

## 8章 偏微分と重積分

### 8.1 偏微分とは

これまで微分を考える際、関数は  $y = f(x)$  という形で、関数値が1つの変数  $x$  に依存している場合のみを扱ってきました。しかし一般に変数は1つとは決まっておらず、 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  のように、複数の変数を持つ関数も考えなければなりません。そこでこの節では今まで学んできた微分を一般化させ、複数の変数に対応した偏微分と呼ばれるものについて説明します。これまでの微分を偏微分と区別したいとき、常微分という呼び方を用います。

常微分は変数1つで、以下の書式で表わされていました。

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}$$

これに対して、変数が複数ある場合、どの変数で微分するかを明らかにする必要があり、また常微分と区別するために、微分の  $d$  を  $\partial$  (ディーともラウンドとも読む) という記号に変えて以下のように表わします。

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$$

それぞれの偏微分の意味は以下で定義されます。

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} \quad (8.1)$$

これは変数  $x_i$  だけを変化させており、他の変数は固定させたままです。変数  $x_i$  についての変化率と考えられます。即ち、偏微分をする際には微分する以外の変数は常微分の定数のような扱いで良いことになります。常微分と同様、上式が1つの値に定まるとき、関数  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  は  $x_i$  について偏微分可能と言います。

偏微分の表記法としては、この他に

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) = y_{x_i} = f_{x_i}$$

のようにも表わされます。偏微分は常微分と同様、関数の増減についての情報を与えてくれます。

それでは具体的に関数を偏微分してみましよう。

1)  $y = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1$$

2)  $y = x_1 \sin x_2$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \sin x_2, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1 \cos x_2$$

3)  $y = e^{x_1^2 + x_2^2}$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 e^{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 e^{x_1^2 + x_2^2}$$

前に述べたように、例えば 1) の  $x_1$  による偏微分  $\partial y / \partial x_1$  を計算するには、 $x_2$  をある定数  $a$  と思って、 $y = x_1^2 + a^2 + ax_1$  を  $x_1$  で普通に微分するのと同じで、

$$\frac{dy}{dx_1} = 2x_1 + a \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2$$

と考えます。他の例についても同じようにやってみて下さい。容易に理解できると思います。

## 8.2 高階の偏微分

常微分と同様に偏微分についても 2 階以上の微分が定義できます。以下の例について考えてみましょう。まず、1 階の微分については、次のようになります。

$$y = x_1^3 + 2x_2^3 + x_1^2 x_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2x_1 x_2, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 6x_2^2 + x_1^2$$

これをもう一度微分しますが、2 つの変数でこれら 2 つの式を微分しますので、当然 4 種類の 2 階微分が得られます。微分の書き方として、後から微分する変数を左側に書くことになっています。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (3x_1^2 + 2x_1 x_2) = 6x_1 + 2x_2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} (3x_1^2 + 2x_1 x_2) = 2x_1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (6x_2^2 + x_1^2) = 2x_1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} (6x_2^2 + x_1^2) = 12x_2$$

ここで注意することは、2階微分した結果、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} \quad (8.2)$$

となっている点です。これは偏微分の順番を変えることができることを表わしています。これに関して一般に、「 $n$ 回偏微分可能で、 $n$ 階偏導関数が連続であれば、偏微分は交換可能である」ということが知られています。ここに偏導関数とは、偏微分された関数です。

経済・経営分野で扱う関数は、絶対値などを含む場合を除いて、ほとんどこの性質を満たしていますので、偏微分の順番にはあまり気を使わなくてよいと思います。

### 問題

前節の例で扱った関数に対して、2階微分まで求めよ。

1)  $y = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$                       2)  $y = x_1 \sin x_2$

3)  $y = e^{x_1^2 + x_2^2}$

### 解答

1)  $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2$ ,  $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 4$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 2$

2)  $\frac{\partial y}{\partial x_1} = \sin x_2$ ,  $\frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1 \cos x_2$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = \cos x_2$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = -x_1 \sin x_2$

