## 6.7 定積分と面積

前節まで不定積分について学びましたが、これには微分の逆演算という他に積分定数をうまく選ぶと $x$ 軸と関数曲線の間の面積という意味が生まれてきます。ここではこの関係について学びましょう。

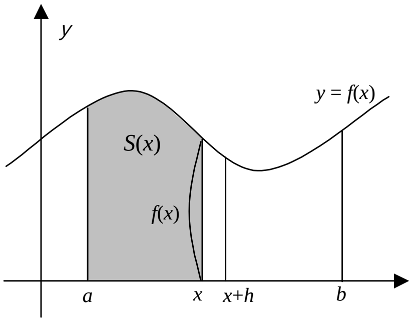


図 6-1 面積と積分

図 6-1 を見て下さい。$x$ 軸の範囲が $a$ と $x$ の間で、曲線と $x$ 軸とに挟まれた間の面積を $S(x)$ としましょう。この面積の関数を $x$ で微分してみます。$x$ における関数の高さが $f(x)$ ですから、充分小さな $h$ では、面積の差 $S(x+h)-S(x)$ は近似的に $f(x)\cdot h$ となり、以下のような結果を得ます。

$$\frac{dS(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot h}{h}=f(x)$$

これは、面積 $S(x)$ の微分が関数の値 $f(x)$ になるという式です。すなわち、積分定数の自由度を除いて、面積 $S(x)$ は関数の値 $f(x)$ の積分になるということです。つまり、$f(x)$ の積分関数を $F(x)+c$ として以下のようになります。

$$S(x)=\int f(x)dx=F(x)+c$$

さらに、面積 $S(x)$ は $x=a$ において、$S(a)=0$ となりますので、上式から以下の関係が成り立っていなければなりません。

$$S(a)=F(a)+c=0$$

この式から、積分定数の値は $c=-F(a)$ のように確定されます。

以上から、面積と積分関数の関係は以下のようになります。

$$S(x)=F(x)-F(a)$$

一方、$x=b$ と $x=a$ における積分関数の差を $F(b)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^b=\int_a^b f(x)dx$ のように表わすと、$a\le x\le b$ の間の面積 $S=S(b)$ はこの積分の表式を用いて、以下のよ

うに表わされます。

$$S = \int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a) \tag{6.13}$$

この表式は関数 $f(x)$ の定積分と呼ばれています。定積分はその定義から積分範囲を逆にすると符号が変わることが分かります。

$$\int_b^a f(x)dx = \left[F(x)\right]_b^a = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(x)dx \tag{6.14}$$

以下の節でこの定積分の具体的な計算をやってみましょう。

## 6.8 基本的な定積分

ここでは簡単な定積分の例を示します。

**1)** $\int_0^2 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 2$

**2)** $\int_2^0 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^0 = \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 4 = -2$

**3)** $\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}\cdot 8 - \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{7}{3}$

**4)** $\int_{-\infty}^0 e^x dx = [e^x]_{-\infty}^0 = e^0 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1$

**1)** から **3)** について計算式は簡単に理解できると思います。**1)** と **2)** については積分範囲が逆になっていますので、前節で見たように、答えの符号が逆になります。また、$\left[F(x)\right]_a^b$ の中の定数因子は前に出して計算しても結構です。例えば 3) では、以下のように考えると計算がやり易いでしょう。

$$\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$$

**4)** については、無限大やマイナス無限大は $\pm\infty$ の記号を用いて表わし、これらを通常の数のように代入しながら、$e^{-\infty}$ のようにしても（正式にはどうかと思いますが）分かり易ければ良いように思います。

