３章　関数

3.1 関数とは

関数とは、ある変数の値を決めるとその値が決まるものを言います。

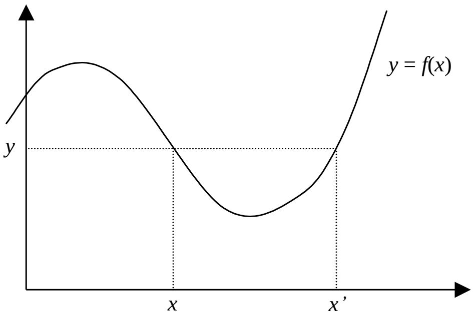


図3-1　１変数関数

図3-1の関数 $y = f(x)$ は1変数の関数で、x の値から y の値が決まります。逆に y の値から x の値は一意的には決まりませんので、関数とはなりません。

2変数の関数 $y = f(x_1, x_2)$ は、図3-2のように局面によって表されます。

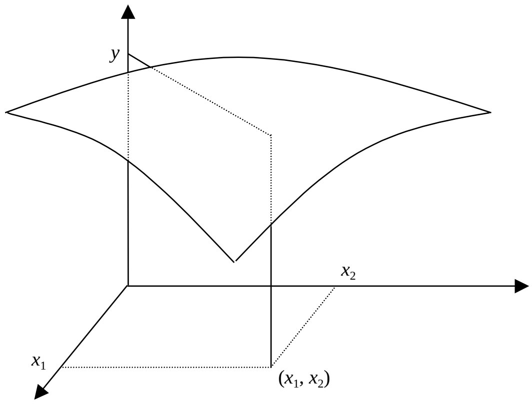


図3-2　２変数関数

3.2 １次関数と２次関数

ここでは、１次関数と２次関数について簡単に見ておきましょう。

１次関数

一般の１次関数は以下の形で表されます。

$$y = ax + b$$

図3-3に見るように係数 a は直線の傾き、係数 b は y 軸との交点を表します。y 軸との交点は $x = 0$ として $y = b$ 、x 軸との交点は $y = ax + b = 0$ として $x = -b / a$ のように求められます。

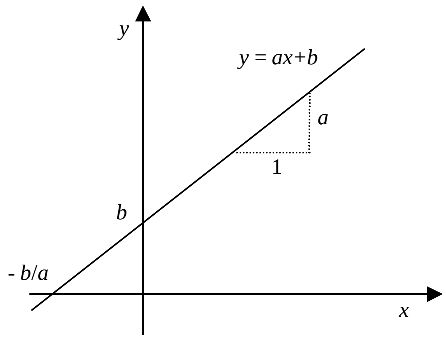


図3-3　１次関数

２次関数

一般の２次関数は以下の形で表されます。

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

細かいことは微分のところでも学びますので、ここでは知識の整理をしておきます。

y 軸との交点は $x = 0$ として $y = c$ 、x 軸との交点は $y = ax^2 + bx + c = 0$ として、解の公式として知られる式が求められます。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.1}$$

少し厄介ですが、これを簡単に証明しておきましょう。以下の変形を考えます。

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x^2 + b/a\,x + c/a) \\ &= a(x^2 + b/a\,x + b^2/4a^2 - b^2/4a^2 + c/a) \\ &= a\left[(x + b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2\right] = 0 \end{aligned}$$

$a \neq 0$ の場合、[ ]の中が $(x + b/2a)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ とならなければなりません。さらに、この両辺の平方根をとって $x + b/2a = \pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ となり、解の公式が求まります。

次に２次関数の係数とグラフの関係を見ておきましょう。

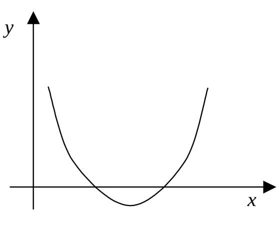


図3-4a

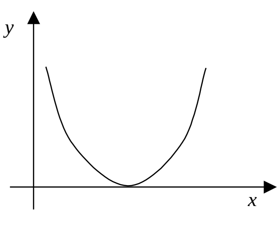


図3-4b

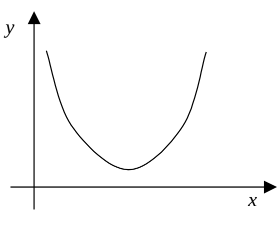


図3-4c

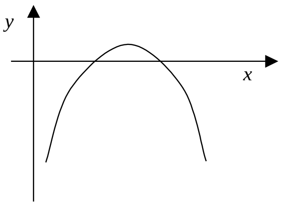


図3-4d

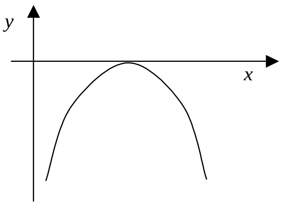


図3-4e

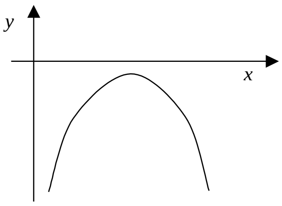


図3-4f

図3-4のa, b, cのようにグラフが上向きに開いている場合は$a>0$で、d, e, fのように下向きに開いている場合は$a<0$です。また、a, dのようにグラフがx軸と交叉している場合は、解の公式で $b^2-4ac>0$ で、２つの実数解となり、b, eのようにグラフがx軸に接している場合は $b^2-4ac=0$ で１つの実数解（重根）となります。c, fのように $b^2-4ac<0$ の場合は解の公式の平方根の中が負になり、複素数の解になります。２次曲線のグラフに関する認識はこの程度でよいと思います。

２次関数の頂点の座標は、解の公式の変形を少し進めて、

$$y=a(x+b/2a)^2+c-b^2/4a$$

とし、$x=-b/2a$，$y=c-b^2/4a$ を得ます。これは、上式の x を含む2乗の項が $x=-b/2a$ のとき、最小値0を取ることから分かります。

これまでの知識の復習になったでしょうか。

3.3 指数関数

3.3.1 指数の性質

ここでは一般にa^xで表される指数関数の規則や性質について、見て行きたいと思います。まず一般的な指数計算の規則を考えましょう。

1） $a^m\times a^n=a^{m+n}$

以下の計算を考えてください。

$$2^1\times 2^2=2\times 4=8=2^3$$

$$2^2\times 2^3=4\times 8=32=2^5$$

これらから、ひとつの規則が類推されます。それは、以下のような関係です。

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

これは、m, nについて自然数（1, 2, 3, …）だけについて成り立ったものですが、これがすべての数に拡張できると考えるのが基本です。

2） $a^0=1$

次の例を見て下さい。計算は1）のルールに従いました。

$$2^0\times 2^3=2^{0+3}=2^3 \qquad ゆえに、2^0=1$$

同様に考えるとすべての正の数aに対して上の計算は成り立ちます。即ち、1)のルールに従うと以下のように考えるのが自然です。

$$a^0=1$$

3) $a^{-n} = 1/a^n$

次の例は指数が負の数の場合です。計算は1)と2)のルールに従っています。

$$2^3 \times 2^{-3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1 \qquad \text{ゆえに、} 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

これから、負の指数の場合は分母に移ることが分かりました。一般に以下のような規則が導かれます。

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

4) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

最後に1)のルールから離れて、以下の計算を見てみましょう。

$$(2^2)^3 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6$$

一般に以下のルールになることが分かります。

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

このルールも一般の数に拡張されます。これを使うと $(2^{1/2})^2 = 2^1 = 2$ となり、2乗して2になることから、$2^{1/2} = \sqrt{2}$ であることになります。

以下に公式をまとめておきましょう。

公式

1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (3.2a)

2) $a^0 = 1$ (3.2b)

3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (3.2c)

4) $(a^m)^n = a^{m \times n}$ (3.2d)

問題　以下の値を求めよ。

1) 2^{-3}　　2) $27^{1/3}$　　3) $9^{3/2}$　　4) $16^{-3/4}$

解答

1) $\dfrac{1}{8}$　　2) 3　　3) 27　　4) $\dfrac{1}{8}$

3.3.2 指数関数のグラフ

指数の計算法が分かったので、次はグラフを考えてみたいと思います。
左側は $y = 2^x$ のグラフで、右側は $y = (1/2)^x$ のグラフです。それぞれの x の値に対する y の値を求めてグラフを描いてみます。

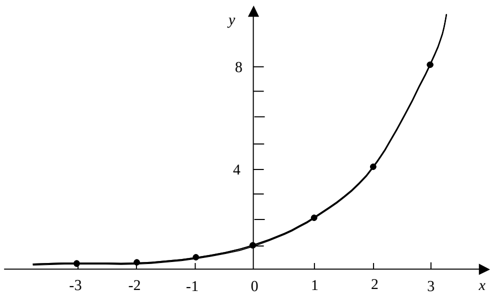


図3-5a

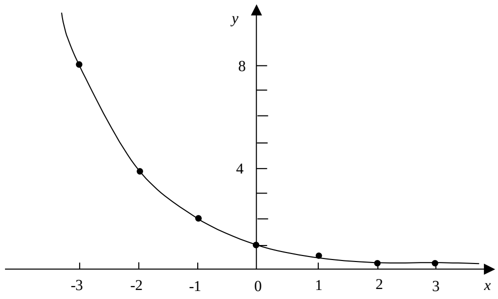
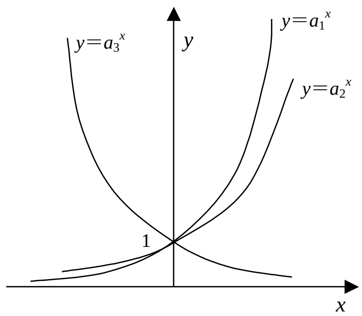


