5.8 極大値と極小値

これまで微分の方法を学んできましたが、なぜ微分が大切なのか考えてみましょう。関数の性質で最も重要なものは、どこでその関数が最大や最小となるかということです。例えば、経済や経営に関しては、経費を表わす関数ではそれが最小になるように、利益を表わす関数ではそれが最大になるようにと考えるのが自然の考えです。図 5-5 を見て下さい。関数 $y = f(x)$ の y の値は x の増加に連れ、増加したり、減少したりしています。増加が減少に転ずるところを極大、減少が増加に転ずるところを極小、それらの y 座標値をそれぞれ極大値、極小値（これらを総称して極値）と言いますが、最大や最小を求めるにはこれらの極大値や極小値を調べる必要があります。例えばある範囲 $0 \le x \le 1$ における最大値を求めるには、境界における関数の値 $f(0)$，$f(1)$ とその範囲内の極大値とを比べる必要があります。例えば図 5-5 においては境界での値よりは極大値の方が大きく、最大値は極大値になっています。

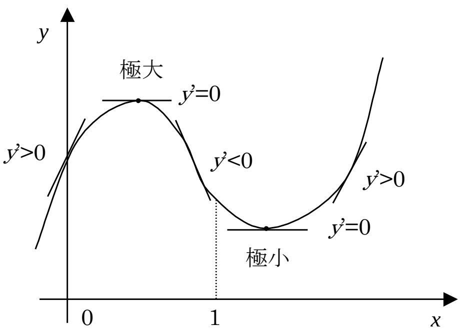


図 5-5 極大と極小

それではこれらの極大値や極小値を求めるにはどうすれば良いでしょうか。ここで微分の定義を思い出して下さい。即ち、微分とは接線の傾きであるということです。接線の傾きは関数が増加している場合には正、減少している場合には負です。つまり、微分した値の正負により関数の増減は判断できます。それでは極大や極小の位置での微分の値はいくらでしょうか。増加と減少の境界ですから、その値は 0 になります。図 5-5 の接線の傾きを見て下さい。0 になっていることが分かると思います。以下では具体的に関数の極値を求めてみましょう。

最初は $y = x^2 - 2x - 3$ の極値を求めてみます。極値を求めるには、その微分が 0 という性質を利用します。

$$y' = 2x - 2 = 2(x-1) = 0$$

これから、$x = 1$ という解を得ます。これで、極大または極小の x 座標が 1 であることが分かりましたが、それが極大であるのか、極小であるのか、一般にこれだけでは判断が付きかねます。そこでよく利用されるのが、関数増減表です。これは、以下のような書式で描かれます。

関数増減表

x		1	
y'	－	0	＋
y	↘	-4	↗
		極小	

まず、1 行目は領域を区切って、$y'=0$ となる x 座標の値を書き込みます。ここでは、1 です。次に、2 行目にはその時の微分 y' の値を書きます。$x=1$ のところは $y'=0$ ですからもちろん 0 ですが、この点以外の x の領域で、y' の正負を調べ、それに応じて＋か－の記号を書き加えます。これで関数の増減は分かるようになります。最後に y 座標の値を書き、その他の領域では関数の増減を、減少なら↘の記号で、増加なら、↗ の記号で表わして書き込みます。これで、視覚的に増減がはっきりしましたので、極小値か極大値か判断できるようになります。関数増減表の極値の下に極大か極小か書き込んでおきましょう。ここの場合は極小です。解答は以下のように書くとよいでしょう。

$x=1$ のとき、極小値 -4　　または、　　極小　(1,-4)

この結果は、3 章の 2 次関数のところで述べた式の変形 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ を用いて、頂点の座標は (1,-4) であるとする結果と一致しています。

2 次関数の場合、頂点の座標を求めるために特に微分を使う必要はないのですが、3 次以上の次数の曲線になると微分は不可欠です。そこで例として、$y=x^3-6x^2+9x$ の極値を求めてみます。

