６章 積分

6.1 不定積分

前章で微分について勉強しましたが、ある関数を微分したらどうなるかが分かれば、逆に、微分してある関数になる元の関数は何かということを知りたくなります。この微分と逆の操作が積分です。特に、微分してある関数になる元の関数を求めることを不定積分と言います。例を見てみましょう。x^4 を微分すると $4x^3$ になりますが、$4x^3$ を積分すると x^4+c となります。ここに c は積分定数と呼ばれますが、定数は微分しても 0 ですから、微分して $4x^3$ になる関数にある任意の定数を足しても微分の値には変わりがありません。この定数が積分定数です。即ち、微分する元の関数には積分定数だけの不定性があると言えます。

ある関数 $f(x)$ の不定積分は積分記号 $\int$ （インテグラルと読みます）を用いて以下のように表わします。

$$\int f(x)dx = F(x)+c \tag{6.1}$$

この例では $f(x)=4x^3$ として、以下となります。

$$\int 4x^3 dx = x^4 + c$$

ここで、$F(x)=x^4$ ですが、もともと積分定数の任意性がありますので、この関数についても例えば $F(x)=x^4+1$ でもよいわけですが、通常定数は積分定数の中に含め、最も分かり易い形に書きます。この $F(x)+c$ は原始関数または積分関数と呼ばれ、$f(x)$ は被積分関数と呼ばれています。もちろん、

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

であることは、言うまでもありません。

前章で述べたように微分はほとんどどんな関数でも簡単に計算できました。しかし、積分は一般に我々のよく利用する初等関数（指数、対数、三角関数等）を用いて表現できるとは限りません。我々がここで学ぶものは比較的簡単に初等関数を用いて積分形が表わせるものに限っています。これら以外の一般的な積分には計算機が威力を発揮します。特に、後に学ぶ定積分では計算機による計算手法がいろいろ考案されています。

6.2 算術関数の不定積分

ここでは、微分の最初に述べた算術関数について、不定積分を考えてみましょう。

最初に、x のべき乗についてですが、以下の関係が示されます。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)=x^n \quad より、\quad \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c \qquad (6.2)$$

また、指数関数 $y=e^x$ については、以下の関係が示されます。

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x \quad より、\quad \int e^x dx=e^x+c \qquad (6.3)$$

底が e の対数関数 $y=\log_e x$ については、x の定義される領域（定義域）が $x>0$ なので、この範囲に限定すると、以下となります。

$$\frac{d}{dx}\log_e x=\frac{1}{x} \quad より、\quad \int\frac{1}{x}dx=\log_e x+c$$

しかし、$x<0$ も考えると、$z=-x$ として、以下となります。

$$\frac{d}{dx}\log_e(-x)=\frac{dz}{dx}\frac{d}{dz}\log_e z=-\frac{1}{z}=\frac{1}{x} \quad より、\quad \int\frac{1}{x}dx=\log_e(-x)+c$$

ここに、$x>0$ のとき x、$x<0$ のとき $-x$ というのは x の絶対値で、符号では $|x|$ ですので、２つの場合をまとめて、以下の式が成り立ちます。

$$\int\frac{1}{x}dx=\log_e|x|+c \qquad (6.4)$$

また、三角関数については、以下のようになることはすぐ分かると思います。

$$\frac{d}{dx}(-\cos x)=\sin x \quad より、\quad \int\sin x\,dx=-\cos x+c \qquad (6.5)$$

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x \quad より、\quad \int\cos x\,dx=\sin x+c \qquad (6.6)$$

$$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{1}{\cos^2 x} \quad より、\quad \int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c \qquad (6.7)$$

6.3 関数の定数倍と和の不定積分

微分のときと同様に、積分の分かっている関数の定数倍と関数同士の和について公式をあげてみます。これは微分の関係から明らかだと思います。

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx \qquad (6.8)$$

$$\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx \qquad (6.9)$$

以下の例を見て下さい。

1) $\int 3\sin x dx = 3\int \sin x dx = 3\cdot(-\cos x) + c = -3\cos x + c$

2) $\int (x^2 + \cos x) dx = \int x^2 dx + \int \cos x dx = \frac{1}{3}x^3 + \sin x + c$

1) は定数倍の例で、**2)** は関数の和の例です。ここでも公式として頭を悩ますよりは、定数倍はそのままに、和はそれぞれ積分してというように直感的に計算した方が良いようです。

問題

以下の不定積分を求めよ。

1) $\int \sqrt{x} dx$　　2) $\int (x^2 + 2x + 3)\, dx$

3) $\int (x + \frac{1}{x})\, dx$　　4) $\int \left(2x^{-1/3} + x^{-2/3}\right) dx$

5) $\int (\sin x + \cos x)\, dx$

解答

1) $\frac{2}{3}x^{3/2} + c$　　2) $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + c$