図3-5b

右のグラフは左のグラフに比べて、y 軸に対して対称的になっています。これは、$y=(1/2)^x=2^{-x}$ の関係から、x を $-x$ とすることに相当しているからです。

さて、$y=a^x$ について、x がすべての実数の範囲を取ることから、a については $a>0$ でなければなりません（例えば $(-2)^{1/2}$ は実数にはなりません）。また、y については $y>0$ となることになります。指数関数は、変数域（x の範囲）がすべての実数で、値域（y の範囲）が正の実数となる関数です。



問題　右のグラフについて、a_1, a_2, a_3 の正負と大きさを比較せよ。

解答

グラフの傾きより、$a_3<0<a_2<a_1$ となる。

3.4 対数関数

3.4.1 対数の性質

1） $y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$

以下の例を見て下さい。左側は普通の指数の関係ですが、これを逆の立場で見たものが対数です。

$$2^3=8 \Leftrightarrow \log_2 8=3$$

$$3^4=81 \Leftrightarrow \log_3 81=4$$

即ち、2^3 が 8 であることを、8 は 2 の何乗であると言っているのが $\log_2 8$ の表式です。このように対数は指数の見方を変えたもので、log という記号で「難しいもの」などと惑わされてはいけません。上の関係を文字で一般的に表したものが以下の関係です。

$$a^y=x \Leftrightarrow \log_a x=y$$

これを書き換えて、最初の定義としましょう。

$$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$$

ここで対数関数は指数関数の逆関数になっていることに注意して下さい。つまり、指数と対数は x と y を入れ替えたような関係にあります。指数のところでも述べましたが、対

数の底aについては$a>0$であることを忘れないで下さい。

2） $\log_a a = 1$

これは1)の定義を応用した簡単な例ですが、覚えておくと結構役に立つ公式です。

$$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$$

3） $\log_a x^n = n\log_a x$

この公式は非常に重要なものです。以下の式は1)の定義を利用しています。

$$a^y = x^n \Leftrightarrow \log_a x^n = y$$

上の式の左側を書き換えると、$a^{y/n} = x$ですが、これに1)の定義を利用すると以下の関係も成り立ちます。

$$a^{y/n} = x \Leftrightarrow \log_a x = \frac{y}{n}$$

それゆえ上下の式を比較して以下の関係を得ます。

$$y = \log_a x^n = n\log_a x$$

4） $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

この公式もよく使われます。1)の定義を利用して以下のような関係を示しておきます。

$$x = a^p \Leftrightarrow p = \log_a x$$

$$y = a^q \Leftrightarrow q = \log_a y$$

左側の式でxyを作り、対数をとります。

$$\log_a xy = \log_a a^p a^q = \log_a a^{p+q}$$

これに3)と2)の関係を使って、以下を得ます。

$$= (p+q)\log_a a = p+q$$

さらに、pとqに最初の右側の式を代入すると以下のようになります。

$$= \log_a x + \log_a y$$

これを整理すると、次の公式が得られます。

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

5） $a^{\log_a x} = x$

この関係はそれほど重要ではありませんが、微分などで利用すると便利なので示しておきます。まず1)の定義を利用して、以下の式を与えます。

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$$

この関係を用いると、以下のように計算されます。

$$a^{\log_a x} = a^y = x$$

6） $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

この公式は対数の底の変換として重要な関係です。5)と3)の関係を用いると以下のような変形が可能です。

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \times \log_b a$$

これから、以下の関係を得ます。

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

これは、対数の底aを任意の底bに変換する公式になっています。

ここに、対数に関する公式をまとめておきましょう。対数の関係は直感的に理解しずらく覚えにくいようです。

公式

1) $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$ (3.3a)

2) $\log_a a = 1$ (3.3b)

3) $\log_a x^n = n\log_a x$ (3.3c)

4) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (3.3d)

5) $a^{\log_a x} = x$ (3.3e)

6) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (3.3f)

問題　以下の値を求めよ。

1) $\log_2 8$　2) $\log_3 \dfrac{1}{9}$　3) $\log_{1/2} 8$　4) $\log_2 \sqrt{2}$

5) $5^{\log_5 4}$　6) $3^{-\log_3 2}$　7) $\log_6 4 + \log_6 9$　8) $\log_4 8$

解答

1) 3　2) -2　3) -3　4) 1/2　5) 4　6) 1/2　7) 2　8) 3/2

3.4.2 対数関数のグラフ

対数関数について以下の２つのグラフを描いてみましょう。左は$y = \log_2 x$のグラフで、右は$y = \log_{1/2} x$のグラフです。

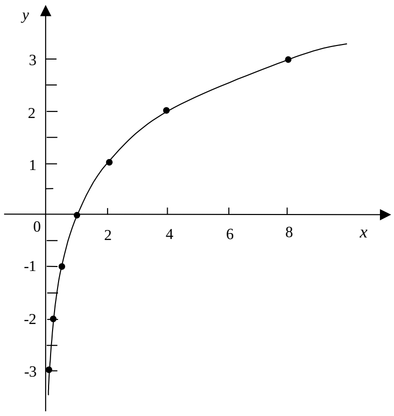


図3-6a

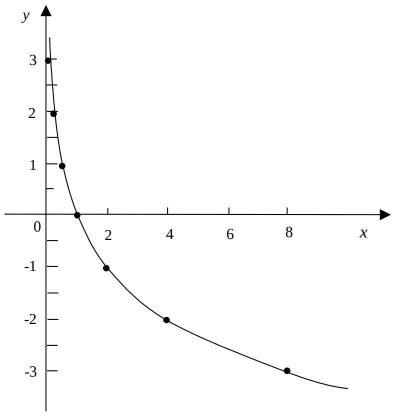


図3-6b

ここでは、底aの値によってグラフの傾きが変わっています。一般に$a > 1$の場合は図3-6aのように右上がり、$0 < a < 1$の場合は図3-6bのように右下がりとなります。また、

$$y = \log_{1/2} x = \log_2 x / \log_2 1/2 = -\log_2 x$$

より、２つのグラフは x 軸を対称軸として対称になっています。

さて、$y = \log_a x$ について、定義のところで見たように a についてはは $a > 0$ でなければなりません。また、x についてはは $x > 0$ であり、y はすべての実数の範囲を取ることになります。これは、変数域（x の範囲）が正の実数で、値域（y の範囲）がすべての実数となる関数です。

3.4.3 指数関数と対数関数のグラフの関係

指数関数と対数関数はお互いに逆関数の関係にあります。即ち、x と y を入れ替えた関係にあります。

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y \xleftrightarrow[x \leftrightarrow y]{} x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$$

それゆえ、グラフとしても図3-7のように、$y = x$ の直線を軸にして対称な関係になります。

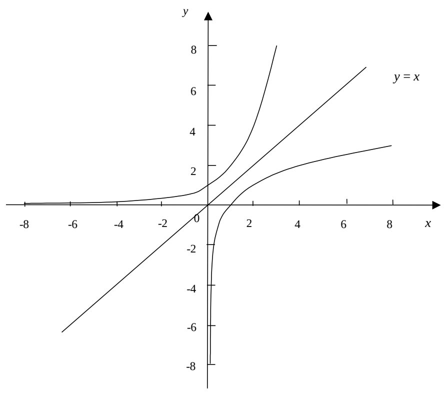


図3-7　指数関数と対数関数の関係

3.5 三角関数

3.5.1 角度の単位

三角関数の話を始める前に、ラジアンと呼ばれる角度の測り方について話します。

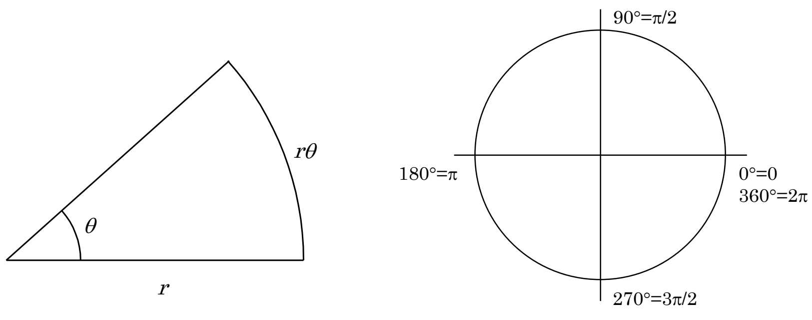


図3-8 ラジアンによる角度表現

図3-8の左は角度ラジアンの定義です。この角度の測り方は円弧と半径との関係を利用したものです。即ち、角度＝円弧÷半径、で与えられます。円周率を π として、半径 r の円

の円周は$2\pi r$で与えられますから、一周360°は2πで表わされます。これが基本になり、図3-8の右のような、度とラジアンの関係が得られます。主な角度としては、$30° = \pi/6$，$45° = \pi/4$，$60° = \pi/3$で与えられます。特に後に述べる微分に関する三角関数の表記はこのラジアンが単位になっています。

3.5.2 三角関数とは

次に三角関数の定義を見てみましょう。図3-9のように原点を中心とした半径rの円を考えます。

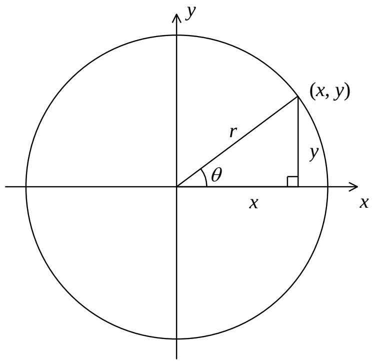


図3-9 三角関数の定義

円上の点の座標を(x, y)、x軸の正の向きとの角度をθとして、三角関数を以下のように定義します。

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{y/r}{x/r} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{3.4}$$