**5)** $\int_0^{\pi} \sin xdx = [-\cos x]_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$

**6)** $\int_{\pi}^{2\pi} \sin xdx = [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos\pi) = -(1-(-1)) = -2$

注）関数の負の部分はマイナスとなる。

**5)** と **6)** の２つの定積分を見て下さい。この積分範囲を図示すると、図 6-2 のように、**5)** については $x$ 軸の上側だけ、**6)** については $x$ 軸の下側だけが対象になっています。

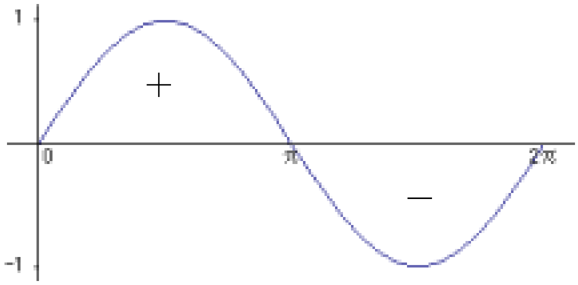


図 6-2　$\sin x$ の積分

ここで注意することは、$y>0$ の部分の積分は正、$y<0$ の部分の積分は負になることです。このため、**6)** では結果が負になっています。

積分が分かっている関数の和の積分も、関数をひとつずつ積分して行くだけです。

**7)** $\int_0^4 (x+1)dx = [1/2\,x^2 + x]_0^4 = 8+4 = 12$

**8)** $\int_0^\pi (1+\sin x)dx = [x - \cos x]_0^\pi = [\pi-(-1)]-(0-1) = \pi+2$

**9)** $\int_0^1 (e^x + e^{-x})dx = [e^x - e^{-x}]_0^1 = (e-e^{-1})-(1-1) = e-e^{-1}$

**7)** と **8)** の積分は簡単でしょう。**9)** については、$e^{-x}$ の積分が $-e^{-x}$ であることを利用しています。これは不定積分の変数変換のところで学んでいます。この積分については、不定積分まで戻らなくても定積分のままで変数変換する方法を後に学びます。

## 6.9 部分積分

不定積分の１つの計算法に部分積分の方法がありましたが、定積分でも同様の方法が用いられます。

$\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)]$ について、定積分を考えてみます。これは、微分した形なので、定積分はすぐに求まります。

$$\int_a^b \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

　また、左辺は以下のように変形できます。

$$\int_a^b \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx$$

$$= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

これらから、不定積分と同様に以下の部分積分の公式を得ます。

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{6.15}$$

　この公式を使った例題をやってみましょう。

**1)** $\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$

**2)** $\int_0^\pi x\sin x dx = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = -\pi\cos\pi + [\sin x]_0^\pi = \pi$

**3)** $\int_1^e \log_e x dx = \int_1^e 1\cdot\log_e x dx = [x\log_e x]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx = e - [x]_1^e = 1$

**1)** から **3)** は単純な例題です。$f'(x)$ と $g(x)$ とをうまく選ぶと、$f(x)g'(x)$ は簡単に積分できる形になります。

**4)** $\int_0^\pi e^x \sin x dx = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx$

$$= 0 - [e^x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin x dx$$

$$= (e^\pi + e^0) - \int_0^\pi e^x \sin x dx$$

　ゆえに、$\int_0^\pi e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^\pi + 1)$

**4)** については部分積分を 2 回する必要があります。そうすると右辺の積分は、元の積分の形になります。これを左辺に移して、2 で割ると、上のような結果が得られます。

**問題**

　部分積分を用いて以下の定積分を求めよ。

1) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$　　2) $\int_0^1 (x+1)e^x dx$

3) $\int_0^{\pi/2} x\sin x dx$　　4) $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$

5) $\int_{-\pi}^0 x\cos x dx$　　6) $\int_1^e x\log_e x dx$

7) $\int_0^1 x^2 e^x dx$　　8) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$

**解答**

1) $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = [xe^x]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^x dx = (0-0) - [e^x]_{-\infty}^{0} = -(1-e^{-\infty}) = -1$

2) $\int_0^1 (x+1)e^x dx = [(x+1)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (2e-1) - [e^x]_0^1$

$$= (2e-1) - (e-1) = e$$

3) $\int_0^{\pi/2} x\sin x dx = [-x\cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = -(0-0) + [\sin x]_0^{\pi/2}$

$$= (1-0) = 1$$

4) $\int_0^{2\pi} x\sin x dx = [-x\cos x]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x dx = -(2\pi - 0) + 0 = -2\pi$

5) $\int_{-\pi}^{0} x\cos x dx = [x\sin x]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} \sin x dx = (0-0) - [-\cos x]_{-\pi}^{0}$

$$= (1-(-1)) = 2$$

6) $\int_1^e x\log_e x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \log_e x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2 \cdot 1/x\, dx$

$$= \frac{1}{2}(e^2 - 0) - \frac{1}{4}[x^2]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