3)  $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 e^{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 e^{x_1^2 + x_2^2}$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = (2 + 4x_1^2) e^{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = 4x_1 x_2 e^{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = (2 + 4x_2^2) e^{x_1^2 + x_2^2}$

## 8.3 全微分

関数  $y = f(x_1, x_2)$  の変化について考えてみましょう。今、座標  $(x_1, x_2)$  が微少な量だ

け変化して  $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$  になったとします。そのとき  $y$  座標の値  $y + dy$  は、

$$y + dy = f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$$

となるので、変化した量  $dy$  は以下のように書けます。

$$\begin{aligned} dy &= f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2) - f(x_1, x_2) \\ &= f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2) - f(x_1, x_2 + dx_2) + f(x_1, x_2 + dx_2) - f(x_1, x_2) \\ &= \frac{f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2) - f(x_1, x_2 + dx_2)}{dx_1} dx_1 + \frac{f(x_1, x_2 + dx_2) - f(x_1, x_2)}{dx_2} dx_2 \end{aligned}$$

微小変化量が限りなく 0 に近づくととき、上の式は偏微分可能ならば、以下のように書けることが分かります。ここに第 1 項の  $x_2 + dx_2$  は  $x_2$  に限りなく近づくと考えます。

$$dy = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 \quad (8.3a)$$

この  $dy$  のことを関数  $y = f(x_1, x_2)$  の全微分といいます。

これを拡張して、一般の  $n$  変数関数  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の全微分は以下のように表されることが分かります。

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n \quad (8.3b)$$

全微分は  $dx_i \rightarrow 0$  の極限で成り立つ式で、近似式としてもよく利用されますが、実際に変化量  $dx_i$  が小さくても有限な場合には、さらに近似の精度を上げる必要も生じます。その際には Taylor 展開に相当する式を利用します。ここに 2 次の微量まで求めた式を書いておきます。

$$dy = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \dots$$

例えば、 $y = x_1^2 x_2^3$  の場合、上の式は以下ようになります。

$$dy = (2x_1 x_2^3 dx_1 + 3x_1^2 x_2^2 dx_2) + \frac{1}{2} (2x_2^3 dx_1^2 + 2 \cdot 6x_1 x_2^2 dx_1 dx_2 + 6x_1^2 x_2 dx_2^2) + \dots$$

## 問題

以下の関数を全微分せよ。

1)  $y = \sin x_1 x_2$

2)  $y = e^{-x_1} \sin kx_2$

3)  $z = \sqrt{x^2 + 3y^2}$

4)  $y = e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

## 解答

1)  $dy = x_2 \cos x_1 x_2 dx_1 + x_1 \cos x_1 x_2 dx_2 = \cos x_1 x_2 (x_2 dx_1 + x_1 dx_2)$

$$2) \quad dy = -e^{-x_1} \sin kx_2 dx_1 + ke^{-x_1} \cos kx_2 dx_2 = e^{-x_1} (-\sin kx_2 dx_1 + k \cos kx_2 dx_2)$$

$$3) \quad dz = \frac{xdx + 3ydy}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$$

$$4) \quad dy = 2e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2} (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)$$

## 8.4 関数の極値

5章で微分を用いて1変数関数の極値を求めましたが、ここではこれを多変数関数に拡張してみましょう。特に2変数の場合は図に描けて分り易いのでしっかり学んでおきましょう。1変数関数  $y = f(x)$  の場合、 $dy/dx = 0$  として  $x$  の値を求め、その点でさらに2階微分して  $d^2y/dx^2$  の符号で極大か極小かを簡単に求めることができました。しかし、2変数以上の場合には厄介な状況が生じます。

2変数関数  $y = f(x_1, x_2)$  の場合、常微分を偏微分に置き換えて、

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0$$

とすることは容易に予想できます。しかし、2階微分をとると、3種類の2階微分が現れます。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}$$