三角関数と符号

三角関数は角度によって正負の値をとります。これは、座標値x, yの符号によって決まっています。図3-10に各関数の各象限における符号を示します。

例えば、$\sin\theta = y/r$より、$\sin\theta$の符号は$y > 0$である第1象限と第2象限で正、$y < 0$である第3象限と第4象限で負です。他の関数も確認して下さい。

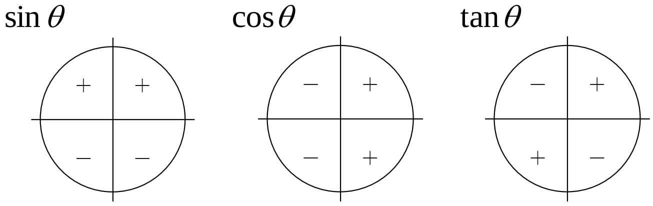


図3-10 三角関数と符号

三角関数の代表的な値

三角関数の計算に使われる代表的な角度について、値をまとめておきます。よく使われ

るのは$\pi/6\,(30°)$， $\pi/4\,(45°)$， $\pi/3\,(60°)$ 等です。これらは三角定規で表わされている角度で、各辺の長さが以下のように表わされることから計算されます。

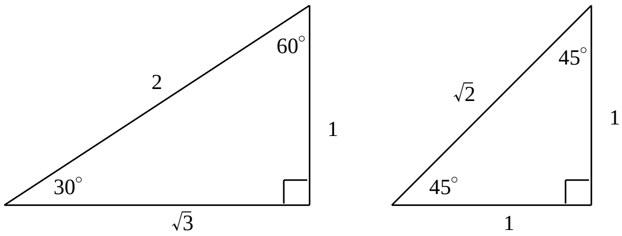


図3-11

読者の方はその他の角度についても定義から確認しておいて下さい。特に、$\theta=\pi/2$，$\theta=3\pi/2$ のときの $\tan\theta$ の値は分母が0になることから求まりません。

表3-1 三角関数の代表的な値

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	3π/4	π	5π/4	3π/2	7π/4	2π
$\sin\theta$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	1
$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$		-1	0	1		-1	0

問題　表3-1の三角関数の値について確認せよ。

解答

省略

４章　極限

4.1 極限とは

ある数が限りなく大きくなるとか、限りなく0に近づくとか、そんな場合にその数を用いた関数がどんな値に近づくかを考えることを関数の極限と言います。

ある数nが限りなく大きくなる場合、数学ではnが無限大に近づくと言います。無限大は∞という記号で表し、$n \to \infty$という形で表現されます。また、負の側に無限に大きく（小さくと言うべきか）なっていく場合、nはマイナス無限大に近づくと言い、$n \to -\infty$で表します。このnという記号は整数を表す場合が多く、実数を強調したい場合にはx等を用いて、$x \to \pm\infty$とします。

この矢印の記号はある数aに限りなく近づくときにも使われ、xがaに限りなく近づくとき$x \to a$と表されます。特にaが0の場合によく使われますが、0への近づき方が正の側から近づくことをはっきりとさせたい場合$x \to +0$、負の側から近づくことをはっきりとさせたい場合$x \to -0$と表すことがあります。ここで、記号xを用いたのは、ある数に限りなく近づく場合、実数の範囲で限りなくということだからです。

以後、限りなく大きくなる（正負の側に）場合とある数に限りなく近づく場合とに分けて、例を多く用いて極限での関数のふるまいを見てみましょう。

4.2 無限大に関する極限

さて、次の式をみて下さい。

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}$$

これは、nが限りなく大きくなるとき（$n \to \infty$のとき）、$1/n$はどんな値に近づくか、という式です。言い換えると$1/n$はどんな極限になるかとも言えます。ここに$\lim$はlimitの略で、極限の意味です。nが、10, 100, 1000,10000, $\cdots$ となるとき、$1/n$はどうなるでしょうか。

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \cdots \to 0$$

以上のように0に近づいて行くことが分かります。即ち、$n \to \infty$のとき、$1/n \to 0$です。これを数式で表現したものが以下の式になります。

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{1}{n} = 0$$

等号は0になるではなく、0に限りなく近づくという意味です。ある値に限りなく近づくことをその値に収束（収斂）するとも言います。

この関係に類似したものを見て行きましょう。

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1000}{n} = 0$$

分母が n^2 になると、分母が大きくなる割合が増し、速く0に収束します。分母が $\sqrt{n}$ では、大きくなり方は n よりゆっくりですが、やはり0に収束します。分子が1000の場合も n が1000倍になれば良いだけのことですから、結果は同じです。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n+a}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(c+\frac{b}{n+a}\right)=c$$

分子が一般に何であっても、分母に任意の数を足しても結果は変わりません。また、収束する項にある定数を足しても、収束した値にその定数を足した値になるだけです。

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n}=0$$

n が $-\infty$ になる場合、結果は同じですが、$1/n$ の0への収束は負の側からになることを注意して下さい。

これまでは $1/\infty$ の形について学んできましたが、次は ∞/∞ の形を考えてみましょう。以下の例を見て下さい。分母も分子もともに無限大になるので収束性は一見不明です。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$

このような場合、分母の最も次数の高い項で分母分子を割るのがうまいやり方です。
即ち、以下のようにすると分母の第2項は0になり、全体は1に収束することが分かります。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n}=1$$

以下の例も分母分子を n で割って答えを得ます。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{1-2/n}=2$$

次の場合は、分母分子を n^2 で割ります。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n^2}{3-2/n^2}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{3n^2-2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3/n+1/n^2}{3-2/n-1/n^2}=\frac{2}{3}$$

さて、賢明な読者はもう気づかれたかも知れませんが、分母と分子が n の多項式で、次数が等しいとき、収束する値は最大次数の項の係数だけを見ていれば分かります。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{2}n^2+3n+1}{\mathbf{3}n^2-2n-1}=\frac{2}{3}$$

実際の計算では、これによって暗算で解答します。

次に分母と分子の次数が違う場合を見てみましょう。分母の次数が分子より大きい場合、以下のように分母の最大次数の n^2 で割れば0に収束します。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1+1/n^2}=0$$

このことから、分母の次数が分子より大きい場合、常に0になることが理解できます。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{-n^3+2n+1}=0$$

逆に、分子の次数が分母より大きい場合、極限は状況によって$\pm\infty$になります。以下の例を見て下さい。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}=\infty \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n+1}=-\infty \qquad \lim_{n\to-\infty}\frac{n^2}{n+1}=-\infty$$

これについても、分母分子の最大次数の項だけを見ていれば、暗算で答えが見えてきます。

多項式の分数式の場合、これまでの議論を直感的方法としてまとめておきましょう。

分母の次数＝分子の次数　のとき、

分母分子の最大次数の項の係数に注目

分母の次数＞分子の次数　のとき、

極限は 0

分母の次数＜分子の次数　のとき、

分母分子の最大次数の項に注目　極限は $\pm\infty$

問題　以下の極限を求めよ。

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+2n-1}{5n^2-3n+4}$　　2) $\displaystyle\lim_{n\to-\infty}\frac{n^2-2n+3}{3n^2+n+2}$

3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+2n+1}}{n-3}$　　4) $\displaystyle\lim_{n\to-\infty}\frac{n+1}{2n^2+n-3}$

5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2/3}}{n+3}$　　6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+2n-3}{n+1}$

7) $\displaystyle\lim_{n\to-\infty}\frac{n^2+2n-3}{2n+1}$　　8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^3+3n-4}}{n+2}$

解答

1) $-\dfrac{1}{5}$　2) $\dfrac{1}{3}$　3) $\sqrt{3}$　4) 0

5) 0　6) $-\infty$　7) $-\infty$　8) ∞

4.3 定数の極限

さて、次の表式を見てみましょう。

$$\lim_{x\to a}f(x)$$

これは、xが限りなくaに近づくのとき、$f(x)$がどのような振る舞いをするかを表すものですが、$x=a$で$f(x)$が連続の場合、その収束先は$f(a)$となります。しかし、連続性が保証されていない場合、xが大きい側から近づくのか、小さい側から近づくのかによって値が異なる場合もあります。

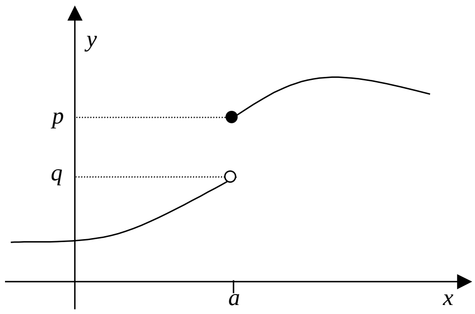


図4-1 不連続点への収束

例えば図4-1を見て下さい。黒丸は $x=a$ 点での関数の値ですが、左側から a に近づく（$x \to a-0$）と q に限りなく近づき、右側から近づく（$x \to a+0$）と p になります。

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = q, \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = p$$

十分注意が必要です。

以下の例は連続性のある場合ですから、値を代入すると簡単に結果は求まります。

$$\lim_{x \to 0} x = 0 \qquad \lim_{x \to 0}(1+x) = 1 \qquad \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0}(x^2+2x+3) = 3 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3} \qquad \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

関数を使った複雑そうな場合でも同様です。

$$\lim_{x \to 0} a^x = a^0 = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \log_a(1+x) = \log_a 1 = 0$$

次は、単純に代入すると分子と分母が共に0になる場合です。まず最初に通分できるときは極力やっておく必要があります。残った式で収束を調べます。以下の例は問題なく理解できると思います。