最初にこの関数を微分して以下の結果を得ます。

$$y'=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$$
$$=3(x-1)(x-3)=0$$

解　$x=1$ または $x=3$

この解が極大であるか極小であるか調べるために関数増減表を描いてみます。この場合、x 座標の値は 2 箇所になります。

関数増減表

x		1		3	
y'	+	0	－	0	+
y	↗	4	↘	0	↗
		極大		極小	

微分 y' の符号は増減表のようになり、関数の増減が決まります。これによって、以下の結果を得ます。

$x=1$ のとき極大値 4　　（極大　(1,4)）

$x=3$ のとき極小値 0　　（極小　(3,0)）

さてこれまでの話では $y'=0$ の点は極大か極小かのどちらかのような印象を持たれそうですが、どちらでもない場合もあります。例えば、$y=x^3$ について考えてみます。$y'=3x^2$ より $x=0$ のところで $y'=0$ ですが、その他のところでは $y'>0$ となっており、増加関数です。また実際のグラフで見ると図 5-6 のようになっており、$x=0$ で接線の傾きが 0 というだけで極小でも極大でもないことが分かります。

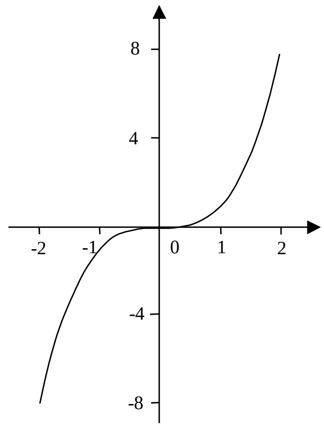


図 5-6 $y=x^3$ のグラフ

5.9 2階微分と変曲点

前節まででで曲線の極大と極小を求める方法が分かりましたが、具体的にグラフを描こうとすると、曲線の増加、減少だけでなく、その曲がり方も必要になります。そこで、ここではグラフの曲がり方に関連する 2 階微分について考えてみます。

2 階微分とは、1 度微分した後、もう 1 度微分することです。2 階微分に対して最初の微分のことを 1 階微分と言うこともあります。例を見てみましょう。

1 階微分　$y=x^3+3x^2-9x-4 \rightarrow \dfrac{dy}{dx}=y'=3x^2+6x-9$

2 階微分　$\dfrac{dy}{dx}=y'=3x^2+6x-9 \rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=y''=6x+6$

ここで、2 階微分を表わすには、以下のような表記法があります。

$$y=f(x) \text{ に対して} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}f(x)=y''=f''(x)$$

2 階以上の微分もありますので、一般の n 階微分についてその表記法も示しておきましょう。

$$y=f(x) \text{ に対して} \qquad \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}f(x)=y^{(n)}=f^{(n)}(x)$$

n 階微分と言っても、微分を n 回繰り返すだけですから、計算量は増えるとしても、特に難しいものではありません。

さて、ではなぜこの 2 階微分が曲線の曲がり方と関係あるのでしょうか。微分は接線の傾き、即ち関数の増減を表わすと言いましたが、図 5-7 を見て下さい。左側の図では、x の値が増大するにつれて接線の傾きは増大していますが、右側の図では、接線の傾きは逆に減少しています。つまり、接線の傾きについて言えば、左は増加関数、右は減少関数となります。即ち、接線の傾きを表わす関数を微分すると、左は正、右は負の値が得られます。接線の傾きを表わす関数とは、元の関数の微分ですから、左の図は 2 階微分が正、右の図は 2 階微分が負になっています。

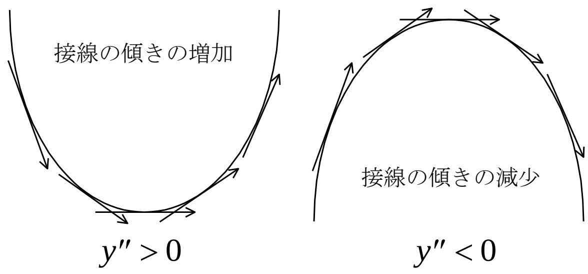


図 5-7 曲線の湾曲と 2 階微分

即ち、左のような下に凸のグラフでは 2 階微分が正、右のような上に凸のグラフでは 2 階微分が負になります。

さて、図 5-8 のように上に凸と下に凸の曲線が混在する場合、その境界には曲線の曲がり方が変わる点が存在します。この点は変曲点と呼ばれ、そこでは $y''=0$ となっています。