これの正負によって関数の増減はどう決まるのでしょうか。

そもそも2変数以上の場合、関数の極値は極大と極小だけでは表現できません。 $x_1$  方向で見ると極小でも、 $x_2$  方向は極大であったり、またその逆も現れます。図 8-1 を見て下さい。

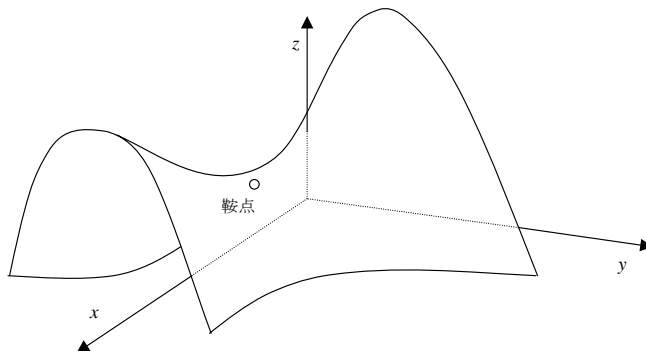


図 8-1 鞍点

このような極値は関数の形が馬の鞍あんてんに似ているため鞍点と呼ばれています。これは 1

変数関数では決して現れることのなかった状況です。また、例え  $\partial^2 y / \partial x_1^2 > 0$ ,  $\partial^2 y / \partial x_2^2 > 0$  であっても、単純に極小値であると考えるのは早計過ぎます。以下でその判定の方法を見てみましょう。

例として、 $y = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 3x_2$  の極値を求めてみます。

偏微分すると、

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 - x_1 - 3 = 0$$

となり、この方程式より、以下の解を得ます。

$$x_1 = 1, x_2 = 2 \quad \text{のとき } y = -3$$

ここで与えられた座標点  $(x_1, x_2)$  を停留点と言います。

これで極値が分りましたので、極大・極小・鞍点を判定してみます。2階微分して、

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$$

より、この微分からヘッセ行列と呼ばれる行列を求めます。ヘッセ行列  $\mathbf{A}$  は以下のように関数の2階微分を成分とした行列です。

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \mathbf{A} = (a_{ij})$$

この例の場合、ヘッセ行列は以下のようにになります。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial^2 y / \partial x_1^2 & \partial^2 y / \partial x_1 \partial x_2 \\ \partial^2 y / \partial x_2 \partial x_1 & \partial^2 y / \partial x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

この場合ヘッセ行列の成分はすべて定数ですが、一般には座標の関数です。

この行列  $\mathbf{A}$  を用いて極値の種類を判定する方法はいくつかありますが、ここではそのうちの1つを紹介します。それは停留点におけるヘッセ行列の固有値を求め、その符号で判定するという方法です。ここではヘッセ行列の成分が定数ですのでそのまま計算します。

$$\begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)^2 - 1 = t^2 - 4t + 3 = (t-3)(t-1) = 0$$

これから固有値は  $t = 3, 1$  であると分かりますが、固有値がすべて正ですので、これは極小値であると判定します。これ以外に固有値がすべて負の場合は極大、正と負の場合は鞍点となります。

一般に、 $n$  変数関数  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(\mathbf{x})$  について以下の定理が成り立ちます。

## 定理

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  において、 $\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0$  であり、ヘッセ行列が正（負）値定符号ならば、 $f(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  で極小（大）である。

ここに、変数は  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  として模式的に行列で表現しています。また、正（負）値定符号とは、 ${}^t \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x}$  が  $\mathbf{x}$  の値によらず常に正（負）であることを言います。この正（負）値定符号性については、以下のような関係を利用して調べます。

## 定理

対称行列  $\mathbf{A}(n \times n)$  が正（負）値定符号

⇔ 対称行列  $\mathbf{A}$  の固有値がすべて正（負）

$$\Leftrightarrow a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, |\mathbf{A}| > 0 \quad (\text{正值定符号})$$

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots, (-1)^n |\mathbf{A}| > 0 \quad (\text{負値定符号})$$