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2+x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$$

分子が有限で分母が0になる場合、状況によって結果は±∞になります。関数の符号を検討しながら見極める必要があります。

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty$$

問題　以下の極限を求めよ。

1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{3x^2+2x-1}{2x+3}$　　2) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \log_2 \frac{3x+4}{2x+1}$

3) $\displaystyle \lim_{x \to 1}(2^x+2^{-x})$　　4) $\displaystyle \lim_{x \to 2} |x-2|$

5) $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x+\cos x)$　　6) $\lim_{x\to-0}\frac{1}{|x|}$

7) $\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sin x}$　　8) $\lim_{x\to-0}\frac{1}{\sin x}$

9) $\lim_{x\to\pi/2-0}\tan x$　　10) $\lim_{x\to\pi/2+0}\tan x$

解答

1) $-\frac{1}{3}$　2) 2　3) $\frac{5}{2}$　4) 0

5) 1　6) ∞　7) ∞　8) $-\infty$

9) ∞　10) $-\infty$

4.4 その他の公式

ここでは多項式の分数以外の極限について触れておきます。前節で $x\to a$ については説明しましたので、$n\to\pm\infty$ の場合について見てみましょう。まず、指数について以下の極限を見て下さい。この関係が成り立つことは直感的に理解できると思います

$$\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0 & 0\le a<1\\ 1 & a=1\\ \infty & a>1\end{cases}\tag{4.1}$$

指数 a^n とべき乗 n^b との関係は、べき乗の次数 b がいくら大きくても、指数の発散の方が勝ります。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=0\qquad(a>1)\tag{4.2}$$

また、対数 $\log_a n$ とべき乗 n^b との関係はべき乗の次数 b がいくら0に近くても、べき乗の発散の方が勝ります。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^b}=0\qquad(a>1,b>0)\tag{4.3}$$

以上の関係は応用分野でよく利用されます。

次は後に述べる微分で利用される重要な関係です。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\qquad\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}\tag{4.4}$$

$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^a$ は a の値に関わらず1に収束しますが、a が n に依存する場合は事情が違い、$a=n$ の場合は1と異なるある数 e に収束します。この数をネーピア(Napier)の数と言い、その値は e =2.71828⋯という無理数になります。この数を用いた $y=e^x$ という指数関数は数学の応用分野で最も良く使われる関数のひとつです。また、この関係は n が実数の場合にも成り立つことが知られています。

次は三角関数を利用した関係です。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{4.5}$$

x と $\sin x$ はともに0になりますが、上のように組み合わせると1に収束します。これは、$\sin x$ の微分を求める際に使われる非常に重要な関係です。

さて、これらの関係を用いた例をいくつか見てみます。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$$

この関係は x の正負に関わらず成り立ちます。以下にその理由を見てみましょう。

$x=0$ の場合は明らかに両辺が1になるので、$x>0$ の場合について、$n'=n/x$ とおくと以下のように示されます。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n'\to\infty}\left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'x}=\lim_{n'\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'}\right]^x=e^x$$

また、$x<0$ の場合は $n'=-n/x$ とおいて以下のようになります。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n'\to\infty}\left(1-\frac{1}{n'}\right)^{n'(-x)}=\lim_{n'\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n'}\right)^{n'}\right]^{-x}=e^{-(-x)}=e^x$$

次は三角関数の関係を用いた応用例を見てみましょう。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$$

$a=0$ の場合は両辺が0になって当然成り立ちますが、$a\neq 0$ の場合、この関係は以下のように示されます。ここに、最初の等号は $x'=ax$ とおいています。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{x'\to 0}\frac{\sin x'}{x'/a}=\lim_{x'\to 0}a\frac{\sin x'}{x'}=a$$

問題　以下の極限を求めよ。

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+3n+1}{2^n}$　　2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+2^x}{3^x-2^x}$

3) $\displaystyle\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$　　4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ （ヒント　$\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$）

解答

1)　0　　2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+2^x}{3^x-2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+(2/3)^x}{1-(2/3)^x}=1$

3) $\displaystyle\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n'\to\infty}\left(1-\frac{1}{n'}\right)^{-n'}=(e^{-1})^{-1}=e$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim_{x'\to 0}\frac{2\sin^2 x'}{4x'^2}=\frac{1}{2}$

５章　微分

5.1 微分とは

微積分は経済学等の社会科学においても重要な役割をします。特に微分は様々な分析で必要不可欠な知識です。この節では微分の定義とその意味を考えてみます。

ある関数 $y = f(x)$ について、$x = a$ における微分は以下のように定義されます。

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{5.1}$$

この定義を用いて、図からその意味を考えてみます。

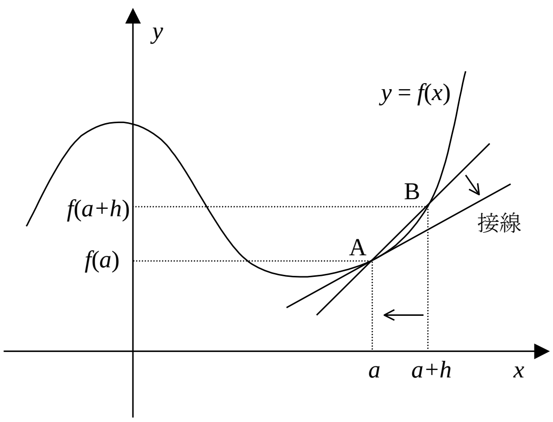


図5-1　接線の傾きと微分

図5-1は関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分の定義を表したものです。定義式の分子 $f(a+h) - f(a)$ は $x = a + h$ と $x = a$ の２点における y の値の差です。分母の h は $x = a + h$ と $x = a$ との差と考えられます。これらを合わせると微分の定義式における分数式は、y 軸上の差を x 軸上の差で割ったものであり、A点とB点を結ぶ直線の傾きを表わすと考えられます。$\lim_{h \to 0}$ は $a + h$ を a に近づけることを意味しますが、これはA点とB点の間を縮めて行くことになります。その際２点を結ぶ直線は、この場合次第に傾きが小さくなって行きます。これが極限まで近づいたとき、この直線はA点における接線に一致することが分かると思います。即ち、微分の定義式 (5.1.1) は $x = a$ における接線の傾きに一致します。これは非常に大事で決して忘れてはならないので標語のようにまとめておきましょう。

微分は接線の傾きである。

ここで１つ注意すべき重要なことがあります。それは微分の定義式が値を持つかどうかです。微分の定義式がある一つの値を持てば、 $f(x)$ は $x=a$ において微分可能であると言います。また、結果が発散する場合や極限の取り方（左や右から近づける）によって値が異なるときは、 $x=a$ において微分可能でないと言います。グラフが $x=a$ において不連続な場合や、折れ曲がっている場合には微分可能でありません。例えば、図5-2に見るように、 $y=|x|$ は $x=0$ において微分可能でありません。

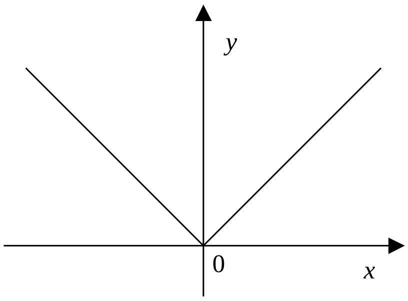


図5-2　$y=|x|$ のグラフ

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{|h|}{h}=-1$$
$$\lim_{h\to +0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{|h|}{h}=1$$

$x=a$ における微分が定義されましたが、a の値が動くにつれ微分の値も変化します。即ち、微分も x の関数になります。この関数を例えば $\dfrac{dy}{dx}$ と表し、以下のように定義します。

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{5.2}$$

このように x をそのまま残して微分を求める、即ち x の各点において微分を求めることを単に微分するとも言います。以後の計算にはこの定義を利用します。

微分を表す書式はいろいろで、以下によく使われている例を書きます。

$$\frac{dy}{dx}=dy/dx=\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=y'=f'(x)$$

この本では状況に応じて使い分けますので、ご容赦下さい。

さて、これからべき乗関数に微分の定義を適用してみましょう。

最初の例は $y=f(x)=1$ という定数の関数です。定義に従って計算すると $f(x)=f(x+h)=1$ であり、x における微分は常に0になります。

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

これはこの関数を表すグラフが図5-3aのように、傾き0の直線になることから納得できます。

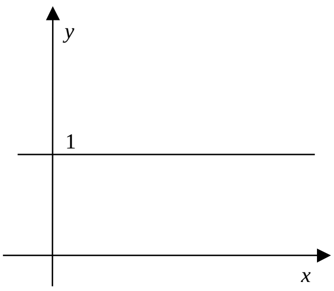


図5-3a

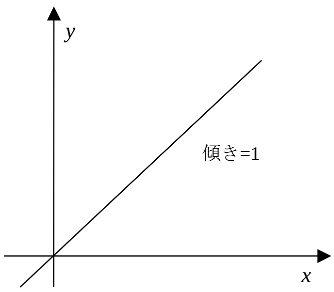


図5-3b

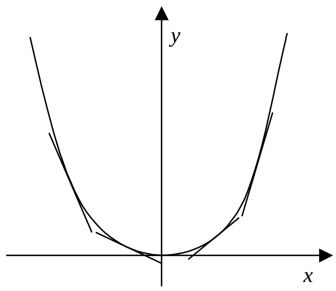


図5-3c

次は $y=f(x)=x$ ですが、$f(x)=x$，$f(x+h)=x+h$ を利用すると、以下のように微分は常に1になります。

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

これは図5-3bで、グラフの傾きが常に1になることと一致しています。

関数が $y=f(x)=x^2$ の場合は、接線の傾きは図5-3cのように場所によって異なってきます。実際に計算してみると、$f(x)=x^2$，$f(x+h)=(x+h)^2$ より、以下のようになることが分かります。