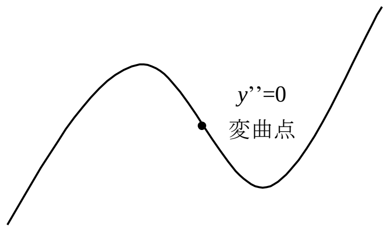


図 5-8 変曲点

例として関数 $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 4$ の変曲点を求めてみましょう。

1 階微分して、$y' = 3x^2 + 6x - 9$

2 階微分して、$y'' = 6x + 6 = 0$

これより、$x = -1$, $y = 7$ が変曲点となります。表記法としては、変曲点 $(-1,7)$ と書いてもよいでしょう。

ここでは曲線の曲がり方についても検討をしてみます。以下のような表を作ると、曲がり方は明らかです。

x		-1	
y''	−	0	＋
y	上に凸	7	下に凸

5.10 グラフの概形

準備が整いましたので、これまでの応用として、微分を用いて実際にグラフを描いて見ましょう。ここでは実際に解く場合の手順を示し、必要に応じて解説を加えます。

例 1

$y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ のグラフの概形を描け

y 軸との交点を求める。

$x = 0$ とおいて　$y = -3$

x 軸との交点を求める。

$y=0$ とおいて　$y=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$　よって、$x=-1,3$