7) $\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx = e - 2[xe^x]_0^1 + 2\int_0^1 e^x dx$

$$= e - 2e + 2[e^x]_0^1 = -e + 2(e-1) = e-2$$

8) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = [-\sin x\cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$

$$= -(0-0) + \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

ここで、比較的よく利用されて、計算の結果が漸化式として求まる公式を与えておきましょう。

$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$　について

今、$x^n$ の次数に注目して、この積分を $I_n$ と置きましょう。これを１回部分積分すると以下のようになります。

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} nx^{n-1} e^{-x} dx = n\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

ここに $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ の関係を用いました。最後の積分は上の定義に従うと、$I_{n-1}$ となり、以下の漸化式が得られることになります。

$$I_n = n \cdot I_{n-1}$$

さらに、$I_0 = \int_0^\infty e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$ を用いて漸化式を解くと、以下の結果を得ます。

$$I_n = n \cdot I_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot I_{n-2} = \cdots = n! \cdot I_0 = n!$$

$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ について

これも漸化式を利用する非常に有名な積分です。$\sin x$ の次数に注目して、この積分を $I_n$ と置きましょう。

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx \\ &= [\sin^{n-1} x \cdot (-\cos x)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \cdot \cos x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

ここに $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$ と考えて、 $f'(x) = \sin x$, $g(x) = \sin^{n-1} x$ とします。部分積分すると第 1 項は 0 になり、第 2 項の $\cos^2 x$ を $1 - \sin^2 x$ に置きかえると上式のように右辺に、$I_{n-2}$ と $I_n$ が現れます。$I_n$ を含む項を左辺に移して、$I_n$ について求めると、以下の漸化式を得ます。

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

この漸化式は 1 項飛ばしで計算して行きますので、初項としては $I_0$ か $I_1$ が必要になります。

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$$

これを用いて、次数が偶数と奇数の場合に分けて以下のような結果を得ます。

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

例えば、$n = 4$ と $n = 5$ の場合、結果を求めてみましょう。

$$I_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16} \qquad I_5 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{8}{15}$$

同様にして、$\cos^n x$ についても $\sin^n x$ と同じ結果になることが示されます。

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n xdx = \int_0^{\pi/2} \sin^n xdx$$

**問題**

$\int_0^{\pi/2} \cos^n xdx = \int_0^{\pi/2} \sin^n xdx = I_n$ となることを証明せよ。

**解答**

$$I_n' = \int_0^{\pi/2} \cos^n xdx = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \cdot \cos xdx$$

$$= [\cos^{n-1} x \cdot \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n-1)\cos^{n-2} x \cdot (-\sin x) \cdot \sin xdx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \cdot (1-\cos^2 x)dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} xdx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^n xdx$$

$$= (n-1)I_{n-2}' - (n-1)I_n'$$

$$I_0' = \int_0^{\pi/2} 1dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1' = \int_0^{\pi/2} \cos xdx = 1$$

$I_n'$ に関する関係式はすべて $I_n$ に関するものと一致する。よって、$I_n' = I_n$ である。

## 6.10 定積分の変数変換

定積分でも不定積分と同様に変数変換をする方法があります。しかし、定積分の変数変換の場合、完全に積分関数の形を求めるところまで必要ありません。これについて例を用いて説明しましょう。

**1-a)** $\int_0^{\pi/2} \sin 2xdx = [-\frac{1}{2}\cos 2x]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

**1-b)** $\int_0^{\pi/2} \sin 2xdx = \int_0^{\pi} \sin z \frac{1}{2}dz = \frac{1}{2}[-\cos z]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

この例題は不定積分の結果をそのまま用いる方法と変数変換をして積分範囲を変える方法とで解かれています。**1-a)** は不定積分を用いる方法で、これは最初に不定積分を求めます。

$$\int \sin 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

その後この結果へ積分の両端の値を代入しています。もちろん不定積分を求めるときには不定積分の変数変換の方法を利用しています。

次に **1-b)** は定積分の変数変換の方法を用いています。不定積分と同様に $z=2x$ と置いて、$dz=2dx$ として $x$ から $z$ に変数変換します。不定積分の場合は $z$ で積分して、最後に $z$ を $x$ の関数に直す訳ですが、定積分では最後に変数をもとの $x$ に直す代わりに、積分範囲を $z$ の与えるものに変えます。即ち、$0 \le x \le \pi/2$ の範囲であれば、$z=2x$ は $0 \le z \le \pi$ の範囲になります。最初の等号のところで積分範囲が変わっているのはそのためです。以後の例題では変数変換を用いた方法で定積分を行います。

