5章　微分

5.1 微分とは

微積分は自然科学だけでなく経済学等の社会科学においても重要な基礎知識です。特に微分は様々な分析で必要不可欠です。この節では微分の定義とその意味を考えてみます。

ある関数 $y = f(x)$ について、$x = a$ における微分は以下のように定義されます。

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{5.1}$$

この定義を用いて、図からその意味を考えてみます。

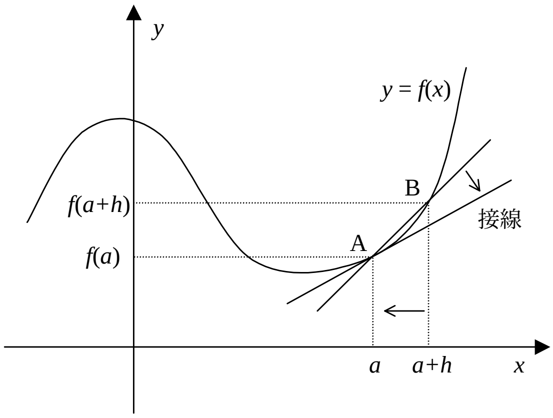

図 5-1　接線の傾きと微分

図 5-1 は関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分の定義を表したものです。定義式の分子 $f(a+h) - f(a)$ は $x = a + h$ と $x = a$ の 2 点における y の値の差です。分母の h は $x = a + h$ と $x = a$ との差と考えられます。これらを合わせると微分の定義式における分数式は、y 軸上の差を x 軸上の差で割ったものであり、A 点と B 点を結ぶ直線の傾きを表わすと考えられます。$\lim_{h \to 0}$ は $a + h$ を a に限りなく近づけることを意味しますが、これは A 点と B 点の間隔を縮めて行くことになります。その際２点を結ぶ直線は、この場合次第に傾きが小さくなって行きます。これが極限まで近づいたとき、この直線は A 点における接線に一致することが分かると思います。即ち、微分の定義式 (5.1) は $x = a$ における接線の傾きに一致します。これは非常に大事で決して忘れてはならないので標語のようにまとめておきましょう。

微分は接線の傾きである。

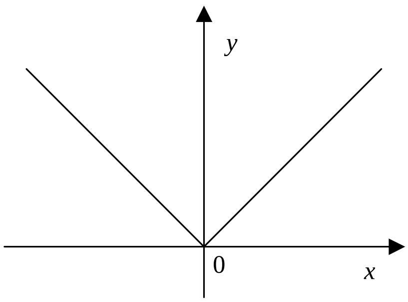

図 5-2　$y=|x|$のグラフ

ここで１つ注意すべき重要なことがあります。それは微分の定義式が値を持つかどうかです。微分の定義式がある一つの値を持てば、$f(x)$ は $x=a$ において微分可能であると言います。また、結果が発散する場合や極限の取り方（左や右から近づける）によって値が異なるときは、$x=a$ において微分可能でないと言います。グラフが $x=a$ において不連続な場合や、折れ曲がっている場合には微分可能でありません。例えば、図 5-2 に見るように、$y=|x|$は $x=0$ において微分可能でありません。

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{|h|}{h}=-1$$

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{|h|}{h}=1$$

$x=a$ における微分が定義されましたが、a の値が動くにつれ微分の値も変化します。即ち、微分も x の関数になります。この関数を例えば $\dfrac{dy}{dx}$ と表し、以下のように定義します。

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{5.2}$$

このように x をそのまま残して微分を求める、即ち x の各点において微分を求めることを単に x で微分するとも言います。また微分された関数を $f(x)$ の導関数と呼びます。以後の計算にはこの定義を利用します。

微分を表す書式はいろいろで、以下によく使われている例を書きます。

$$\frac{dy}{dx}=dy/dx=\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=y'=f'(x)$$

