

## 4章 極限

### 4.1 極限とは

ある数が限りなく大きくなるとか、限りなく0に近づくとか、そんな場合にその数を用いた関数がどんな値に近づくとかを考えることを関数の極限と言います。

ある数 $n$ が限りなく大きくなる場合、数学では $n$ が無限大に近づくと言います。無限大は $\infty$ という記号で表し、 $n \rightarrow \infty$ という形で表現されます。また、負の側に無限に大きく（小さくと言うべきか）なっていく場合、 $n$ はマイナス無限大に近づくといい、 $n \rightarrow -\infty$ で表します。この $n$ という記号は整数を表す場合が多く、実数を強調したい場合には $x$ 等を用いて、 $x \rightarrow \infty$ 等とします。

この矢印の記号はある数 $a$ に限りなく近づくとときにも使われ、 $x$ が $a$ に限りなく近づくととき $x \rightarrow a$ と表されます。特に $a$ が0の場合によく使われますが、0への近づき方が正の側から近づくとをはっきりとさせたい場合 $x \rightarrow +0$ 、負の側から近づくとをはっきりとさせたい場合 $x \rightarrow -0$ と表すことがあります。

以後、限りなく大きくなる(正負の側に)場合とある数に限りなく近づくと場合とに分けて、例を多く用いて極限での関数のふるまいを見てみましょう。

### 4.2 無限大に関する極限

さて、次の式をみて下さい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

これは、 $n$ が限りなく大きくなるとき ( $n \rightarrow \infty$ のとき)、 $1/n$ はどんな値に近づくとか、という式です。言い換えると $1/n$ はどんな極限になるかとも言えます。ここにlimはlimitの略で、極限の意味です。 $n$ が、10, 100, 1000, 10000, ... となるとき、 $1/n$ はどうなるでしょうか。

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots \rightarrow 0$$

以上のように0に近づいて行くことが分かります。即ち、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $1/n \rightarrow 0$ です。これを数式で表現したものが以下の式になります。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

等号は0になるのではなく、0に限りなく近づくとという意味です。ある値に限りなく近づくとをその値に収束(収斂)するとも言います。

この関係に類似したものを見て行きましょう。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000}{n} = 0$$

分母が  $n^2$  になると、分母が大きくなる割合が増し、速く  $0$  に収束します。分母が  $\sqrt{n}$  では、大きくなり方は  $n$  よりゆっくりですが、やはり  $0$  に収束します。分子が  $1000$  の場合も  $n$  が  $1000$  倍になれば良いだけのことから、結果は同じです。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n+a} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( c + \frac{b}{n+a} \right) = c$$

分子が一般に何であっても、分母に任意の数を足しても結果は変わりません。また、収束する項にある定数  $c$  を足しても、収束した値に  $c$  を足した値になるだけです。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$n$  が  $-\infty$  になる場合、結果は同じですが、 $1/n$  の  $0$  への収束は負の側からになることを注意して下さい。

これまでは形式的に表現して  $1/\infty$  のような形になる式について学んできましたが、次は  $\infty/\infty$  の形になる式を考えてみましょう。以下の例を見て下さい。分母も分子もともに無限大になるので収束性は一見不明です。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$$

このような場合、分母の最も次数の高い項で分母分子を割るのがうまいやり方です。即ち、以下のようにすると分母の第2項は  $0$  になり、全体は  $1$  に収束することが分かります。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} = 1$$

以下の例も分母分子を  $n$  で割って答えを得ます。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+1/n}{1-2/n} = 2$$

次の場合は、分母分子を  $n^2$  で割ります。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{3n^2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n^2}{3-2/n^2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{3n^2-2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3/n+1/n^2}{3-2/n-1/n^2} = \frac{2}{3}$$

さて、賢明な読者はもう気づかれたかも知れませんが、分母と分子が  $n$  の多項式で、次数が等しいとき、収束する値は最大次数の項の係数だけを見ていれば分かります。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{3n^2-2n-1} = \frac{2}{3}$$