**2)** $\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_1^3 z^3 dz = \frac{1}{2}[\frac{1}{4}z^4]_1^3 = \frac{1}{8}(3^4-1) = 10$

**3)** $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x-1}} 2dx = \frac{1}{2}\int_1^3 z^{-1/2} dz = \frac{2}{2}[z^{1/2}]_1^3 = \sqrt{3}-1$

**4)** $\int_0^2 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2} 2xdx = \frac{1}{2}\int_0^4 e^z dz = \frac{1}{2}[e^z]_0^4 = \frac{1}{2}(e^4-1)$

**5)** $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int_1^3 \frac{1}{z} dz = [\log_e |z|]_1^3 = \log_e 3 - \log_e 1 = \log_e 3$

**2)** では $z=2x+1$，$dz=2dx$ として、積分範囲を $0 \le x \le 1$ から $1 \le z \le 3$ に変えます。**3)** では $z=2x-1$，$dz=2dx$ としますが、被積分関数は $1\big/\sqrt{2x-1} = z^{-1/2}$ となります。積分範囲は $1 \le x \le 2$ から $1 \le z \le 3$ に変わります。**4)** については、$z=x^2$，$dz=2xdx$ として、積分範囲を $0 \le x \le 2$ から $0 \le z \le 4$ とします。**5)** については、$z=x^2+x+1$ としますが、分子がその微分の形をしています。この形は一般に以下のように表わされ、非常によく利用される積分形です。

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{1}{z} dz = [\log_e |z|]_{f(a)}^{f(b)} \\ &= \log_e |f(b)| - \log_e |f(a)| \\ &= \log_e |f(b)/f(a)|\end{aligned}$$

変数変換を利用した公式は、一般に以下のように表現されます。

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz \qquad (6.16)$$

不定積分のところでも学びましたが、三角関数に関する非常によく知られた変数変換について述べておきます。

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

ここでは $x = \sin\theta$, $dx = \dfrac{dx}{d\theta}d\theta = \cos\theta d\theta$ と置いています。被積分関数は以下となり、

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$dx$ から出てきた $\cos\theta$ と相殺します。

一般に、$\sqrt{a^2 - x^2}$ の形が見える場合は $x = a\sin\theta$ と置いてみることをお勧めします。

次も不定積分のところで出てきた例です。

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

これもよく知られた変数変換で $x = \tan x$, $dx = 1/\cos^2\theta\, d\theta$ となります。被積分関数は以下のように変形でき、$dx$ の $1/\cos^2\theta$ と相殺します。

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+\sin^2\theta/\cos^2\theta} = \frac{1}{1/\cos^2\theta} = \cos^2\theta$$

一般に、$a^2 + x^2$ の場合は $x = a\tan\theta$ と置くことをお勧めします。

## 6.11 定積分記号の直感的解釈

定積分が、指定範囲における関数の曲線と $x$ 軸との間の面積であることから、積分記号の直感的な解釈を求めてみましょう。積分記号をこのように定めた数学者の意図が分かるような気がします。

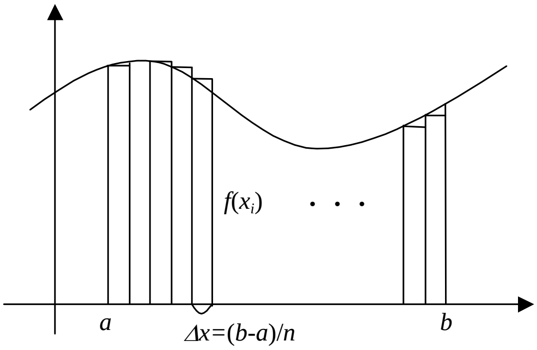


図 6-3 定積分記号の図的解釈

図 6-3 を見て下さい。今、$a \le x \le b$ における面積 $S$ を微小な幅 $\Delta x$ の棒の集まりと解釈することにしましょう。棒の幅 $\Delta x$ は $b-a$ の長さの区間を $n$ 等分するとして、$\Delta x = (b-a)/n$ で表わします。また、左から $i$ 番目（$i = 1, 2, 3, \cdots, n$）の棒の左端の $x$