この本では状況に応じて使い分けますので、ご容赦下さい。

さて、これからべき乗関数に微分の定義を適用してみましょう。

最初の例は $y=f(x)=1$ という定数の関数です。定義に従って計算すると $f(x)=f(x+h)=1$ であり、x における微分は常に 0 になります。

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

これはこの関数を表すグラフが図 5-3a のように、傾き 0 の直線になることから納得できます。

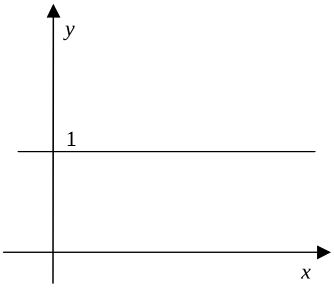

図 5-3a

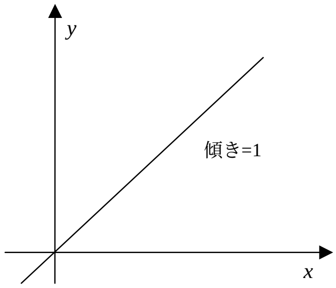

図 5-3b

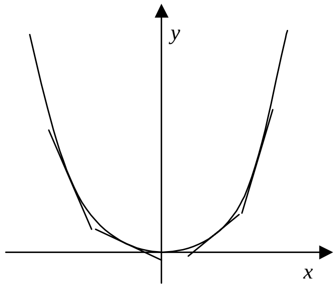

図 5-3c

次は $y = f(x) = x$ ですが、 $f(x) = x$， $f(x+h) = x+h$ を利用すると、以下のように微分は常に 1 になります。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

これは図 5-3b で、グラフの傾きが常に 1 になることと一致しています。

関数が $y = f(x) = x^2$ の場合は、接線の傾きは図 5-3c のように場所によって異なってきます。実際に計算してみると、 $f(x) = x^2$， $f(x+h) = (x+h)^2$ より、以下のようになることが分かります。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

ここに、$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$ を利用しています。

最後に関数が $y = f(x) = x^3$ の場合を見てみましょう。グラフは省略させて下さい。微分は$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$を用いて、以下のように求められます。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

以上の結果を少し書き換えて並べてみましょう。

$$y = 1 \to \frac{dy}{dx} = 0,\quad y = x \to \frac{dy}{dx} = 1,\quad y = x^2 \to \frac{dy}{dx} = 2x,\quad y = x^3 \to \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

これを見るとある規則性があることが分かります。即ち、以下の関係です。

$$y = f(x) = x^n \text{ のとき } \quad \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

上の計算は、$n = 0, 1, 2, 3$ の例です。この計算において次数の n は 0 以上の整数ですが、実はすべての実数について上の関係が成り立つことが知られています。即ち任意の実

数 a に対して以下の公式が得られます。

公式

$$y = x^a \text{ のとき } \quad \frac{dy}{dx} = ax^{a-1} \tag{5.3}$$

問題

以下の関数の微分を求めよ。

1) $y = x^5$　2) $y = x^{20}$　3) $y = x^{-3}$

4) $y = x^{1/2}$　5) $y = \sqrt{x^3}$

解答

1) $y' = 5x^4$　2) $y' = 20x^{19}$　3) $y' = -3x^{-4}$

4) $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$　5) $y = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$ より、 $y' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

5.2 算術関数の微分

前節で x のべき乗についての微分を学びましたが、その他のいわゆる算術関数を微分するとどうなるのでしょうか。ここではこれらの関数の中で代表的なものについて微分した式を公式として与えます。この中には他の式から導けるものもありますが、これくらいは覚えておいた方が計算が速いようです。これら以外の関数については計算して求めることにします。この中に $y = e^x$ の形の指数関数がありますが、これは度々現われる基本的な関数で、定数 e は前節で説明したネーピアの数です。また、対数関数に対してもネーピアの数 e が使われています。底を 10 とする対数を**常用対数**、これに対して底を e とする対数を**自然対数**と言います。自然対数の場合は、底の e を省略して $\log x$ と書くこともありますし、自然 (natural) を強調するために $\ln x$ と書くこともあります。しかし、混乱を避けるために、この本では $\log_e x$ のように底をきちんと書くことにします。

公式

$$y = e^x \to \frac{dy}{dx} = e^x \tag{5.4a}$$

$$y = \log_e x \to \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \tag{5.4b}$$

$$y=\sin x \to \frac{dy}{dx}=\cos x \tag{5.4c}$$

$$y=\cos x \to \frac{dy}{dx}=-\sin x \tag{5.4d}$$

$$y=\tan x \to \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x} \tag{5.4e}$$

ここでは上の公式の中で基本となる $y=e^x$ と $y=\sin x$ とについて求め方を説明しておきましょう。他の公式については、後の節で追い追いに説明して行きます。