実際の計算では、このようにして暗算で解答します。

次に分母と分子の次数が違う場合を見てみましょう。分母の次数が分子より大きい場合、以下のように分母の最大次数の  $n^2$  で割れば  $0$  に収束することが分かります。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1+1/n^2} = 0$$

このことから、分母の次数が分子より大きい場合、常に 0 になることが理解できます。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{-n^3 + 2n + 1} = 0$$

逆に、分子の次数が分母より大きい場合、極限は状況によって  $\pm\infty$  になります。以下の例を見て下さい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n+1} = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = -\infty$$

これについても、分母分子の最大次数の項だけを見ていれば、暗算で答えが見えてきます。このように極限值が  $\pm\infty$  になる場合、極限值は発散すると言います。

多項式の分数式の場合、これまでの議論を直感的方法としてまとめておきましょう。

分母の次数 = 分子の次数 のとき、

分母分子の最大次数の項の係数に注目

分母の次数 > 分子の次数 のとき、

極限は 0

分母の次数 < 分子の次数 のとき、

分母分子の最大次数の項に注目 極限は  $\pm\infty$

## 問題

以下の極限を求めよ。

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + 2n - 1}{5n^2 - 3n + 4}$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{3n^2 + n + 2}$

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 2n + 1}}{n - 3}$

4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n^2 + n - 3}$

5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2/3}}{n+3}$

6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + 2n - 3}{n+1}$

7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 3}{2n + 1}$

8)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^3 + 3n - 4}}{n + 2}$

## 解答

1)  $-\frac{1}{5}$

2)  $\frac{1}{3}$

3)  $\sqrt{3}$

4) 0

5) 0

6)  $-\infty$

7)  $-\infty$

8)  $\infty$

## 4.3 定数の極限

さて、次の表式を見てみましょう。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

これは、 $x$  が限りなく  $a$  に近づくのとき、 $f(x)$  がどのような振る舞いをするかを表すもの

ですが、 $x=a$ で $f(x)$ が連続の場合、その収束先は $f(a)$ となります。しかし、連続性が保証されていない場合、 $x$ が大きい側から近づくのか、小さい側から近づくのかによって値が異なる場合もあります。

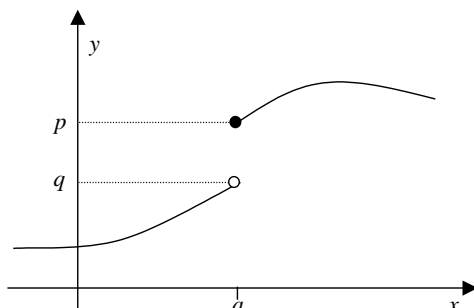


図 4-1 不連続点への収束

例えば図 4-1 を見て下さい。黒丸は $x=a$ 点での関数の値ですが、左側から $a$ に近づく ( $x \rightarrow a-0$ ) と $q$ に限りなく近づき、右側から近づく ( $x \rightarrow a+0$ ) と $p$ になります。

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = q, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = p$$

以下の例は連続性のある場合ですから、値を代入すると簡単に結果は求まります。

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x + 3) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

関数を使った複雑そうな場合でも同様です。

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = a^0 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x) = \log_a 1 = 0$$

次は、単純に代入すると分子と分母が共に $0$ になる場合です。まず最初に通分できるときは極力やっておく必要があります。残った式で収束を調べます。以下の例は問題なく理解できると思います。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$$

分子が有限で分母が $0$ になる場合、状況によって結果は $\pm\infty$ になります。関数の符号を検討しながら見極める必要があります。

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$$

## 問題

以下の極限を求めよ。

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x + 3}$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \frac{3x + 4}{2x + 1}$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 1} (2^x + 2^{-x})$               | 4) $\lim_{x \rightarrow 2}  x - 2 $                      |
| 5) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x + \cos x)$        | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{ x }$                |
| 7) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sin x}$            | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x}$             |
| 9) $\lim_{x \rightarrow \pi/2-0} \tan x$                 | 10) $\lim_{x \rightarrow \pi/2+0} \tan x$                |