座標 $x_i$ は、 $x_i = a + (i-1)\cdot\Delta x$ で表わされます。ここで、 $x_1 = a$ ， $x_n = b - \Delta x$ となることはすぐに分かると思います。棒の高さを左端の $x$ 座標の関数値とすると、$i$ 番目の棒の高さは $f(x_i)$ となります。これから、$i$ 番目の棒の面積は $f(x_i)\Delta x$ となります。それゆえ、棒の面積の合計は、 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ となります。これは積分で表わされる面積を矩形の合計として近似的に表わした量です。違いは、棒の上端の食違いです。しかし、この部分の面積は区切る数を増やして（区切る幅を縮めて）行けば小さくなって、$n \to \infty$（$\Delta x \to 0$）の極限では、0 になります。即ち、定積分の値とこの矩形面積の合計の極限は一致します。これを数式で表わしたものが、以下の式です。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{6.17}$$

この式から、定積分の記号は、以下のように表現されたことが分かります。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \quad \to \int_a^b \quad , \quad \Delta x \to dx$$

ここで、微小な区間 $\Delta x$ の $\Delta x \to 0$ の極限を $dx$ と表わすことは、微分記号の中で、$d/dx$ と表示していることと同じです。

自然科学の分野では、様々な関数の定積分を求めますが、余程運が良くなければ、積分がきれいに数式的に解けることはありません。多くの場合、数表や計算機によって数値的に答えを求めますが、そのとき、(6.17) 式の右辺を基礎にした方法を用います。プログラムに心得のある人は、一度ある関数を積分するプログラムを書いてみてはどうでしょうか。

**問題**

$y = \sin x$ の 0 から $\pi$ までの定積分を数値的に求めるプログラムを書け。

**解答**

```
'BASIC Program
pi=3.1415926
n=100
dx=pi/n
s=0
for i=0 to n-1
    s=s+sin(i*dx)*dx
next i
print "面積 = " ; s
```

```
/* C Program */
#include <stdio.h>
void main(void)
{
    int i,n;
    double pi, dx, s;
    pi=3.1415926;
    n=100;
    dx=pi/n;
    for(i=0;i<n;i++) s=s+sin(i*dx)*dx;
```

```
        printf("面積 = %f\n", s);
    }
```

注）実際の計算にはもっと正確な方法がある。

この方法で計算すると、正しい値 2 に対して、1.9998 と比較的良い近似になります。

## 6.12 回転図形の体積・曲線の長さ

### 1. 回転図形の体積

定積分の応用として、ある関数を $x$ 軸を中心にして回転させた図形の $a \le x \le b$ の部分の面積を求めてみましょう。ここでは前節で述べたことを元にして体積を計算する方法を考えてみます。

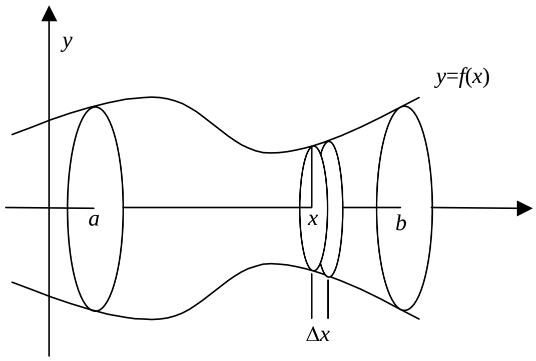


図 6-4 回転図形の体積

図 6-4 を見て下さい。今図形を $n$ 等分に輪切りにするとします。そうすると切り取られた 1 枚の円盤の厚みは $\Delta x = (b-a)/n$ となります。左端から $i$ 番目の円盤の半径は、その $x$ 座標を $x_i = a + (i-1) \cdot \Delta x$ として、$x$ 軸を中心に回転させているわけですから $f(x_i)$ となります。それゆえ、円盤の面積が $\pi\, f(x_i)^2$ ですから、1 枚の円盤の体積は「面積×高さ」で $\pi\, f(x_i)^2 \cdot \Delta x$ となります。この円盤の体積の合計が全体の体積を近似的に表わしています。前節でも述べたように、この図形の体積 $V$ は、円盤の体積の合計について $n \to \infty$（$\Delta x \to 0$）の極限を取ったものに一致します。即ち、以下のような式で与えられることが分かります。

