化に関する上の性質は、固有ベクトルをうまく選ぶと変更はありません。

同一固有値の場合の例

今、同じ固有値 λ に対して $\mathbf{Au}_1=\lambda\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{Au}_2=\lambda\mathbf{u}_2$ が成り立つ場合を考えましょう。２つの固有ベクトルに対しては ${}^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1={}^t\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2=1$ としますが、一般に直交性は保証されていないとします。

$$
z={}^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2={}^t\mathbf{u}_2\mathbf{u}_1\neq 0
$$

但し、$\mathbf{u}_1\neq\mathbf{u}_2$ である限り、z は内積ですから、$|z|<1$ となっています。

さて、ここで $\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1$，$\mathbf{v}_2=a\mathbf{u}_2+b\mathbf{u}_1$ とおいて、新しい行列を作ってみましょう。これらはまた固有値 λ に対する固有ベクトルです。

$$
\mathbf{Av}_1=\mathbf{Au}_1=\lambda\mathbf{u}_1=\lambda\mathbf{v}_1
$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{A}(a\mathbf{u}_2 + b\mathbf{u}_1) = \lambda(a\mathbf{u}_2 + b\mathbf{u}_1) = \lambda\mathbf{v}_2$$

ここで係数a, bを以下のように選びます。

$$^t\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = {}^t\mathbf{u}_1(a\mathbf{u}_2 + b\mathbf{u}_1) = az + b = 0$$

$$^t\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2 = a^2 + b^2 + 2abz = 1$$

これをa, bについて解くと、$b = -az$として以下のようになります。

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad b = \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}$$

これにより、新しい規格化された固有ベクトルが作られますが、

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2 - z\mathbf{u}_1}{\sqrt{1-z^2}}$$

これらは、固有値λについての直交化された固有ベクトルとなっています。

2.11.6 ２次形式と対角化

ここでは行列の対角化の応用として、２次曲線（楕円、双曲線等）に関する主軸回転の問題を考えてみます。この問題は、一般的な２次曲線の方程式が与えられた場合、座標回転を行うことで、その主軸方向に座標系を向け、曲線の特徴をより鮮明にさせようというものです。

最初にこの問題の準備として座標系の回転の行列表示を示し、次に２次曲線の行列表示について述べます。

準備１　座標系の回転

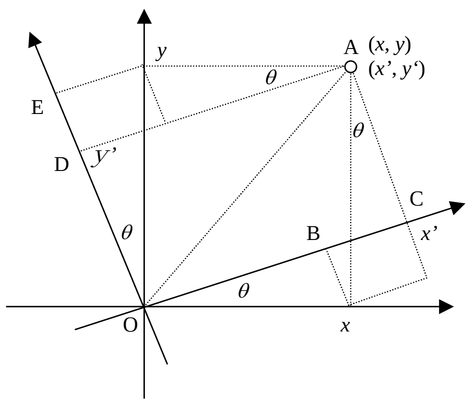

図 2-1　座標系の回転

今、図 2-1 のような座標系の回転を考えます。点 A の座標がそれぞれの座標系で(x, y)及び(x', y')で与えられるとすると、これらの間の関係は回転角をθとして、

$$x' = \mathrm{OC} = \mathrm{OB} + \mathrm{BC},\quad \mathrm{OB} = x\cos\theta,\quad \mathrm{BC} = y\sin\theta$$
$$y' = \mathrm{OD} = \mathrm{OE} - \mathrm{DE},\quad \mathrm{OE} = y\cos\theta,\quad \mathrm{DE} = x\sin\theta$$

であることから、以下のように与えられます。

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

この関係を行列で表示すると次のようになります。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

この回転を表す行列は直交行列になっていることに注意しましょう。即ち、

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{UU} &= {}^t\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \mathbf{I} \end{aligned}$$

準備２　2 次形式

2 次形式とは以下のように変数の 2 次式で表わされる式のことを言います。

$$z = x^2 + 6xy + 2y^2$$

これは、行列を使って以下のように表わすことができます。

$$z = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ここで真ん中の行列は 2 次式の係数から作られる行列で、一般に対称行列で表します。
このことは後の対角化のところで役に立ちます。
一般には、以下のような形式で表わされます。

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = {}^t\mathbf{xAx}$$

ここに、それぞれの行列は以下のように与えられます。

$$\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

以上で用意が終わりましたので、本論に入ろうと思います。２次曲線の代表的なも

のに楕円と双曲線があります。これらはそれぞれ以下のような方程式で表わされます。

楕円　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　双曲線　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$（図の場合は＋）