$y=e^x$ について

ネーピアの数 e の定義から以下のことが分かります。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e+\alpha$$

但し、$n\to\infty$ のとき $\alpha\to 0$ になります。両辺の $1/n$ 乗を求め、書き直して以下のようにします。

$$\frac{(e+\alpha)^{1/n}-1}{1/n}=1$$

ここで $h=1/n$ とすると、$h\to 0$ で $\alpha\to 0$ となることを用いて、以下の関係が成り立つことが分かります。

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \tag{5.5}$$

この準備のもとに定義に従って計算を実行します。

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x$$

最後から 2 番目の等号で上の関係を使いました。この結果により、$y=e^x$ という関数は微分しても同じ形になる特殊なものであることが分かりました。

さて、今の計算で重要なところは何と言っても、(5.5) の関係です。これはどういう意味を持っているのでしょうか。グラフを用いて考えてみましょう。

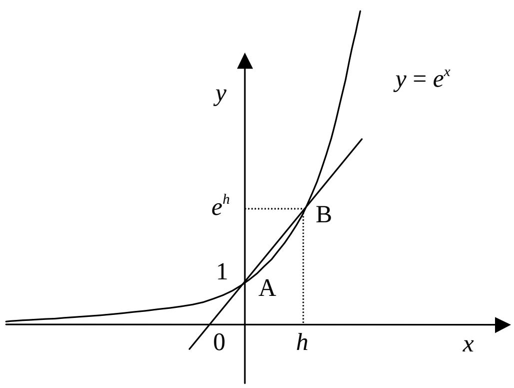

図 5-4 $y=e^x$ の接線

図 5-4 で A 点と B 点を結ぶ直線の傾きは$(e^h-1)/h$で与えられます。それ故$h\to 0$でのこの値の極限は、A 点における接線の傾きになります。即ち、この傾きが 1 になることから、$y=a^x$のグラフで$x=0$での傾きが 1 となるようにaの値を定めたものが、$y=e^x$であると言えます。ネーピアの数eにはこのような意味が含まれています。

$y=\sin x$ について

この微分を考える前に少し準備をしておく必要があります。まず、4 章で説明した倍角の公式を用いて以下の関係を得ます。

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta$$

ここで、$\theta=h/2$とおいて以下のようになります。

$$\cos h-1=-2\sin^2(h/2)$$

この関係を用いると、以下のような極限が求まります。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)\cdot\sin(h/2)}{h/2}=0$$

ここでは、$\lim\limits_{x\to 0}\ \sin x/x=1$の関係も用いています。

いよいよこれらの関係を用いて$y=\sin x$の微分を考えてみます。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right]\\&=\cos x\end{aligned}$$

ここで最後の等号には上で述べた極限の値を利用しました。この計算法を用いると、$y=\cos x$の微分も同様に計算されます。

問題

$y=\cos x$の微分が$y'=-\sin x$になることを上の方法に習って示せ。

解答

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}\right]\\&=-\sin x\end{aligned}$$

5.3 関数の定数倍と和の微分

基本的な関数の微分の結果が分かりましたので、ここからは関数を組合せた場合の微分について説明して行きます。この節では定数倍と関数の和についてです。

基本的な関数に定数が掛かった場合微分はどうなるでしょうか。 $f(x)$ の微分 $f'(x)$ が分かっているとして、$y = af(x)$ の微分を考えます。ここに a は定数です。定義に従って計算します。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{af(x+h) - af(x)}{h} = \lim_{h \to 0} a \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = af'(x)$$

以上のように、$y = af(x)$ の微分は、微分した関数に定数 a を掛けたものになります。この関係を式に表わしておきましょう。

$$y = af(x) \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = af'(x)$$

少し例を見てみましょう。

1) $y = 3x^2 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = 3 \cdot 2x = 6x$

2) $y = 5\sin x \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = 5\cos x$

1) の場合、$a = 3$, $f(x) = x^2$ と考えて、$af'(x) = 3 \cdot 2x$ となり、**2)** の場合、$a = 5$, $f(x) = \sin x$ と考えて、$af'(x) = 5\cos x$ となります。

次に関数の和についての微分です。2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の微分 $f'(x)$ と $g'(x)$ とが分かっているとして、 $y = f(x) + g(x)$ の微分を定義に従って考えます。