我々が調べたのは最初の判定方法ですが、一般に 3 変数以上の場合には高次の方程式の解を求めることとなりますので、コンピュータがない場合、行列式の値を求める 2 番目の方法が有効だと思います。また、ここに表わされた行列式を主行列式または主座行列式と呼びます。

## 問題

以下の関数の極値を求めよ。

- 1)  $y = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_1$
- 2)  $y = x_1^3 - 3x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_1x_2 - 36x_1 + 100$
- 3)  $u = e^{-x^2 - y^2 - z^2}$

## 解答

- 1)  $\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 + 4x_2 - 6 = 0$ ,  $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 + 4x_1 = 0$  より、極値は  $x_1 = -1, x_2 = 2$  のとき、 $y = 3$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = 4 \quad \text{より、} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-t & 4 \\ 4 & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t - 12 = (t-6)(t+2) = 0$$

$t = 6, -2$  より、極値は鞍点である。

$$2) \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 6x_1 - 6x_2 - 36 = 3(x_1^2 - 2x_1 - 2x_2 - 12) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 6x_2 - 6x_1 = 6(x_2 - x_1) = 0 \quad \text{より、極値は}$$

$$x_1 = 6, x_2 = 6 \quad \text{のとき、} y = -113$$

$$x_1 = -2, x_2 = -2 \quad \text{のとき、} y = 140$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 6x_1 - 6, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = -6 \quad \text{より、}$$

$$x_1 = x_2 = 6 \quad \text{のとき、} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 30-t & -6 \\ -6 & 6-t \end{vmatrix} = t^2 - 36t + 144 = 0$$

$$t = 18 \pm \sqrt{180} > 0 \quad \text{より、極小値である。}$$

$$x_1 = x_2 = -2 \quad \text{のとき、} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -18-t & -6 \\ -6 & 6-t \end{vmatrix} = t^2 + 12t - 144 = 0$$

$$t = -6 \pm \sqrt{180} \quad \text{より、鞍点である。}$$

$$3) \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} = -2x_i e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} = 0 \quad \text{より、極値は、}$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \quad \text{のとき、} y = 1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = (-2 + 4x_i^2) e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = 4x_i x_j e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \quad (i \neq j) \quad \text{より、}$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \quad \text{のとき、} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (i \neq j)$$



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{より、固有値はすべて } -2 \text{ となり、極大値である。}$$

## 8.5 重積分とは

これまでは多変数関数についての微分を見てきましたが、ここからは多変数関数についての定積分を学ぶことにします。多変数関数に関する積分を重積分と呼び、複数の積分記号を重ねて表示します。以下は重積分の表現の例です。

$$V = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

積分は被積分関数を積分記号と変数の微小量とで挟むようにしますので、上の場合積分範囲（積分領域ともいう）は  $x$  について  $a$  から  $b$ 、 $y$  について  $c$  から  $d$  です。またこの場合、積分の順序は最初に  $x$  について行い被積分関数を  $y$  だけの関数にし、後に  $y$  について行います。この場合、 $x$  の積分範囲が  $y$  の関数であっても構いません。この積分は、図 8-2 のように関数が表わす曲面と  $xy$  平面との間の体積を表わしています。

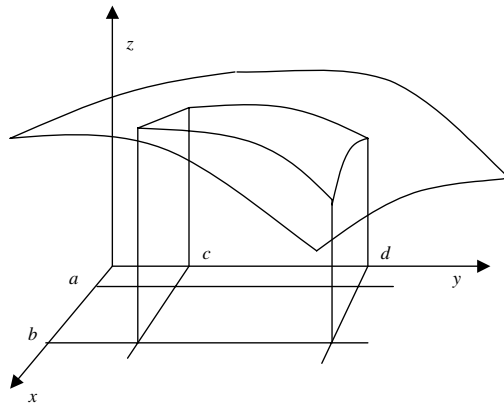


図 8-1 重積分の積分領域と体積

## 8.6 重積分の計算

それでは実際の計算をやってみましょう。

$$V = \int_0^1 \int_0^2 (x + y) dx dy$$

変数の順序から、まず  $y$  を定数と思って  $x$  で積分します。この部分について、外側の積分記号を 1 つ外して書いてみます。結果は当然  $y$  の関数になります。