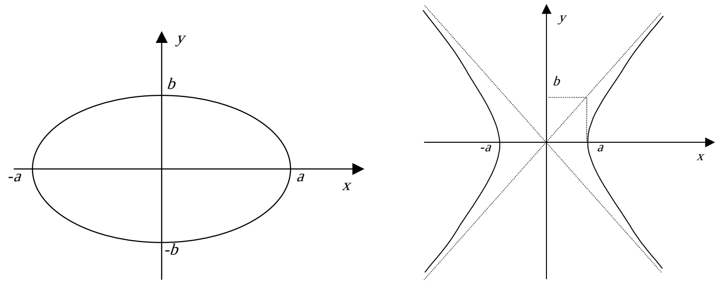

図 2-2 楕円と双曲線

ここで、2 次曲線には一般に xy の項があるのですが、例えば楕円だと座標軸を図 2-2 のように長軸と単軸の向きに合わせると、この項は消すことができます。この xy の項がない場合の座標軸を主軸といいます。

この方程式を行列表示にすると、

楕円　$^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}=1$　　$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1/a^2 & 0\\ 0 & 1/b^2\end{pmatrix}$　$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

双曲線　$^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}=\pm1$　　$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1/a^2 & 0\\ 0 & -1/b^2\end{pmatrix}$　$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

となります。

楕円と双曲線について、係数行列が対角行列の場合は見分けることが簡単ですが、非対角成分が 0 でない $x^2+xy+y^2=1$ のような場合、その曲線が楕円であるか、双曲線であるか、一目では判定できません。また、楕円であることが分かっても、長半径や短半径はすぐには分かりません。ここでは、これらの図形の主軸向きに座標系を回転させて 2 次曲線の特徴を明確にする方法を学びます。

この $x^2+xy+y^2=1$ の例では、方程式が以下の形に表わされます。

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$とすると、$^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}=1$

まず行列 $\mathbf{A}$ の固有値 λ_1,λ_2、規格化された固有ベクトル $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ を求めます。

$$\lambda_1=\frac{3}{2},\lambda_2=\frac{1}{2},\qquad \mathbf{u}_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

これを用いて、直交行列 $\mathbf{U}$ を作りますが、これには $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ の順番と符号の取り方に

よって8種類あることが分かります。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

このうち、例えば$\mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ を選び、$\mathbf{U}{}^t\mathbf{U}={}^t\mathbf{U}\mathbf{U}=\mathbf{I}$を利用して、方程式を書き換えていきます。

$${}^t\mathbf{xAx}={}^t\mathbf{xIAIx}=({}^t\mathbf{xU})({}^t\mathbf{UAU})({}^t\mathbf{Ux})={}^t\mathbf{x}'\mathbf{W}\mathbf{x}'=1$$

ここに、

$$\mathbf{W}={}^t\mathbf{UAU}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/2 & -1/2\\ 3/2 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}={}^t\mathbf{Ux}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x+y)/\sqrt{2}\\ (-x+y)/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

となります。この座標変換$x, y \to x', y'$は、座標の回転とみなされ、回転角θで表わされます。

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

この式と上で求めた行列$\mathbf{U}$の具体的な表式から、

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}={}^t\mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

１つの解として、$\theta=\pi/4$を得ます。

結果をまとめると、

$$x^2+xy+y^2=1$$

で表わされる図形は、座標系を $\theta=\frac{\pi}{4}$ 回転すると、

$$\frac{3}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2=1$$

となり、長半径$\sqrt{2}$、短半径$\sqrt{2/3}$の楕円であることが分かりました。

問題

上に与えた８つの直交行列を、座標系の回転を与えるものと、座標の反転を含むものに分けよ。

解答

座標系の回転を表わす行列は$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$で与えられることから、

回転を与えるもの

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

反転を含むもの

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

問題

以下の方程式は楕円を表しているか、双曲線を表しているか判定せよ。また、座標軸を主軸にするためにはどれだけ回転させればよいか。

1) $x^2+3xy+y^2=1$　　2) $7x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2=8$

解答

1)

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$より、

固有値は、$t^2-2t-\dfrac{5}{4}=(t-\dfrac{5}{2})(t+\dfrac{1}{2})=0$　　$\lambda_1=\dfrac{5}{2}$，$\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{5}{2}x'^2-\dfrac{1}{2}y'^2=1$　　これは、双曲線を表している。

規格化された固有ベクトルは $\mathbf{u}_1=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{u}_2=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

特に、$\mathbf{U}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　として、

$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}={}^t\mathbf{U}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　より、回転角は　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

2)

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 7 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$より、

固有値は、$t^2-12t+32=(t-8)(t-4)=0 \qquad \lambda_1=8, \ \lambda_2=4$

$8x'^2+4y'^2=8$（$x'^2+\dfrac{y'^2}{2}=1$）　これは楕円を表わしている。

規格化された固有ベクトルは $\mathbf{u}_1=\pm\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2=\pm\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

特に、$\mathbf{U}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$　として、

$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}={}^t\mathbf{U}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$　より、回転角は　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$