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\} + \{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

以上のように関数の和の微分は、関数を微分したものの和になります。これを式で表わしておきましょう。

$$y = f(x) + g(x) \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)$$

この場合の例を見てみましょう。

1) $y = x^3 + x \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$

2) $y = e^x + \cos x \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = e^x - \sin x$

1) の場合、$f(x) = x^3$, $g(x) = x$ として、$f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 1$ となり、**2)** の場合、$f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$ として、$f'(x) + g'(x) = e^x + (-\sin x)$ となります。

以上の結果を公式にまとめておきます。

公式

$$y = af(x) \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = af'(x) \tag{5.6a}$$

$$y = f(x) + g(x) \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x) \tag{5.6b}$$

関数の定数倍と和については、関数が何倍かになれば微分もそうする、和は素直に１つずつ微分するというように、公式より直感に頼った方が分かり易いようです。このことから上の公式は特に覚えておく必要はないでしょう。次はこれらの複合形について例を見てみましょう。

1) $y = ax + b \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = a \cdot 1 + 0 = a$

2) $y = 2x^2 - 3x + 1 \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = 4x - 3$

3) $y = e^x - x^3 \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = e^x - 3x^2$

4) $y = 2\sin x + 3\cos x \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = 2\cos x - 3\sin x$

5) $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{x} \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = 1 - 2x^{-2} = 1 - \dfrac{2}{x^2}$

5) については $y = x - 1 + 2x^{-1}$ と変形すると簡単です。その他については特に説明の必要はないと思います。

問題

以下の関数の微分を求めよ。

1) $y = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$　　2) $y = 2x^5 - 3x^2 + 4$

3) $y = -3x^4 + 5x$　　4) $y = (x+1)(x-1)$

5) $y = x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$　　6) $y = \sqrt{x} + \log_e x$

7) $y = 2\tan x + 3x^{2/3}$　　8) $y = \sum_{i=0}^{n} x^i$

解答

1) $y' = 3x^2 + 4x + 4$　　2) $y' = 10x^4 - 6x$

3) $y' = -12x^3 + 5$　　4) $y' = 2x$

5) $y' = 2x + 1 - x^{-2} - 2x^{-3} = 2x + 1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$

6) $y' = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$

7) $y' = \dfrac{2}{\cos^2 x} + 2x^{-1/3}$　　8) $y' = \sum_{i=0}^{n} ix^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} ix^{i-1}$

5.4 関数の掛け算の微分

前節で微分できる関数の範囲が少し広がりましたが、ここでは微分の分かっている関数同士の掛け算の微分について考えてみます。即ち、 $f(x)$ と $g(x)$ との微分が分かっているとして、 $y = f(x)\cdot g(x)$ の微分を定義に従って求めてみましょう。

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

関数の掛け算の微分は、それぞれの関数を 1 つずつ微分して足し上げて行けばよいことが分かります。これを公式としてまとめておきましょう。

公式

$$y = f(x)g(x) \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{5.7}$$

さらに以下のように３つの関数の掛け算 $y = f(x)g(x)h(x)$ の微分を求めてみましょう。例えば $g(x)h(x)$ をまとめて１つの関数と思えば、結果は容易に導けると思います。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f'(x)[g(x)h(x)] + f(x)[g(x)h(x)]' \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

関数の掛け算の微分について具体的な例を見てみましょう。

1) $y = x^3 \sin x \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$

2) $y = (x^2 + x + 1)\log_e x \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = (2x+1)\log_e x + \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$

1) については、$f(x) = x^3$，$g(x) = \sin x$ とすると、$f'(x) = 3x^2$，$g'(x) = \cos x$ となり、$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ として上の結果を得ます。また、**2)** については、$f(x) = x^2 + x + 1$，$g(x) = \log_e x$ とすると、$f'(x) = 2x + 1$，$g'(x) = 1/x$ となり、上の結果を得ます。

問題

以下の関数の微分を求めよ。

1) $y = x^2(2x^4 + 1)$　　2) $y = (x^4 + x^2 + 1)(x^3 + x)$

3) $y = e^x(x^2 + x + 1)$　　4) $y = x \log_e x$

5) $y = e^x \sin x$　　6) $\sqrt{x} \tan x$

解答

1) $y' = 2x(2x^4 + 1) + x^2 \cdot 8x^3 = 12x^5 + 2x$

2) $y' = (4x^3 + 2x)(x^3 + x) + (x^4 + x^2 + 1)(3x^2 + 1)$

3) $y' = e^x(x^2 + x + 1) + e^x(2x + 1) = e^x(x^2 + 3x + 2)$

4) $y' = 1 \cdot \log_e x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \log_e x + 1$