$$\int_0^2 (x+y)dx = [\frac{1}{2}x^2 + xy]_0^2 = 2 + 2y$$

その後、 $y$  で積分します。

$$V = \int_0^1 (2 + 2y)dy = [2y + y^2]_0^1 = 3$$

計算は2段階に分けて行いましたが、表記上は連続して以下のように書きます。

$$\int_0^1 \int_0^2 (x+y)dx dy = \int_0^1 [\frac{1}{2}x^2 + xy]_0^2 dy = \int_0^1 (2 + 2y)dy = [2y + y^2]_0^1 = 3$$

次の例は、 $x$  の積分領域が  $y$  に依存している（関数になっている）場合です。

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x+y)dx dy$$

この積分領域は  $xy$  平面で見ると、図 8-2 の灰色部分のような範囲になります。例えば  $y=a$  のとき  $x$  は  $0$  から  $a$  までの積分になることから分かると思います。この場合にも最初は  $y$  を定数とみなして計算しますので、最初の例と何ら異なることはありません。

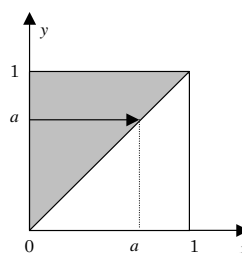


図 8-2 積分領域

$$\int_0^y (x+y)dx = [\frac{1}{2}x^2 + xy]_0^y = \frac{1}{2}y^2 + y^2 = \frac{3}{2}y^2$$

これによって以下の結果を得ます。

$$V = \int_0^1 \frac{3}{2}y^2 dy = [\frac{1}{2}y^3]_0^1 = \frac{1}{2}$$

連続して書くと以下ようになります。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^y (x+y)dx dy &= \int_0^1 [\frac{1}{2}x^2 + xy]_0^y dy = \int_0^1 (\frac{1}{2}y^2 + y^2) dy \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{2} [y^3]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

次は計算しやすい特殊な例で、変数分離形と呼ばれている関数の積分です。一般に、被積分関数が  $x$  の関数と  $y$  の関数の掛け算で、領域がお互いに依存しないとき、積分は2つの積分の積として計算されます。

$$\int_b^c \int_a^d f(x)g(y)dx dy = \int_a^b f(x)dx \times \int_c^d g(y)dy \quad (8.4)$$

これは  $x$  についての積分結果が定数となり、 $y$  についての積分の際には関数の前に掛かった定数と同じ扱いになることから明らかです。一般に変数分離形の場合、もっと多くの変数でも積分の積として計算できることは言うまでもありません。

## 問題

以下の積分を計算せよ。

$$1) \int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \qquad 2) \int_0^1 \int_0^y (x+y) dx dy$$

$$3) \int_0^b \int_0^a xy dx dy \qquad 4) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} dx dy$$

$$5) \int_1^e \int_0^y \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$$

## 解答

$$1) \int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy = \int_0^1 [x^2/2 + xy]_0^1 dy = \int_0^1 (1/2 + y) dy \\ = [y/2 + y^2/2]_0^1 = 1$$

$$2) \int_0^1 \int_y^1 (x+y) dx dy = \int_0^1 [x^2/2 + xy]_y^1 dy = \int_0^1 (1/2 + y - y^2/2 - y^2) dy \\ = [y/2 + y^2/2 - y^3/2]_0^1 = 1/2$$

$$3) \int_0^b \int_0^a xy dx dy = \int_0^a x dx \times \int_0^b y dy = \frac{a^2}{2} \times \frac{b^2}{2} = \frac{1}{4} a^2 b^2$$

$$4) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} dx dy = \int_0^\infty e^{-x} dx \times \int_0^\infty e^{-y} dy = 1^2 = 1$$

$$5) \int_1^e \int_0^y \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \int_1^e \int_0^{\pi/4} \frac{y \cdot 1/\cos^2 \theta}{y^2 (1 + \tan^2 \theta)} d\theta dy \\ = \int_1^e \frac{\pi}{4} \frac{1}{y} dy = \frac{\pi}{4} [\log_e y]_1^e = \frac{\pi}{4}$$