3) $\frac{1}{2}x^2 + \log_e|x| + c$　　4) $3x^{2/3} + 3x^{1/3} + c$

5) $-\cos x + \sin x + c$

6.4 部分積分

微分の場合、微分の分かっている関数同士の掛け算の微分は簡単に求められましたが、積分の場合は結構厄介です。積分では一般に関数の掛け算の積分を簡単に求める方法はありません。

$$\int f(x)g(x)dx \quad \text{を求める公式はない。}$$

しかし、以下のような特別な場合には積分が求められる可能性があります。

$$\int f'(x)g(x)dx$$

即ち、被積分関数が２つの関数の掛け算で、一方の関数がある関数の微分であることが明らかな場合です。しかし、まだこれでは積分できるとは限りません。少し式の変形をして、積分できる可能性を詳しく検討してみましょう。

ある２つの関数について掛け算の微分を考えます。

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

この公式と関数どうしの足し算の公式を使うと、

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

となります。これから、以下のような関係が得られます。

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \tag{6.10}$$

右辺第１項は $f'(x)$ について積分が分かっていれば、簡単に求められます。しかし第２項について、 $f(x)g'(x)$ が積分できなければ、この変形は全く意味がありません。少なくとも $f'(x)g(x)$ よりは、積分し易くなっていなければなりません。これが非常に特殊な条件です。

この積分の方法は、２つの関数の一方だけを積分して、新たな積分にゆだねるというものですから、部分的に積分するという意味で、部分積分と呼ばれています。

部分積分の方法はいくら一般式を使って説明しても分からないので、具体的な例を多く用いてやってみましょう。

1) $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$

$\qquad = xe^x - e^x + c$

この例では、 $f'(x) = e^x$， $g(x) = x$ とします。逆では計算できません。そうすると、 $f(x) = e^x$， $g'(x) = 1$ となり、最初の等号のような変形が可能です。ここで右辺第 2 項について見ると、これは公式を用いてすぐに計算できるので、2 行目の結果を得ます。

2) $\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx$

$\qquad = x\sin x + \cos x + c$

これは $f'(x) = \cos x$， $g(x) = x$ としますと、 $f(x) = \sin x$， $g'(x) = 1$ となります。1 行目の右辺第 2 項は簡単に積分できますので最終的な結果を得ます。

次は頻繁に現われる積分の例です。

3) $\int \log_e x dx = \int 1 \cdot \log_e x dx$

$\qquad = x\log_e x - \int x \cdot 1/x dx$

$\qquad = x\log_e x - x + c$

この対数関数の例では一見積分が難しくなりそうな方法を使っています。つまり、$\log_e x$ を $1\times\log_e x$ と見て、$f'(x)=1$, $g(x)=\log_e x$ とします。そうすると右辺の被積分関数は $f(x)g'(x)=x\cdot 1/x=1$ となって簡単に積分できるようになります。

次の例からは、何回かの部分積分の後、右辺に元と同じ積分が現れる例です。

4) $\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

この場合どちらに割り当てても良いのですが、例えば $f'(x)=e^x$, $g(x)=\sin x$ として、最初の部分積分を行います。そうすると $\sin x$ を $\cos x$ に変えた積分が現れ、再度部分積分すると、2 行目の式のように右辺に左辺と同じ積分が現れます。右辺の積分を左辺に移し 2 倍にして、両辺を 2 で割ります。もちろん、積分定数は後で入れておきましょう。

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

5) $\int \sin^2 x dx = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x dx$

$$= -\cos x \sin x + \int (1-\sin^2 x) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2} x + c$$

これもよく使われる積分です。被積分関数 $\sin^2 x$ を $f'(x)=\sin x$, $g(x)=\sin x$ と 2 つに分け部分積分します。右辺の被積分関数 $\cos^2 x$ を $1-\sin^2 x$ と変形し、1 の部分は積分して、残りの $\sin^2 x$ が左辺と同じ積分となります。この積分を左辺に移して 2 倍とし、両辺を 2 で割り、積分定数を加えて最終的な結果を得ます。この積分は三角関数の半角の公式 $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$ と後に述べる変数変換の方法とを用いても計算できます。

問題

次の 1) から 4) について積分し、5), 6) について答えよ。

1) $\int x \sin x dx$　　2) $\int x^n \log_e x dx$

3) $\int x^2 e^x dx$　　4) $\int \sin^3 x dx$

5) $I_n = \int x^n e^x dx$ の漸化式（I_n と I_{n-1} との関係）を求めよ。

6) $I_n = \int \sin^n x dx$ の漸化式を求めよ。

解答

1) $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$

2) $\int x^n \log_e x dx = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} \log_e x - \dfrac{1}{n+1} \int x^{n+1} \cdot 1/x \, dx$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \log_e x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + c$$