5) $y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

6) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \tan x + \sqrt{x} \dfrac{1}{\cos^2 x}$

注意

試験を採点しているとよく以下のような間違いを見かけます。例えば微分する問題

で、正しくは

$$y = e^x \cos x \to y' = e^x \cos x + e^x (-\sin x)$$

となるところを、( ) を付け忘れて

$$y' = e^x \cos x + e^x - \sin x$$

のような間違った答えを書いています。十分な注意するようにして下さい。

5.5 関数の割り算の微分

微分の分かっている関数同志の割り算 $y = f(x)/g(x)$ の微分は、定義に従って以下のように計算されます。

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)/g(x+h) - f(x)/g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x)\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

この関係をまとめると以下の公式を得ます。

公式

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{5.8}$$

この公式を用いた例を計算してみましょう。

1) $y = \dfrac{e^x}{2x+1} \quad \to \quad y' = \dfrac{e^x(2x+1) - e^x \cdot 2}{(2x+1)^2} = \dfrac{e^x(2x-1)}{(2x+1)^2}$

2) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \to \quad y' = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

3) $y = \dfrac{1}{x^n} \quad \to \quad y' = \dfrac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$

1) について、 $f(x)=e^x$， $g(x)=2x+1$ として、公式を用いると結果が右側のように求まります。**2)** についても $f(x)=\sin x$， $g(x)=\cos x$ としますが、さらに三角関数における $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ の関係を使うと上の最終的な結果が求まります。ここで気付かれた方もおられるでしょうが、**2)** の関数は $y=\tan x$ と同じです。これについてはすでに証明無しで、 $y'=1/\cos^2 x$ という公式を示しました。この例が $\tan x$ の微分の公式の証明となります。**3)** については、 $f(x)=1$， $g(x)=x^n$ としますが、これはべき乗関数 $y=x^a$ の $a=-n$ の場合に相当し、微分が $y'=ax^{a-1}$ で与えられることを示しています。

問題

以下の関数の微分を求めよ。

1) $y=\dfrac{x}{x+1}$　　2) $y=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

3) $y=\dfrac{e^x}{\sin x+\cos x}$　　4) $y=\dfrac{\sin x}{x+\cos x}$

5) $y=\dfrac{x\sin x}{1+e^x}$

解答

1) $y'=\dfrac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

2) $y'=\dfrac{2x(x^2+x+1)-x^2(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$

3) $y'=\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)-e^x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=\dfrac{2e^x\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$

4) $y'=\dfrac{\cos x\cdot(x+\cos x)-\sin x\cdot(1-\sin x)}{(x+\cos x)^2}=\dfrac{x\cos x-\sin x+1}{(x+\cos x)^2}$

5) $y'=\dfrac{(1\cdot\sin x+x\cos x)(1+e^x)-x\sin x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}$

$$=\frac{\sin x+x\cos x+e^x(\sin x+x(\cos x-\sin x))}{(1+e^x)^2}$$

この問題の 5) では、割り算の微分の中に掛け算 $x\sin x$ の微分の要素が入っています。理解できたでしょうか。

これまで、例でも問題でも結果はできるだけ整理して書くようにしていますが、微分の方法を学ぶ上でこの数式の整理は必要ない（むしろ余計なことに気を使う分だけじゃまな）ように思います。基本はいかに微分の公式をきちんと使えるかで、きれいにまとめることはまた別の問題です。解答の $y'=$ の次の式が微分の公式を素直に使ったものです。ここまで結果を出せば取り敢えず十分な気がします。

5.6 汎関数の微分

汎関数とは、$y=f(z)$ という形の関数で、さらに z が $z=g(x)$ のように x の関数として表わされるものを言います。一まとめにして書くと、$y=f(g(x))$ の形になっている関数です。例えば、以下のように見ると、$y=(x^2+x+1)^5$ や $y=e^{x^2}$ 等が汎関数です。