## 8.7 積分の変数変換

通常の積分をする場合、変数変換が役に立ちましたので、これを重積分の場合に拡張してみましょう。ここでは最もよく利用される積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

を用いて、変数変換について説明しましょう。

上の積分はそのまま初等関数を用いて積分することができません。これを実行するためにはちょっとしたトリックが必要です。まず、 $I$ の代わりに $I^2$ を計算します。

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

ここでは変数分離形の性質を利用しています。これより今後以下の計算を考えることにします。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

この積分の積分領域は  $xy$  平面全体で、このままの形では簡単に積分できません。そこでこれを極座標と呼ばれる座標  $(r, \theta)$  に変換します。これまでの座標  $(x, y)$  は軸が互いに直交しており、直交座標と呼ばれています。

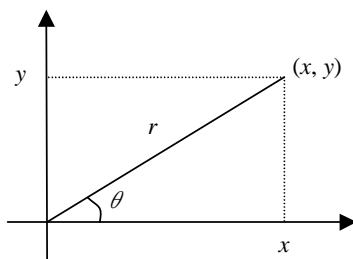


図 8-3 直交座標と極座標

図 8-3 より、直交座標  $(x, y)$  から極座標  $(r, \theta)$  への変換は以下のようになります。

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

この関係から、 $x^2 + y^2 = r^2$  の関係も成り立ちます。座標変換によって積分の微小面積  $dxdy$  は以下のように変換されることが知られています。

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \quad (8.5)$$

上式の偏微分のような記号はヤコビアン (Jacobian) と呼ばれており、次のように定義されます。

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial r & \partial y / \partial r \\ \partial x / \partial \theta & \partial y / \partial \theta \end{vmatrix} \left( = \begin{vmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \theta \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \theta \end{vmatrix} \right) \quad (8.6)$$

また外側の  $||$  は絶対値を表します。この極座標変換の場合、ヤコビアンは以下のようになります。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \begin{vmatrix} \partial x / \partial r & \partial y / \partial r \\ \partial x / \partial \theta & \partial y / \partial \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \cos \theta \cdot r \cos \theta - (-r \sin \theta) \cdot \sin \theta \\ &= r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r \end{aligned}$$

また変数変換によって、積分する領域の表示形式も変わります。この場合、2次元平面

全体ですから、これを極座標で表現するには以下ようになります。

$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty & \Leftrightarrow 0 \leq r < \infty \\ -\infty < y < \infty & \Leftrightarrow 0 \leq \theta < 2\pi \end{aligned}$$

これで準備は終わりましたので、実際に計算してみます。極座標に直すと積分は以下のように簡単に計算できるようになります。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta dr = \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi \times \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi \end{aligned}$$

以上のことから、 $I^2 = \pi$  の結果を得ましたので、以下の答えが求まりました。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

この積分は非常に有名で、統計学等でもこれを応用した計算が多く現れます。

一般に  $n$  重積分に対しては以下の変換をすればよいことが知られています。

$$\begin{aligned} \iint \cdots \int_{V_x} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ = \iint \cdots \int_{V_u} g(u_1, u_2, \dots, u_n) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \right| du_1 du_2 \cdots du_n \end{aligned} \quad (8.7)$$

ここに、被積分関数は座標変換によって形が変わり、積分領域も変更されます。

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_n)} g(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$V_x$  :  $x$  で表した積分領域,  $V_u$  :  $u$  で表した積分領域

ヤコビアンは  $n$  行  $n$  列の行列式になっています。

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \quad (8.8)$$