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)^2 \Delta x, \qquad \text{ここに、} x_i = a + (i-1) \cdot \Delta x,\ \ \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

この式を積分記号で表わせば、面積は以下のようになります。

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi f^2(x) dx \tag{6.18}$$

この関係を用いて実際にいくつかの図形の体積を求めてみましょう。

### 円錐の体積

最初は、底半径 $r$ 高さ $h$ で与えられる円錐の体積を求めてみます。

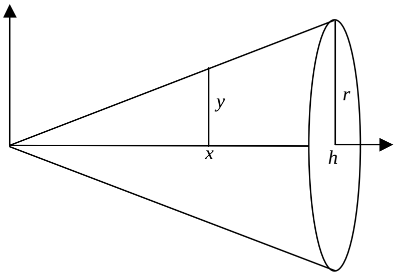


図 6-5 円柱の体積

図 6-5 のように、この物体の側面の傾斜部分を $y = \frac{r}{h}x$ として、$0 \le x \le h$ の範囲で積分します。

$$V = \int_0^h \pi y^2 dx = \pi \int_0^h \left( \frac{r}{h} x \right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

結果として、円錐の体積としてよく知られた以下の公式を得ます。

体積＝$\frac{1}{3}$×底面積×高さ

### 球の体積

次は半径 $r$ の球の体積です。円を表わす方程式を $x^2 + y^2 = r^2$ とします。

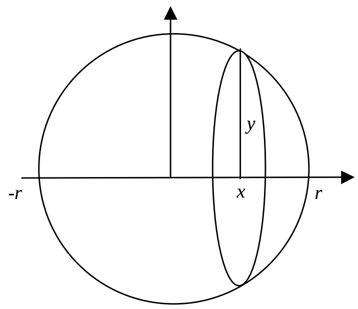


図 6-6 球の体積

図 6-6 のように、回転図形の円盤の半径は $x$ 座標に対する $y$ 座標で与えられますので、$\pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$ として、積分は以下のようになります。

$$V = \int_{-r}^{r} \pi (r^2 - x^2) dx = \pi [r^2 x - \frac{1}{3} x^3]_{-r}^{r} = 2\pi (r^3 - \frac{1}{3} r^3) = \frac{4\pi}{3} r^3$$

即ち、球の体積$V$は$4\pi/3\cdot r^3$で与えられます。

　さて、図 6-7 について見てみましょう。

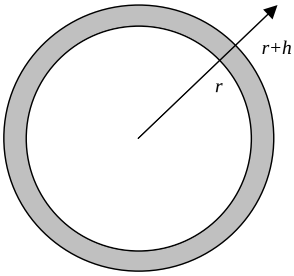


図 6-7　球の表面積

今、半径$r$の球の体積$V=V(r)$と半径$r+h$の球の体積$V(r+h)$について、その差は図 6-7 の球殻部分の体積になります。これは$h$が充分小さいとすると、近似的に円の表面積×$h$と表わされます。つまり円の表面積を$S$として、$V(r+h)-V(r)\cong S\cdot h$と表わされます。即ち、$S\cong\bigl(V(r+h)-V(r)\bigr)/h$となります。この両辺は$h\to 0$の極限で一致するはずですから、

$$S=\lim_{h\to 0}\frac{V(r+h)-V(r)}{h}=\frac{dV}{dr}$$

となることが分かります。よって、球の表面積$S$は球の体積$V=4\pi/3\cdot r^3$を$r$で微分して、$S=4\pi r^2$になります。

## 2．曲線の長さ

　次の応用として曲線の長さを求める方法を考えてみることにしましょう。図 6-8 を見て下さい。$a\le x\le b$の区間における関数$y=f(x)$の表わす曲線の長さについて考えます。