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

ここに、$(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$ を利用しています。

最後に関数が $y=f(x)=x^3$ の場合を見てみましょう。グラフは省略させて下さい。微分は $(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$ を用いて、以下のように求められます。

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

以上の結果を少し書き換えて並べてみましょう。

$$y=1\to\frac{dy}{dx}=0,\quad y=x\to\frac{dy}{dx}=1,\quad y=x^2\to\frac{dy}{dx}=2x,\quad y=x^3\to\frac{dy}{dx}=3x^2$$

これを見るとある規則性があることが分かります。即ち、以下の関係です。

$$y=f(x)=x^n \text{ のとき } \quad \frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

上の計算は、$n=0,1,2,3$ の例です。この計算において次数の n は0以上の整数ですが、実はすべての実数について上の関係が成り立つことが知られています。即ち任意の実数 a に対して以下の公式が得られます。

公式

$$y=x^a \text{ のとき } \quad \frac{dy}{dx}=ax^{a-1} \tag{5.3}$$

問題　以下の関数の微分を求めよ。

1) $y=x^5$　　2) $y=x^{20}$　　3) $y=x^{-3}$

4) $y=x^{1/2}$　　5) $y=\sqrt{x^3}$

解答

1) $y'=5x^4$　　2) $y'=20x^{19}$　　3) $y'=-3x^{-4}$

4) $y'=\frac{1}{2}x^{-1/2}$　　5) $y=\sqrt{x^3}=x^{3/2}$ より、$y'=\frac{3}{2}x^{1/2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

5.2 算術関数の微分

前節でxのべき乗についての微分を学びましたが、その他のいわゆる算術関数を微分するとどうなるのでしょうか。ここではこれらの関数の中で代表的なものについて微分した式を公式として与えます。この中には他の式から導けるものもありますが、これくらいは覚えておいた方が計算が速いようです。これら以外の関数については計算して求めることにします。この中に$y=e^x$の形の指数関数がありますが、これは度々現れる基本的な関数で、定数eは前節で説明したネーピアの数です。また、対数関数に対してもネーピアの数eが使われています。底を10とする対数を**常用対数**、これに対して底をeとする対数を**自然対数**と言います。自然対数の場合は、底のeを省略して$\log x$と書くこともありますし、自然 (natural) を強調するために$\ln x$と書くこともあります。しかし、混乱を避けるために、この本では$\log_e x$のように底をきちんと書くことにします。

公式

$$y=e^x \to \frac{dy}{dx}=e^x \tag{5.4a}$$

$$y=\log_e x \to \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x} \tag{5.4b}$$

$$y=\sin x \to \frac{dy}{dx}=\cos x \tag{5.4c}$$

$$y=\cos x \to \frac{dy}{dx}=-\sin x \tag{5.4d}$$

$$y=\tan x \to \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x} \tag{5.4e}$$

解説*

ここでは上の公式の中で基本となる$y=e^x$と$y=\sin x$とについて求め方を説明しておきましょう。他の公式については、後の節で追い追いに説明して行きます。

$y=e^x$ について

ネーピアの数eの定義から以下のことが分かります。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e+\alpha$$

但し、$n\to\infty$のとき$\alpha\to 0$になります。両辺の$1/n$乗を求め、書き直して以下のようにします。

$$\frac{(e+\alpha)^{1/n}-1}{1/n}=1$$

ここで$h=1/n$とすると以下の関係が成り立つことが分かります。

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \qquad (5.5)$$

この準備のもとに定義に従って計算を実行します。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

最後から2番目の等号で上の関係を使いました。この結果により、$y = e^x$ という関数は微分しても同じ形になる特殊なものであることが分かりました。

さて、今の計算で重要なところは何と言っても、(5.2.1) の関係です。これはどういう意味を持っているのでしょうか。グラフを用いて考えてみましょう。

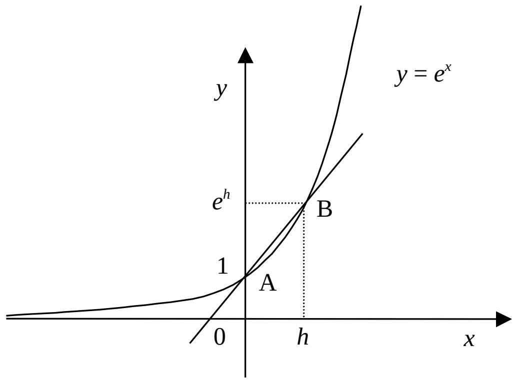


図5-4 $y = e^x$ の接線

図5-4でA点とB点を結ぶ直線の傾きは $(e^h - 1)/h$ で与えられます。それ故 $h \to 0$ でのこの値の極限は、A点における接線の傾きになります。即ち、この傾きが1になることから、$y = a^x$ のグラフで $x = 0$ での傾きが1となるように a の値を定めたものが、$y = e^x$ であると言えます。ネーピアの数 e にはこのような重要な意味が含まれています。

$y = \sin x$ について

この微分を考える前に少し準備をしておく必要があります。まず、4章で説明した倍角の公式を用いて以下の関係を得ます。

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

ここで、$\theta = h/2$ とおいて以下のようになります。

$$\cos h - 1 = -2\sin^2(h/2)$$

この関係を用いると、以下のような極限が求まります。

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin^2(h/2)}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h/2) \cdot \sin(h/2)}{h/2} = 0$$

ここでは、$\lim_{x \to 0} \sin x / x = 1$ の関係も用いています。

いよいよこれらの関係を用いて $y = \sin x$ の微分を考えてみます。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right]$$

$$= \cos x$$

この計算法を用いると、$y = \cos x$ の微分も同様に計算されます。

問題　$y=\cos x$ の微分が $y'=-\sin x$ になることを上の方法に習って示せ。

解答

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}\right]\\&=-\sin x\end{aligned}$$

5.3 関数の定数倍と和の微分

基本的な関数の微分の結果が分かりましたので、ここからは関数を組合せた場合の微分について説明して行きます。この節では定数倍と関数の和についてです。

基本的な関数に定数が掛かった場合微分はどうなるでしょうか。$f(x)$ の微分 $f'(x)$ が分かっているとして、$y=af(x)$ の微分を考えます。ここに a は定数です。定義に従って計算します。

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{af(x+h)-af(x)}{h}=\lim_{h\to 0}a\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=af'(x)$$

以上のように、$y=af(x)$ の微分は、微分した関数に定数 a を掛けたものになります。この関係を式に表わしておきましょう。

$$y=af(x)\quad\to\quad\frac{dy}{dx}=af'(x)$$

少し例を見てみましょう。

1) $y=3x^2 \quad\to\quad \dfrac{dy}{dx}=3\cdot 2x=6x$

2) $y=5\sin x \quad\to\quad \dfrac{dy}{dx}=5\cos x$

1) の場合、$a=3$, $f(x)=x^2$ と考えて、$af'(x)=3\cdot 2x$ となり、2) の場合、$a=5$, $f(x)=\sin x$ と考えて、$af'(x)=5\cdot\cos x$ となります。

次に関数の和についての微分です。２つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の微分 $f'(x)$ と $g'(x)$ とが分かっているとして、$y=f(x)+g(x)$ の微分を定義に従って考えます。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\&=f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

以上のように関数の和の微分は、関数を微分したものの和になります。これを式で表わしておきましょう。

$$y = f(x) + g(x) \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)$$

この場合の例を見てみましょう。

1) $y = x^3 + x \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$

2) $y = e^x + \cos x \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = e^x - \sin x$

1) の場合、 $f(x) = x^3$， $g(x) = x$ として、 $f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 1$ となり、2) の場合、 $f(x) = e^x$， $g(x) = \cos x$ として、 $f'(x) + g'(x) = e^x + (-\sin x)$ となります。

以上の結果を公式にまとめておきます。

公式

$$y = af(x) \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = af'(x) \qquad (5.6a)$$

$$y = f(x) + g(x) \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x) \qquad (5.6b)$$

関数の定数倍と和については、関数が何倍かになれば微分もそうする、和は素直に１つずつ微分するというように、公式より直感に頼った方が迅速で確実なようです。ここでの公式は特に覚えておく必要はないでしょう。次はこれらの複合形について例を見てみましょう。

1) $y = ax + b \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = a \cdot 1 + 0 = a$

2) $y = 2x^2 - 3x + 1 \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = 4x - 3$

3) $y = e^x - x^3 \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = e^x - 3x^2$

4) $y = 2\sin x + 3\cos x \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = 2\cos x - 3\sin x$

5) $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{x} \quad \to \quad \dfrac{dy}{dx} = 1 - 2x^{-2} = 1 - \dfrac{2}{x^2}$

（$y = x - 1 + 2x^{-1}$ と変形するとよい）

これらについては特に説明の必要はないと思います。

問題　以下の関数の微分を求めよ。

1) $y = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$　　2) $y = 2x^5 - 3x^2 + 4$

3) $y = -3x^4 + 5x$　　4) $y = (x+1)(x-1)$

5) $y = x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$　　6) $y = \sqrt{x} + \log_e x$

7) $y = 2\tan x + 3x^{2/3}$　　　　8) $y = \sum_{i=0}^{n} x^i$

解答

1) $y' = 3x^2 + 4x + 4$　　　　2) $y' = 10x^4 - 6x$

3) $y' = -12x^3 + 5$　　　　4) $y' = 2x$

5) $y' = 2x + 1 - x^{-2} - 2x^{-3} = 2x + 1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$