$y=(x^2+x+1)^5$ については、$y=z^5$，　$z=x^2+x+1$

$y=e^{x^2}$ については、$y=e^z$，　$z=x^2$

このような関数について微分を考えてみましょう。dy/dx は x の微小な変動に対する y の変動の極限を表わしていますから、間に $z=g(x)$ についての微小な変動を加えることも可能です。即ち、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\times\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\end{aligned}$$

ここで、$g(x)=z,\ g(x+h)=z+h'$ とおくと、$h\to 0$ でもちろん $h'\to 0$ となります。

$$\begin{aligned}&=\lim_{h,h'\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\times\frac{f(z+h')-f(z)}{h'}\\&=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}\end{aligned}$$

これによって以下の公式が導かれます。

公式

$$y=f(g(x))\quad\to\quad y=f(z)\text{，}\ z=g(x)\text{ とおいて、}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\times\frac{dy}{dz}\qquad(5.9)$$

この方法を上の例に適用してみましょう。

1) $y=(x^2+x+1)^5 \qquad \to \qquad \dfrac{dy}{dx}=5(2x+1)(x^2+x+1)^4$

2) $y=e^{x^2} \qquad \to \qquad \dfrac{dy}{dx}=2xe^{x^2}$

1) では、$y=z^5$, $z=x^2+x+1$として、以下のようになります。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz}=(2x+1)\cdot 5z^4=5(2x+1)(x^2+x+1)^4$$

ここでdy/dzの式のzはもとのxの式に戻しておきます。**2)** については、$y=e^z$, $z=x^2$として、以下のように求まります。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz}=2x\cdot e^z=2xe^{x^2}$$

さて、最後に今までやり残してある 2 つの関数の微分について見てみましょう。

$y=\log_e x$ について

この場合、対数の定義に従った関係$x=e^y$を利用します。$x=e^y$の両辺をxで微分してみましょう。yの関数のxについての微分には、え汎関数微分の方法を応用します。

左辺 $\qquad \dfrac{d}{dx}x=1$

右辺 $\qquad \dfrac{d}{dx}e^y=\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d}{dy}e^y=\dfrac{dy}{dx}e^y=\dfrac{dy}{dx}x$

これらを比較して以下の公式が示されました。

$$x\frac{dy}{dx}=1 \quad \text{即ち、} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

$y=x^a$ （a が整数でない場合）について

べき乗の中で次数が整数でない場合の微分を考えて見ましょう。これはまず、両辺の対数を取ります。

$$\log_e y=a\log_e x$$

次にこの両辺をxで微分します。

左辺 $\qquad \dfrac{d}{dx}\log_e y=\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d}{dy}\log_e y=\dfrac{dy}{dx}\dfrac{1}{y}$

右辺　　$\frac{d}{dx}a\log_e x=\frac{a}{x}$

両辺が等しいとして、以下のべき乗の公式を得ます。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{x}y=\frac{a}{x}x^a=ax^{a-1}$$

最後に、ネーピアの数eから離れて、一般的な$y=a^x$や$y=\log_a x$の微分について触れておきます。

$y=a^x$については、$a=e^{\log_e a}$の性質を利用します。

$$y=a^x=e^{\log_e a\cdot x}\text{ より、}\frac{dy}{dx}=\log_e a\cdot e^{\log_e a\cdot x}=\log_e a\cdot a^x$$

これはまた、両辺の対数をとって$\log_e y=x\log_e a$とし、これをxで微分しても簡単です。自分で試して見て下さい。

$y=\log_a x$については、底の変換の公式$\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}$を用います。

$$y=\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}\text{ より、}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log_e a}\cdot\frac{1}{x}$$

問題

以下の関数の微分を求めよ。

1) $y=(2x+1)^5$　　2) $y=(\sin x+\cos x)^3$

3) $y=e^{\sin x}$　　4) $y=e^{e^x}$

5) $y=\sin(3x+4)$　　6) $y=\tan(x+\sin x)$

7) $y=\log_e(x^2+x+1)$　　8) $y=\log_e(e^x+1)$

解答

1) $y'=2\cdot 5(2x+1)^4=10(2x+1)^4$

2) $y'=(\cos x-\sin x)\cdot 3(\sin x+\cos x)^2=3(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^2$