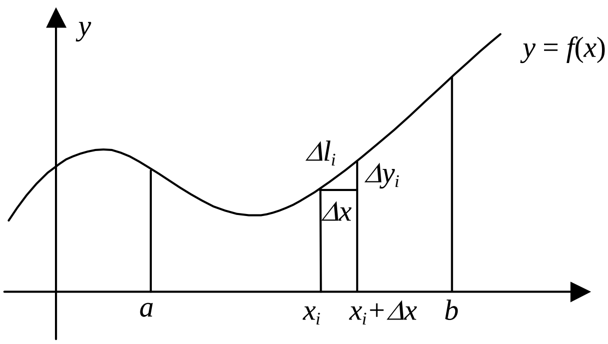


図 6-8　曲線の長さ

まず、区間$a\le x\le b$を $n$ 等分すると、間隔は$\Delta x=(b-a)/n$になります。左から$i$番目の領域については幅が$\Delta x$で、高さは$\Delta y_i=f(x_i+\Delta x)-f(x_i)$になります。このと

き、$\Delta x$ が充分小さいと考えると、曲線と $\Delta x$ 、$\Delta y_i$ で囲まれた領域は近似的に直角三角形になりますので、この曲線の長さ $\Delta l_i$ は、

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1+\left(\Delta y_i / \Delta x\right)^2}\,\Delta x$$

となります。曲線の長さは、この微小な長さの合計で $n \to \infty$（$\Delta x \to 0$）としたものですから、以下のようになります。

$$L = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\Delta y_i/\Delta x\right)^2}\,\Delta x$$

ここで、$\Delta y_i/\Delta x$ は $n \to \infty$（$\Delta x \to 0$）で微分 $dy/dx$ になりますので、この式は以下のような積分になります。

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

この式については、形がきれいでも積分が数式的に解けるかどうか分かりません。

以下に数式的に計算できる３つの例をやってみます。

**円周の長さ**

最初の例は、半径 $r$ の円の円周 $2\pi r$ をこの方法で実際に求めてみましょう。円の方程式は、$x^2+y^2=r^2$ で、$y \geq 0$ の部分だけ考えると $y=\sqrt{r^2-x^2}$ と表わされます。これから、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

ですので、無限小区間 $dx$ の曲線の長さ $dl$ は以下のようになります。

$$dl = \sqrt{1+\left(dy/dx\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$$

これより、円周は以下のように表わされます。

$$L = 4\times\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx = 4r\int_0^{\pi/2}\frac{1}{r\cos\theta}\cdot r\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4r\int_0^{\pi/2} d\theta = 4r\frac{\pi}{2} = 2\pi r$$

ここに、積分は円周の$1/4$ の領域について求めていますので、4 倍して円周全体にしています。また、積分は $x = r\sin\theta$ とおいて、$x$ から $\theta$ への変数変換を行っています。

**放物線の長さ**

$y=\frac{1}{2}x^2$ で表わされる放物線の $0\le x\le 1$ の範囲の長さを求めてみましょう。微分して $dy/dx=x$ より、$dl=\sqrt{1+x^2}dx$ となり、これから以下の結果を得ます。但し、積分はそんなに簡単ではないので、6.6 節で与えた不定積分の公式を利用します。

公式　$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\log_e\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+c$

これから、以下のような結果を得ます。

$$L=\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\log_e\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\log_e(1+\sqrt{2})\right)$$

**懸垂曲線の長さ**

鉄塔間の電線や 2 点間を結ぶロープの形状は、$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ のような形で表わされることが知られています（実際には定数倍したり、$x$ の前に係数が付くのですが）。この形で表わされる $x=-1$ と $x=1$ の間に張られたロープの長さを求めてみましょう。この関数を微分すると以下になります。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

これを用いると、

$$dl=\sqrt{1+\frac{(e^x-e^{-x})^2}{4}}dx=\frac{\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

となり、ロープの長さは以下のようになります。

$$L=2\times\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1=(e-e^{-1})-(1-1)=\frac{e^2-1}{e}$$

実際に $e=2.718282$ の値を入れて計算してみると、この長さは、$L=2.350402$ になります。

ここに出てきた関数は、以下のように書いて、それぞれハイパブリック・サイン、ハイパブリック・コサイン、ハイパブリック・タンジェントと呼ばれ、覚えておくと便利な関数です。

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$