6) $y' = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$

7) $y' = \dfrac{2}{\cos^2 x} + 2x^{-1/3}$　　　　8) $y' = \sum_{i=0}^{n} i x^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} i x^{i-1}$

5.4 関数の掛け算の微分

前節で微分できる関数の範囲が少し広がりましたが、ここでは微分の分かっている関数同士の掛け算の微分について考えてみます。即ち、 $f(x)$ と $g(x)$ との微分が分かっているとして、 $y = f(x)\cdot g(x)$ の微分を定義に従って求めてみましょう。

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

掛け算の微分は、それぞれの関数を1つずつ微分して足し上げて行けばよいことが分かります。これを公式としてまとめておきましょう。

公式

$$
y = f(x)g(x) \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{5.7}
$$

さらに以下のように３つの関数の掛け算 $y = f(x)g(x)h(x)$ の微分を求めてみましょう。例えば $g(x)h(x)$ をまとめて１つの関数と思えば、結果は容易に導けると思います。

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= f'(x)[g(x)h(x)] + f(x)[g(x)h(x)]' \\
&= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)
\end{aligned}
$$

具体的な例を見てみましょう。

1) $y = x^3 \sin x$　　　　$\to$　$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$

2) $y=(x^2+x+1)\log_e x \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}=(2x+1)\log_e x+\dfrac{x^2+x+1}{x}$

1) については、 $f(x)=x^3$， $g(x)=\sin x$ とすると、 $f'(x)=3x^2$， $g'(x)=\cos x$ となり、 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ として上の結果を得ます。また、2) については、 $f(x)=x^2+x+1$， $g(x)=\log_e x$ とすると、 $f'(x)=2x+1$， $g'(x)=1/x$ となり、上の結果を得ます。

問題　以下の関数の微分を求めよ。

1) $y=x^2(2x^4+1)$　　2) $y=(x^4+x^2+1)(x^3+x)$

3) $y=e^x(x^2+x+1)$　　4) $y=x\log_e x$

5) $y=e^x\sin x$　　6) $\sqrt{x}\tan x$

解答

1) $y'=2x(2x^4+1)+x^2\cdot 8x^3=12x^5+2x$

2) $y'=(4x^3+2x)(x^3+x)+(x^4+x^2+1)(3x^2+1)$

3) $y'=e^x(x^2+x+1)+e^x(2x+1)=e^x(x^2+3x+2)$

4) $y'=1\cdot\log_e x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\log_e x+1$

5) $y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

6) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\tan x+\sqrt{x}\dfrac{1}{\cos^2 x}$

注意

微分などで数式を書く場合、気が付かないうちに誤りをしている場合があります。以下の例をご覧下さい。

$$y=e^x\cos x\rightarrow y'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)$$

これは正しい結果ですが、時々 $(\ )$ を付け忘れる人がいます。そうするとこの式は

$$y'=e^x\cos x+e^x-\sin x$$

となって意図したものとは違ってきます。正確な解答を得るためには十分な注意が必要です。

5.5 関数の割り算の微分

微分の分かっている関数同志の割り算 $y=f(x)/g(x)$ の微分は、定義に従って以下のように計算されます。

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)/g(x+h)-f(x)/g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\cdot g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\cdot g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}
$$

この関係をまとめると以下の公式を得ます。

公式

$$
y=\frac{f(x)}{g(x)} \quad \to \quad \frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{5.8}
$$

この公式を用いた例を計算してみましょう。

1) $y=\dfrac{e^x}{2x+1} \quad \to \quad y'=\dfrac{e^x(2x+1)-e^x\cdot 2}{(2x+1)^2}=\dfrac{e^x(2x-1)}{(2x+1)^2}$

2) $y=\dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \to \quad y'=\dfrac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

3) $y=\dfrac{1}{x^n} \quad \to \quad y'=\dfrac{0\cdot x^n-1\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}$

1) について、 $f(x)=e^x$， $g(x)=2x+1$ として、公式を用いると結果が右側のように求まります。2) についても $f(x)=\sin x$， $g(x)=\cos x$ としますが、さらに三角関数における $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ の関係を使うと上の最終的な結果が求まります。ここで気付かれた方もおられるでしょうが、2) の関数は $y=\tan x$ と同じです。これについてはすでに証明無しで、 $y'=1/\cos^2 x$ という公式を示しました。この例が $\tan x$ の微分の公式の証明となります。3) については、 $f(x)=1$， $g(x)=x^n$ としますが、これはべき乗関数 $y=x^a$ の $a=-n$ の場合に相当し、微分が $y'=ax^{a-1}$ で与えられることを示しています。

問題　以下の関数の微分を求めよ。

1) $y=\dfrac{x}{x+1}$　　2) $y=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

3) $y=\dfrac{e^x}{\sin x+\cos x}$　　4) $y=\dfrac{\sin x}{x+\cos x}$

5) $y = \dfrac{x\sin x}{1+e^x}$

解答

1) $y' = \dfrac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

2) $y' = \dfrac{2x(x^2+x+1) - x^2(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$

3) $y' = \dfrac{e^x(\sin x+\cos x) - e^x(\cos x - \sin x)}{(\sin x+\cos x)^2} = \dfrac{2e^x\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$

4) $y' = \dfrac{\cos x\cdot(x+\cos x) - \sin x\cdot(1-\sin x)}{(x+\cos x)^2} = \dfrac{x\cos x - \sin x + 1}{(x+\cos x)^2}$

5) $y' = \dfrac{(1\cdot\sin x + x\cos x)(1+e^x) - x\sin x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}$

$$= \frac{\sin x + x\cos x + e^x(\sin x + x(\cos x - \sin x))}{(1+e^x)^2}$$

この問題の5) では、割り算の微分の中に掛け算 $x\sin x$ の微分の要素が入っています。理解できたでしょうか。

これまで、例でも問題でも結果はできるだけ整理して書くようにしていますが、微分の方法を学ぶ上でこの数式の整理は必要ない（むしろ余計なことに気を使う分だけじゃまな）ように思います。基本はいかに微分の公式をきちんと使えるかで、きれいにまとめることはまた別の問題です。解答の $y'=$ の次の式が微分の公式を素直に使ったものです。ここまで結果を出せば十分な気がします。

5.6 汎関数の微分

汎関数とは、$y = f(z)$ という形の関数で、さらに z が $z = g(x)$ のように x の関数として表わされるものを言います。一まとめにして書くと、$y = f(g(x))$ の形になっている関数です。例えば、以下のように見ると、$y = (x^2+x+1)^5$ や $y = e^{x^2}$ 等が汎関数です。

$y = (x^2+x+1)^5$ については、$y = z^5$, $z = x^2+x+1$

$y = e^{x^2}$ については、$y = e^z$, $z = x^2$

このような関数について微分を考えてみましょう。dy/dx は x の微小な変動に対する y の変動の極限を表わしていますから、間に $z = g(x)$ についての微小な変動を加えることも可能です。即ち、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\times\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}$$

ここで、$g(x) = z,\ g(x+h) = z + h'$ とおくと、$h \to 0$ でもちろん $h' \to 0$ となります。

$$= \lim_{h,h'\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \times \frac{f(z+h')-f(z)}{h'}$$

$$= \frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dz}$$

これによって以下の公式が導かれます。

公式

$$y = f(g(x)) \quad \to \quad y = f(z),\ \ z = g(x) \text{ とおいて、} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dz} \qquad (5.9)$$

この方法を汎関数の例に用いた関数を使って実際にやってみましょう。

1) $y = (x^2 + x + 1)^5$ 2) $y = e^{x^2}$

1) では、$y = z^5$, $z = x^2 + x + 1$ として、以下のようになります。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} = (2x+1)\cdot 5z^4 = 5(2x+1)(x^2+x+1)^4$$

ここで dy/dz の式の z はもとの x の式に戻しておきます。2) については、$y = e^z$, $z = x^2$ として、以下のように求まります。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} = 2x \cdot e^z = 2xe^{x^2}$$

さて、最後に今までやり残してある2つの関数の微分について見てみましょう。

$y = \log_e x$ について

この場合、対数の定義に従った関係 $x = e^y$ を利用します。$x = e^y$ 両辺を x で微分してみましょう。y の関数の x についての微分には、汎関数微分の方法を応用します。

左辺 $\quad \dfrac{d}{dx}x = 1$

右辺 $\quad \dfrac{d}{dx}e^y = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{d}{dy}e^y = \dfrac{dy}{dx}e^y = \dfrac{dy}{dx}x$

これらを比較して以下の公式が示されました。

$$x\frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{即ち、} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$y = x^a$（a が有理数の場合）について

べき乗の中で次数が有理数の関数の微分を考えて見ましょう。有理数とは整数の既約分数で書けるものを言いますので、a を以下のように表しておきます。

$a = p/q$（p, q は整数）, 即ち、$y = x^{p/q}$

この式について両辺の q 乗を取ります。

$$y^q = x^p$$

この関数の両辺を x で微分します。

$$\text{左辺}\qquad \frac{d}{dx}y^q = \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}y^q = \frac{dy}{dx}qy^{q-1} = \frac{dy}{dx}qx^{(p/q)(q-1)} = \frac{dy}{dx}qx^{p-(p/q)}$$

$$\text{右辺}\qquad \frac{d}{dx}x^p = px^{p-1}$$

両辺が等しいとして、

$$\frac{dy}{dx}qx^{p-(p/q)} = px^{p-1} \quad \text{即ち、}\ \frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{qx^{p-(p/q)}} = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1} = ax^{a-1}$$