3) $y'=\cos x\cdot e^{\sin x}$　　4) $y'=e^x e^{e^x}$

5) $y'=3\cos(3x+4)$　　6) $y'=\frac{1+\cos x}{\cos^2(x+\sin x)}$

7) $y'=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$　　8) $y'=\frac{e^x}{e^x+1}$

5.7 一般的な関数の微分

これで関数の組合せについて、ほぼ完全な微分の方法が確立できました。この節ではさらに複雑な関数の組合わせについて、微分が計算できるよう練習します。微分は基本的なルールが分かれば単純な作業ですので、すべて暗算で計算できます。誰でも必ずできますので、訓練して下さい。

これまでの公式と重複しますが、微分の計算をする際の最低限の暗記事項を以下にまとめておきます。

微分公式

1. $y = x^n \quad \to \quad y' = nx^{n-1}$
2. $y = e^x \quad \to \quad y' = e^x$
3. $y = \log_e x \quad \to \quad y' = \dfrac{1}{x}$
4. $y = \sin x \quad \to \quad y' = \cos x$
5. $y = \cos x \quad \to \quad y' = -\sin x$
6. $y = \tan x \quad \to \quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
7. $y = af(x) \quad \to \quad y' = af'(x)$
8. $y = f(x) + g(x) \quad \to \quad y' = f'(x) + g'(x)$
9. $y = f(x)g(x) \quad \to \quad y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
10. $y = f(x)/g(x) \quad \to \quad y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
11. $y = f\left(g(x)\right) \quad \to \quad z = g(x)$ として、$y' = \dfrac{dz}{dx}\dfrac{df(z)}{dz}$

さて、これまでの微分の要素を複合した問題を考えてみましょう。以下に例を示しますので検討して下さい。

例

$$y = (2x+1)^4(3x+4)^5$$

$$f(x) = (2x+4)^4 \qquad f'(x) = 2\cdot 4(2x+1)^3 = 8(2x+1)^3$$

$$g(x) = (3x+4)^5 \qquad g'(x) = 3\cdot 5(3x+4)^4 = 15(3x+4)^4$$

$$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$= 8(2x+1)^3(3x+4)^5 + 15(2x+1)^4(3x+4)^4$$

$$y = \frac{e^x \sin x}{x^2 + x + 1}$$

$$f(x) = e^x \sin x \qquad f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$$

$$g(x) = x^2 + x + 1 \qquad g'(x) = 2x + 1$$

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$= \frac{e^x(\sin x + \cos x)(x^2 + x + 1) - e^x \sin x \cdot (2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$y = \sin\frac{x}{2x+1}$$

$$z = \frac{x}{2x+1} \qquad y = \sin z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{(2x+1) - x \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dz} = \cos z = \cos\frac{x}{2x+1}$$

$$y' = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} = \frac{1}{(2x+1)^2}\cos\frac{x}{2x+1}$$

問題　以下の関数の微分を求めよ。

1) $y = \dfrac{xe^x}{3x+2}$　　2) $y = \dfrac{\cos x}{x(e^x+1)}$

3) $y = x\sin(2x+1)$　　4) $y = (x^2+1)e^{2x}$

5) $y = \dfrac{\sin(3x+2)}{e^x+1}$　　6) $y = \dfrac{\log_e(x^2+1)}{4x+3}$

7) $y = e^{(x-1)^2/2}$　　8) $y = e^{xe^x}$

解答

1) $y' = \dfrac{(e^x + xe^x)(3x+2) - xe^x \cdot 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{e^x(3x^2+2x+2)}{(3x+2)^2}$

2) $y' = \dfrac{-\sin x \cdot x(e^x+1) - \cos x \cdot \left[(e^x+1) + xe^x\right]}{x^2(e^x+1)^2}$

3) $y' = \sin(2x+1) + x \cdot 2\cos(2x+1)$

4) $y' = 2xe^{2x} + (x^2+1) \cdot 2e^{2x} = 2(x^2+x+1)e^{2x}$

5) $y' = \dfrac{3\cos(3x+2)\cdot(e^x+1) - \sin(3x+2)\cdot e^x}{(e^x+1)^2}$

6) $y' = \dfrac{\dfrac{2x}{x^2+1}(4x+3) - \log_e(x^2+1)\cdot 4}{(4x+3)^2}$

7) $y' = (x-1)e^{(x-1)^2/2}$

8) $y' = (e^x + xe^x)e^{xe^x} = e^x(1+x)e^{xe^x}$