解答

- |                   |               |                  |              |
|-------------------|---------------|------------------|--------------|
| 1) $-\frac{1}{3}$ | 2) 2          | 3) $\frac{5}{2}$ | 4) 0         |
| 5) 1              | 6) $\infty$   | 7) $\infty$      | 8) $-\infty$ |
| 9) $\infty$       | 10) $-\infty$ |                  |              |

#### 4.4 その他の公式

ここでは多項式の分数以外の極限について触れておきます。前節で  $x \rightarrow a$  については説明しましたので、 $n \rightarrow \pm\infty$  の場合について見てみましょう。まず、指数について以下の極限を見て下さい。 $a$  を限りなく掛け算することを考えると、この関係が成り立つことは直感的に理解できると思います。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq a < 1 \\ 1 & a = 1 \\ \infty & a > 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

指数  $a^n$  とべき乗  $n^b$  との関係は、べき乗の次数  $b$  がいくら大きくても、指数の発散の方が勝ります。それゆえ比を取ると以下のようにになります。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \quad (a > 1) \quad (4.2)$$

また、対数  $\log_a n$  とべき乗  $n^b$  との関係はべき乗の次数  $b$  がいくら 0 に近くても、べき乗の発散の方が勝ります。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^b} = 0 \quad (a > 1, b > 0) \quad (4.3)$$

以上の関係は応用分野でよく利用されます。

次は後に述べる微分で利用される重要な関係です。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \quad (4.4)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^a$  は  $a$  の値に関わらず 1 に収束しますが、 $a$  が  $n$  に依存する場合は事情が違い、 $a = n$  の場合は 1 と異なるある数  $e$  に収束します。この数をネイピア(Napier)の数と言い、そ

の値は  $e=2.71828\cdots$  という無理数になります。この数を用いた  $y=e^x$  という指数関数は数学の応用分野で最も良く使われる関数のひとつです。また、この関係は  $n$  が実数の場合にも成り立つことが知られています。

次は三角関数を利用した関係です。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (4.5)$$

$x$  と  $\sin x$  はともに  $0$  になりますが、上のように組み合わせると  $1$  に収束します。これは、 $\sin x$  の微分を求める際に使われる非常に重要な関係です。

さて、これらの関係を用いた例をいくつか見てみます。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

この関係は  $x$  の正負に関わらず成り立ちます。以下にその理由を見てみましょう。

$x=0$  の場合は明らかに両辺が  $1$  になるので、 $x>0$  の場合について、 $n' = n/x$  とおくと以下のように示されます。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n' \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n'}\right)^{n'x} = \lim_{n' \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n'}\right)^{n'}\right]^x = e^x$$

また、 $x<0$  の場合は  $n' = -n/x$  とおいて以下のようになります。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n' \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n'}\right)^{n'(-x)} = \lim_{n' \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n'}\right)^{n'}\right]^{-x} = e^{-(-x)} = e^x$$

次は三角関数の関係を用いた応用例を見てみましょう。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$$

$a=0$  の場合は両辺が  $0$  になって当然成り立ちますが、 $a \neq 0$  の場合、この関係は以下のように示されます。ここに、最初の等号は  $x' = ax$  とおいています。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x' \rightarrow 0} \frac{\sin x'}{x'/a} = \lim_{x' \rightarrow 0} a \frac{\sin x'}{x'} = a$$

## 問題

以下の極限を求めよ。

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 3n + 1}{2^n}$

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 2^x}{3^x - 2^x}$

3)  $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  (ヒント  $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ )

## 解答

1)  $0$

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 2^x}{3^x - 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + (2/3)^x}{1 - (2/3)^x} = 1$

$$3) \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n' \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n'}\right)^{-n'} = (e^{-1})^{-1} = e$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x' \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x'}{4x'^2} = \frac{1}{2}$$