となって通常のべき乗の微分公式が得られます。

問題　以下の関数の微分を求めよ。

1) $y=(2x+1)^5$　　2) $y=(\sin x+\cos x)^3$

3) $y=e^{\sin x}$　　4) $y=e^{e^x}$

5) $y=\sin(3x+4)$　　6) $y=\tan(x+\sin x)$

7) $y=\log_e(x^2+x+1)$　　8) $y=\log_e(e^x+1)$

解答

1) $y'=2\cdot 5(2x+1)^4=10(2x+1)^4$

2) $y'=(\cos x-\sin x)\cdot 3(\sin x+\cos x)^2=3(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^2$

3) $y'=\cos x\cdot e^{\sin x}$　　4) $y'=e^x e^{e^x}$

5) $y'=3\cos(3x+4)$　　6) $y'=\dfrac{1+\cos x}{\cos^2(x+\sin x)}$

7) $y'=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$　　8) $y'=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

5.7 一般的な関数の微分

　これで関数の組合せについて、ほぼ完全な微分の方法が確立できました。この節ではさらに複雑な関数の組合わせについて、微分が計算できるよう練習します。微分は基本的なルールが分かれば単純な作業ですので、すべて暗算で計算できます。誰でも必ずできますので、訓練して下さい。

　これまでの公式と重複しますが、微分の計算をする際の最低限の暗記事項を以下にまとめておきます。

微分公式

1.	$y=x^n$	$\rightarrow$	$y'=nx^{n-1}$
2.	$y=e^x$	$\rightarrow$	$y'=e^x$

3. $y = \log_e x \quad \to \quad y' = \dfrac{1}{x}$

4. $y = \sin x \quad \to \quad y' = \cos x$

5. $y = \cos x \quad \to \quad y' = -\sin x$

6. $y = \tan x \quad \to \quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

7. $y = af(x) \quad \to \quad y' = af'(x)$

8. $y = f(x) + g(x) \quad \to \quad y' = f'(x) + g'(x)$

9. $y = f(x)g(x) \quad \to \quad y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

10. $y = f(x)/g(x) \quad \to \quad y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

11. $y = f\left(g(x)\right) \quad \to \quad z = g(x)$ として、$y' = \dfrac{dz}{dx}\dfrac{df(z)}{dz}$

さて、これまでの微分の要素を複合した問題を考えてみましょう。以下に例を示しますので検討して下さい。

例

$$y = (2x+1)^4(3x+4)^5$$

$$f(x) = (2x+4)^4 \qquad f'(x) = 2\cdot 4(2x+1)^3 = 8(2x+1)^3$$

$$g(x) = (3x+4)^5 \qquad g'(x) = 3\cdot 5(3x+4)^4 = 15(3x+4)^4$$

$$\begin{aligned} y' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= 8(2x+1)^3(3x+4)^5 + 15(2x+1)^4(3x+4)^4 \end{aligned}$$

$$y = \frac{e^x \sin x}{x^2 + x + 1}$$

$$f(x) = e^x \sin x \qquad f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$$

$$g(x) = x^2 + x + 1 \qquad g'(x) = 2x + 1$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{e^x(\sin x + \cos x)(x^2 + x + 1) - e^x \sin x \cdot (2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$y = \sin\frac{x}{2x+1}$$

$$z = \frac{x}{2x+1} \qquad y = \sin z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{(2x+1) - x\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dz} = \cos z = \cos\frac{x}{2x+1}$$

$$y' = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} = \frac{1}{(2x+1)^2}\cos\frac{x}{2x+1}$$

最後に、ネーピアの数eから離れて、一般的な$y = a^x$や$y = \log_a x$の微分について触れておきます。

$y = a^x$については、$a = e^{\log_e a}$の性質を利用します。

$$y = a^x = e^{\log_e a \cdot x}\ \text{より、}\ \frac{dy}{dx} = \log_e a \cdot e^{\log_e a \cdot x} = \log_e a \cdot a^x$$

$y = \log_a x$については、底の変換の公式$\log_a x = \dfrac{\log_e x}{\log_e a}$を用います。

$$y = \log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a}\ \text{より、}\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log_e a}\cdot\frac{1}{x}$$

問題　以下の関数の微分を求めよ。

1) $y = \dfrac{xe^x}{3x+2}$　　2) $y = \dfrac{\cos x}{x(e^x+1)}$

3) $y = x\sin(2x+1)$　　4) $y = (x^2+1)e^{2x}$

5) $y = \dfrac{\sin(3x+2)}{e^x+1}$　　6) $y = \dfrac{\log_e(x^2+1)}{4x+3}$

7) $y = e^{(x-1)^2/2}$　　8) $y = e^{xe^x}$

解答

1) $y' = \dfrac{(e^x + xe^x)(3x+2) - xe^x \cdot 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{e^x(3x^2+2x+2)}{(3x+2)^2}$

2) $y' = \dfrac{-\sin x \cdot x(e^x+1) - \cos x \cdot \left[(e^x+1) + xe^x\right]}{x^2(e^x+1)^2}$

3) $y' = \sin(2x+1) + x \cdot 2\cos(2x+1)$

4) $y' = 2xe^{2x} + (x^2+1)\cdot 2e^{2x} = 2(x^2+x+1)e^{2x}$

5) $y' = \dfrac{3\cos(3x+2)\cdot(e^x+1) - \sin(3x+2)\cdot e^x}{(e^x+1)^2}$

6) $y' = \dfrac{\dfrac{2x}{x^2+1}(4x+3) - \log_e(x^2+1)\cdot 4}{(4x+3)^2}$

7) $y' = (x-1)e^{(x-1)^2/2}$

8) $y' = (e^x + xe^x)e^{xe^x} = e^x(1+x)e^{xe^x}$

5.8 極大値と極小値

これまで微分の方法を学んできましたが、なぜ微分が大切なのか考えてみましょう。関数の性質で最も重要なものは、どこでその関数が最大や最小となるかということです。例えば、経済や経営の問題では、経費を表わす関数ではそれが最小になるように、利益を表わす関数ではそれが最大になるようにと考えるのが自然の考えです。図5-5を見て下さい。関数 $y = f(x)$ の y の値は x の増加に連れ、増加したり、減少したりしています。増加が減少に転ずる点を極大点、減少が増加に転ずる点を極小点、それらの y 座標値をそれぞれ極大値、極小値（これらを総称して極値）と言いますが、最大や最小を求めるにはこれらの極大値や極小値を調べる必要があります。例えばある範囲 $0 \le x \le 1$ における最大値を求めるには、境界における関数の値 $f(0)$，$f(1)$ とその範囲内の極大値とを比べる必要があります。例えば図5-5においては境界での値よりは極大値の方が大きく、最大値は極大値になっています。

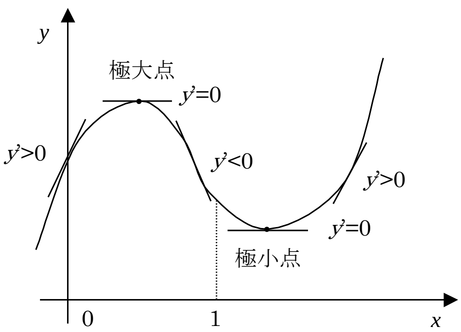


図5-5 極大と極小

それではこれらの極大点や極小点を求めるにはどうすれば良いでしょうか。ここで微分の定義を思い出して下さい。即ち、微分とは接線の傾きであるということです。接線の傾きは関数が増加している場合には正、減少している場合には負です。つまり、微分した値の正負により関数の増減は判断できます。それでは極大点や極小点での微分の値はいくらでしょうか。増加と減少の境界ですから、その値は0になります。図5-5の接線の傾きを見て下さい。0になっていることが分かると思います。以下では具体的に関数の極値を求めてみましょう。

最初は $y = x^2 - 2x - 3$ の極値を求めてみます。極値を求めるには、その微分が0という性質を利用します。

$$y' = 2x - 2 = 2(x-1) = 0$$

これから、$x = 1$ という解を得ます。これで、極大点または極小点の x 座標が1であることが分かりましたが、それが極大点であるのか、極小点であるのか、一般にこれだけでは判断が付きかねます。そこでよく利用されるのが、関数増減表です。これは、以下のような書式で描かれます。

関数増減表

x		1	
y'	−	0	＋
y	↘	-4	↗

まず、1行目は領域を区切って、極値となる x 座標の値を書き込みます。ここでは、1です。次に、2行目にはその時の微分 y' の値を書きます。 $x=1$ のところは極値ですからもちろん0ですが、この点以外の x の領域で、 y' の正負を調べ、それに応じて＋か−の記号を書き加えます。これで関数の増減は分かるようになります。最後に、 y の極値を書き、その他の領域では関数の増減を、減少なら↘ の記号で、増加なら、↗ の記号で表わして書き込みます。これで、視覚的に増減がはっきりしましたので、極小値か極大値か判断できるようになります。ここの場合は極小値です。解答は以下のように書くとよいでしょう。

$x=1$ のとき、極小値 -4　　または、　　極小点　(1,-4)

この結果は、３章の2次関数のところで述べた式の変形 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ を用いて、頂点の座標は (1,-4) であるとする結果と一致しています。

2次曲線の場合、頂点の座標を求めるために特に微分を使う必要はないのですが、3次以上の次数の曲線になると微分は不可欠です。そこで例として、 $y=x^3-6x^2+9x$ の極値を求めてみます。