3) $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

4) $\int \sin^3 x dx = -\cos x \sin^2 x + 2\int \cos^2 x \sin x dx$

$$= -\cos x \sin^2 x - \frac{2}{3} \cos^3 x + c$$

5) $I_n = \int x^n e^x dx$

$$= x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - nI_{n-1}$$

注）部分積分を用いて、被積分関数 $x^n e^x$ の x^n の次数を 1 つ下げています。これを繰り返し用いて、積分結果の知られている I_0 まで持って行き、答えを得ます。

6) $I_n = \int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx$$

$$= -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-1}$$

注）この積分も部分積分を繰り返すことによって $\sin x$ の次数を下げて行く方法で答えを得ます。これは不定積分の公式と言うより、むしろ次に述べる定積分の公式として有名な積分です。

6.5 変数変換を利用した積分

汎関数について積分を考えるとき、以下の形をした被積分関数の場合には、変数変換により積分する道が開けます。

$$\int f(g(x)) g'(x) dx$$

即ち、$z=g(x)$ とすると、上の積分は $dz=dz/dx\cdot dx=g'(x)dx$ の関係を利用して、以下のように書き換えられます。

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(z)\frac{dz}{dx}dx=\int f(z)dz \qquad (6.11)$$

ここに微分を微小変化 dz , dx の割り算と見ると、

$$dz=\frac{dz}{dx}dx$$

の関係は納得できます。これで、もし $f(z)$ が z で積分可能であれば、最終的に答えを得ることができます。積分を終えた後、変数 z を $z=g(x)$ で x に書き換えておきましょう。では、具体的に例を見てみましょう。

1) $\int \cos x e^{\sin x}dx=\int e^z dz=e^z+c=e^{\sin x}+c$

2) $\int (2x+1)\cos(x^2+x)dx=\int \cos z\,dz=\sin z+c=\sin(x^2+x)+c$

3) $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{1}{z}dz=\log_e|z|+c=\log_e|\sin x|+c$

1)では $z=\sin x$ と置いています。$dz=\cos x\,dx$ より、上の積分を得ます。**2)**では $z=x^2+x$ より、$dz=(2x+1)dx$ になります。**3)**では、$z=\sin x$ より、$dz=\cos x\,dx$ です。

3) の関係は一般の場合に拡張できます。即ち、分母の関数の微分が分子になっている場合には、以下のような計算が可能です。

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{1}{z}\frac{dz}{dx}dx=\int \frac{1}{z}dz=\log|z|+c=\log|f(x)|+c$$

この公式は非常によく使われるので覚えておくべきでしょう。

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+c \qquad (6.12)$$

さて、被積分関数がちょうど $f(g(x))g'(x)$ の形でないような場合でも、人為的にこの形に導けることもあります。簡単な例として以下の場合を見て下さい。

1) $\int \sin 2x dx=\frac{1}{2}\int \sin 2x\cdot 2dx=\frac{1}{2}\int \sin z\,dz$

$$=-\frac{1}{2}\cos z+c=-\frac{1}{2}\cos 2x+c$$

2) $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}3dx = \frac{1}{3}\int e^{z}dz = \frac{1}{3}e^{z} + c = \frac{1}{3}e^{3x} + c$

3) $\int (3x+2)^4 dx = \frac{1}{3}\int (3x+2)^4 3dx = \frac{1}{3}\int z^4 dz$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}z^5 + c = \frac{1}{15}(3x+2)^5 + c$$

4) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int \frac{x}{2\sqrt{x+1}}dx = 2\int (z^2-1)dz$

$$= \frac{2}{3}z^3 - 2z + c = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + c$$

1) から **3)** までは簡単だと思います。いずれも dz/dx が定数になりますので、その数を出すように積分の前に定数を掛けてやります。しかし、**4)** は以外と難しくて、$z = \sqrt{x+1}$ として、$dz = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$ とします。被積分関数の分母の $\sqrt{x+1}$ は dz の中に現れていますし、分子の x は $x = z^2 - 1$ となって、z の関数として表わされます。

問題

以下の不定積分を求めよ。

1) $\int \cos(4x+5)dx$　　2) $\int \frac{1}{3x-1}dx$

3) $\int (2x+1)^{-4}dx$　　4) $\int \sqrt{3x+2}dx$

5) $\int xe^{x^2}dx$　　6) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$

7) $\int \sin^2 x\cdot\cos x dx$　　8) $\int \tan x dx$

9) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$　　10) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

解答

1) $\frac{1}{4}\sin(4x+5)+c$　　2) $\frac{1}{3}\log_e|3x-1|+c$

3) $-\frac{1}{6}(2x+1)^{-3}+c$　　4) $\frac{2}{9}(3x+2)^{3/2}+c$

5) $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}2xdx = \frac{1}{2}\int e^{z}dz = \frac{1}{2}e^{z} + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

6) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}dz$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\log_e |z| + c = \frac{1}{2}\log_e (x^2+1) + c$

注） $x^2+1>0$ より、絶対値記号は外してもよい。

7) $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int z^2 dz = \frac{1}{3}z^3 + c = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

8) $\displaystyle\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x)dx$

$\displaystyle = -\int \frac{1}{z}dz = -\log_e |z| + c = -\log_e |\cos x| + c$

9) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x - \int \tan x dx = x\tan x + \log_e |\cos x| + c$

10) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^{\sqrt{x}} 2\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}dz = 2\int ze^z dz = 2(ze^z - \int e^z dz)$

$= 2(ze^z - e^z) + c = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + c$

最後にこれまで述べてきた不定積分の公式をまとめておきましょう。

積分公式

1. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
2. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + c$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log_e |x| + c$
4. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + c$
5. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + c$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$
7. $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
8. $\displaystyle\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
9. $\displaystyle\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

6.6 有用な公式

最後に、a^2-x^2 と a^2+x^2 に関する、よく使われるけれど知っておかないと難しい積分を紹介しておきます。

1) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

この積分は $x=a\sin\theta$ とおくのが定石です。この変換は今までのように、$z=g(x)$ の形ではなく、$x=g(\theta)$（$z=\theta$）の形で表わされています。この場合は素直に $dx=g'(\theta)d\theta$ としておきましょう。dx が θ の関数として表わされます。この変換は他の a^2-x^2 の関数にも有効です。

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int \frac{1}{a\sqrt{1-\sin^2\theta}}a\cos\theta\, d\theta$$
$$=\int d\theta=\theta+c=\sin^{-1}(x/a)+c$$

ここに、$\sin^{-1}y$ は、$1/\sin y$ ではなくて、$y=\sin\theta$ の際に y の値を与えて θ の値を求める関数（$y=\sin\theta$ の逆関数と言います）で、$\arcsin y$ とも表わします。この積分の場合、$y=x/a=\sin\theta$ で、$\theta=\arcsin(x/a)$ となります。

2) $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx$

ここでは、変数変換は使わずに被積分関数を書き換えて積分してみましょう。

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2a}\left(\log_e|a+x|-\log_e|a-x|\right)+c$$
$$=\frac{1}{2a}\log_e\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$$

最後の変形は $\log_a x-\log_a y=\log_a(x/y)$ の公式を利用しています。

3) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

これも $x=a\sin\theta$ と置いてみましょう。

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\int a^2\cos^2\theta\, d\theta=a^2\int \frac{\cos 2\theta+1}{2}d\theta$$

2 つ目の等号は三角関数の半角の公式を利用しました（部分積分の方法でも結構です）。

$$=\frac{a^2}{4}\left(\int\cos 2\theta\cdot 2d\theta+\int 2d\theta\right)=\frac{a^2}{4}\left(\sin 2\theta+2\theta\right)+c$$

ここで倍角の公式を使います。

$$=\frac{a^2}{2}(\sin\theta\cos\theta+\theta)+c$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}(x/a)\right]+c$$

最後は、$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-(x/a)^2}=1/a\cdot\sqrt{a^2-x^2}$ の関係を利用して、変数 θ をもとの x に戻して出来上がりです。

4) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$

　ここでは $x=a\tan\theta$ としても積分可能ですが、もう少しうまく被積分関数を変形して解いてみましょう。

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\int\frac{\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}dx=\log_e\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+c$$

ここで、不思議な変換をしたのは以下の理由からです。$f(x)=x+\sqrt{a^2+x^2}$ とすると、$f'(x)=\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$ となり、被積分関数 $1/\sqrt{a^2+x^2}$ はよく知られた $f'(x)/f(x)$ の形になります。それゆえ上式の結果が成り立つことが分かります。

5) $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx$

　この場合は、定石どおり $x=a\tan\theta$ と置いてみます。すると、

$$dx=\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$a^2+x^2=a^2+a^2\tan^2\theta=a^2(1+\tan^2\theta)=\frac{a^2}{\cos^2\theta}$$

の関係から、以下の結果を得ます。

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{\cos^2\theta}{a^2}\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\theta + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}(x/a) + c$$

6) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$

　最後の積分は、多少厄介です。

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \int 1\cdot\sqrt{a^2+x^2}dx$$

被積分関数に 1 が掛かっているものとして、部分積分してみましょう。 $f'(x)=1$, $g(x)=\sqrt{a^2+x^2}$ とすると、以下のようになります。

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int x\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

さらに、第 2 項を変形します。

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{(a^2+x^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}dx + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

第 2 項は元の積分と同じですから左辺に送って、以下の関係を得ます。

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

右辺第 2 項の積分は既に計算済みですから、その結果を用いて以下の式を得ます。

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\log_e\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + c$$