最初にこの関数を微分して以下の結果を得ます。

$$y'=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$$
$$=3(x-1)(x-3)=0$$

解　$x=1$ または $x=3$

この解が極大であるか極小であるか調べるために関数増減表を描いてみます。この場合、x 座標の値は2箇所になります。

関数増減表

x		1		3	
y'	+	0	−	0	+
y	↗	4	↘	0	↗
		極大		極小	

微分 y' の符号は増減表のようになり、関数の増減が決まります。これによって、以下の結果を得ます。

$x=1$ のとき極大値 4　　（極大点　(1,4)）

$x=3$ のとき極小値 0　　（極小点　(3,0)）

5.9 ２階微分と変曲点

前節までで曲線の極大点と極小点を求める方法が分かりましたが、具体的にグラフを描こうとすると、曲線の増加、減少だけでなく、その曲がり方も必要になります。そこで、ここではグラフの曲がり方に関連する2階微分について考えてみます。

2階微分とは、１度微分した後、もう１度微分することです。2階微分に対して最初の微分のことを1階微分と言うこともあります。例を見てみましょう。

1階微分　$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 4 \ \rightarrow\ \dfrac{dy}{dx} = y' = 3x^2 + 6x - 9$

2階微分　$\dfrac{dy}{dx} = y' = 3x^2 + 6x - 9 \ \rightarrow\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = y'' = 6x + 6$

ここで、2階微分を表わすには、以下のような表記法があります。

$y = f(x)$ に対して　　$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2}{dx^2} f(x) = y'' = f''(x)$

2階以上の微分もありますので、一般の n 階微分についてその表記法も示しておきましょう。

$y = f(x)$ に対して　　$\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{d^n}{dx^n} f(x) = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$

n 階微分と言っても、微分を n 回繰り返すだけですから、計算量は増えるとしても、特に難しいものではありません。

さて、ではなぜこの2階微分が曲線の曲がり方と関係あるのでしょうか。微分は接線の傾き、即ち関数の増減を表わすと言いましたが、図5-6を見て下さい。左側の図では、x の値が増大するにつれ接線の傾きは増大していますが、右側の図では、接線の傾きは逆に減少しています。即ち、接線の傾きについて言えば、左は増加関数、右は減少関数となります。即ち、接線の傾きを表わす関数を微分すると、左は正、右は負の値が得られます。接線の傾きを表わす関数とは、元の関数の微分ですから、左の図は2階微分が正、右の図は2階微分が負になっています。

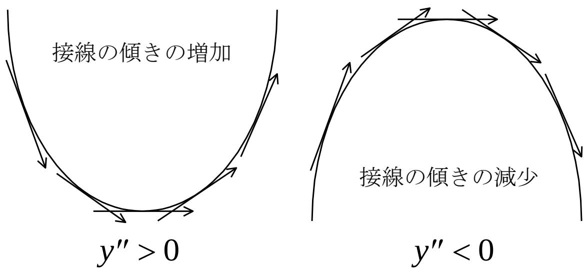


図5-6 曲線の湾曲と2階微分

即ち、左のような下に凸のグラフでは2階微分が正、右のような上に凸のグラフでは2階微分が負になります。

さて、図5-7のように上に凸と下に凸の曲線が混在する場合、その境界には曲線の曲がり方が変わる点が存在します。この点は変曲点と呼ばれ、そこでは $y''=0$ となっています。

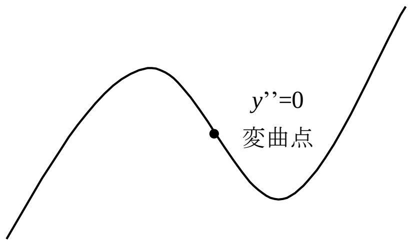


図5-7 変曲点

例として関数 $y=x^3+3x^2-9x-4$ の変曲点を求めてみましょう。

1階微分して、$y'=3x^2+6x-9$

2階微分して、$y''=6x+6=0$

これより、$x=-1$，$y=7$ が変曲点となります。表記法としては、変曲点 $(-1,7)$ と書いてもよいでしょう。

ここでは曲線の曲がり方についても検討をしてみます。以下のような表を作ると、曲がり方は明らかです。

x		-1	
y''	−	0	＋
y	上に凸	7	下に凸

5.10 グラフの概形

準備が整いましたので、これまでの応用として、微分を用いて実際にグラフを描いて見ましょう。ここでは実際に解く場合の手順を示し、必要に応じて解説を加えます。

例１　$y=f(x)=x^2-2x-3$　のグラフの概形を描け

y 軸との交点を求める。

$x=0$ とおいて　$y=-3$

x 軸との交点を求める。

$y=0$ とおいて　$y=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$　よって、$x=-1,3$

無限遠でのふるまいを調べる。

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

極値を求める。

$y'=2x-2=2(x-1)=0$　よって、$x=1$

$x=1$ のとき $y=-4$

関数増減表を描く。

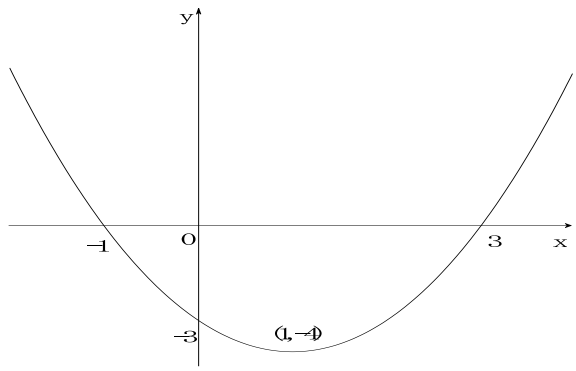
x		1	
y'	−	0	＋
y	↘	-4	↗
		極小	

$x=1$ のとき極小値 -4　　（極小点　$(1,-4)$）

変曲点を求める。

$y''=2>0$ より、変曲点は存在しない。

グラフの概形を描く。



例２　$y=x^3-6x^2+9x$ のグラフの概形を描け。

y 軸との交点を求める。

$x=0$ とおいて　$y=0$

x 軸との交点を求める。

$y=0$ とおいて　$y=x^3-6x^2+9x=x(x-3)^2$　よって、$x=0,3$

無限遠でのふるまいを調べる。

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

極値を求める。

$y'=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$

$=3(x-1)(x-3)=0$

$x=1$ のとき $y=4$，$x=3$ のとき $y=0$

関数増減表を描く。

x		1		3	
y'	+	0	−	0	+
y	↗	4	↘	0	↗
		極大		極小	

$x=1$ のとき極大値　4　　（極大点　(1, 4)）

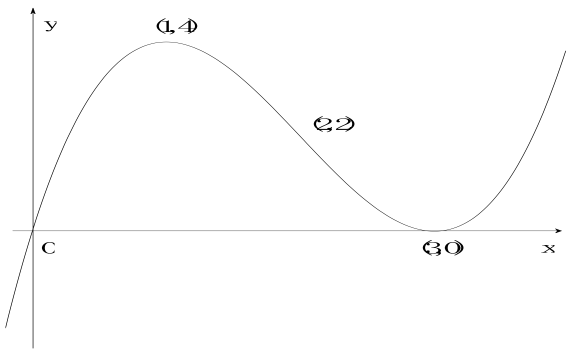
$x=3$ のとき極小値　0　　（極小点　(3, 0)）

変曲点を求める。

$y'' = 6x - 12 = 6(x-2) = 0$　　よって、$x = 2$

$x = 2$ のとき　$y = 2$　（変曲点　(2, 2)）

グラフの概形を描く。



問題　以下のグラフの概形を描け。

1) $y = -x^2 + 6x + 3$　　2) $y = x^4 - 2x^2 + 1$

3) $y = e^x - x$　　4) $y = e^{-x^2}$

解答

1) $y = -x^2 + 6x + 3$

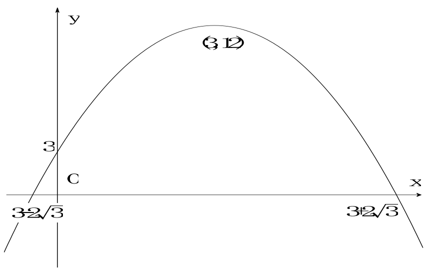
y 軸との交点　$y = 3$

x 軸との交点　$x = 3 \pm 2\sqrt{3}$

極大点　(3, 12)

極小点　なし

変曲点　なし



2) $y = x^4 - 2x^2 + 1$

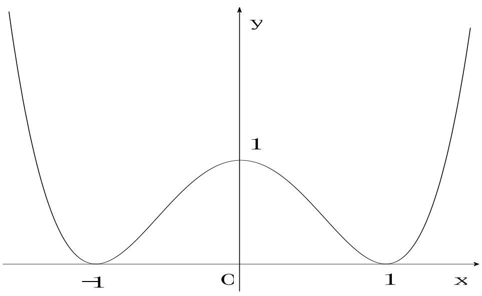
y 軸との交点　$y = 1$

x 軸との交点　$x = \pm 1$

極大点　(0, 1)

極小点　(-1, 0), (1, 0)

変曲点　$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{4}{9}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{4}{9}\right)$



3) $y = e^x - x$

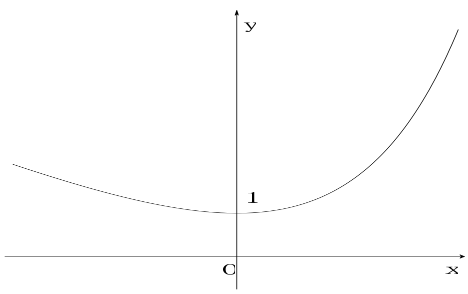
y 軸との交点　$y = 1$

x 軸との交点　なし

極大点　なし

極小点　(0, 1)

変曲点　なし



4) $y=e^{-x^2}$

y軸との交点　$y=1$

x軸との交点　なし

極大点　(0, 1)

極小点　なし

変曲点　$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$