無限遠でのふるまいを調べる。

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

極値を求める。

$y'=2x-2=2(x-1)=0$　よって、$x=1$

$x=1$ のとき $y=-4$

関数増減表を描く。

x		1	
y'	－	0	＋
y	↘	-4	↗

極小

$x=1$ のとき極小値 -4　　（極小　$(1,-4)$）

変曲点を求める。

$y''=2>0$ より、変曲点は存在しない。

グラフの概形を描く。

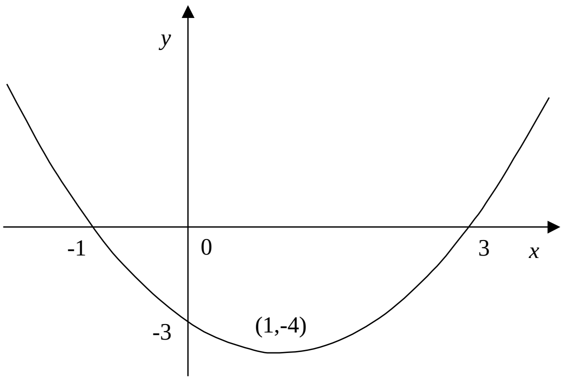


図 5-9　$y=x^2-2x-3$ のグラフ

例２

$y=x^3-6x^2+9x$　のグラフの概形を描け。

y 軸との交点を求める。

$x=0$ とおいて　$y=0$

x 軸との交点を求める。

$y=0$ とおいて　$y=x^3-6x^2+9x=x(x-3)^2$　よって、$x=0,3$

無限遠でのふるまいを調べる。

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

極値を求める。

$$y'=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$$
$$=3(x-1)(x-3)=0$$

$x=1$のとき$y=4$， $x=3$のとき$y=0$

関数増減表を描く。

x		1		3	
y'	+	0	ー	0	+
y	↗	4	↘	0	↗
		極大		極小	

$x=1$のとき極大値 4　　　（極大　(1, 4)）

$x=3$のとき極小値 0　　　（極小　(3, 0)）

変曲点を求める。

$y''=6x-12=6(x-2)=0$　　よって、$x=2$

$x=2$のとき　$y=2$　（変曲点　(2, 2)）

グラフの概形を描く。

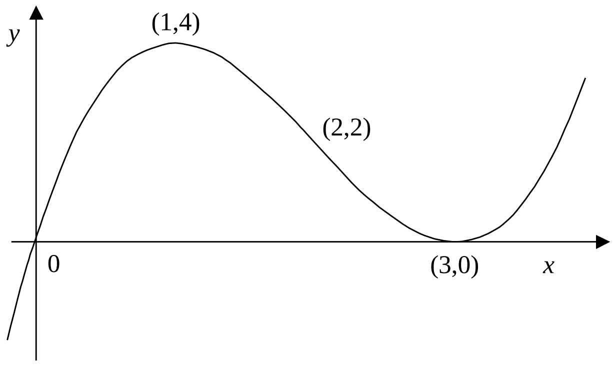


図 5-10　$y=x^3-6x^2-9x$のグラフ

問題

以下のグラフの概形を描け。

1) $y=-x^2+6x+3$　　2) $y=x^4-2x^2+1$

3) $y=e^x-x$　　4) $y=e^{-x^2}$

解答

1) $y=-x^2+6x+3$

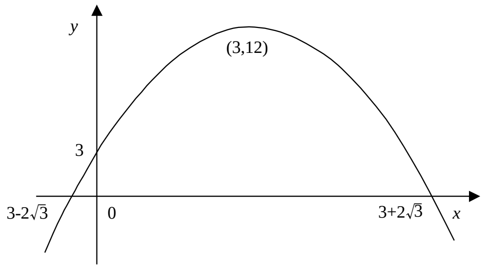
y軸との交点　$y=3$

x軸との交点　$x=3\pm2\sqrt{3}$

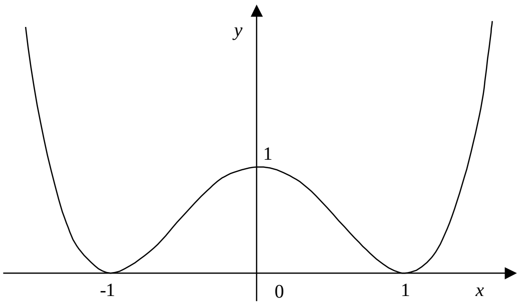
極大点　(3, 12)

極小点　なし

変曲点　なし



2) $y = x^4 - 2x^2 + 1$



y 軸との交点　$y = 1$

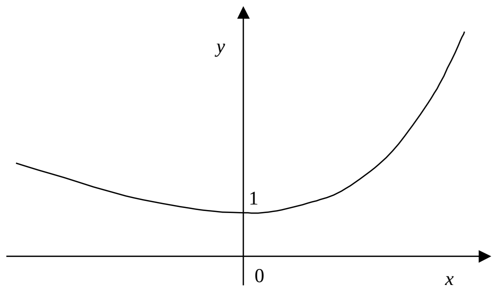
x 軸との交点　$x = \pm 1$

極大点　(0, 1)

極小点　(-1, 0), (1, 0)

変曲点　$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right)$

3) $y = e^x - x$



y 軸との交点　$y = 1$

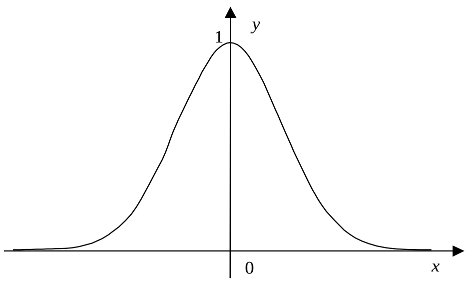
x 軸との交点　なし

極大点　なし

極小点　(0, 1)

変曲点　なし

4) $y = e^{-x^2}$



y 軸との交点　$y = 1$

x 軸との交点　なし

極大点　(0, 1)

極小点　なし

変曲点　$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

5.11 テイラー展開

最後に、計算機などで関数の値を計算するときなどに利用される重要な公式について説明しておきます。例えば計算機のプログラムで $y = \sin x$ の値を求めようとするとき、通常その値はプログラム言語の関数機能を利用します。しかしその関数機能はどうやって作られているのでしょうか。計算機で関数機能を用いずに計算できるものは x のべき乗だけです。そこでこれらの関数を x の n 次関数として近似できれば、計算の道が開けます。これを可能にするのがテイラー(Taylor)展開または、その特殊形であるマクローリン(Maclaurin)展開です。

テイラー展開とは、関数 $f(x)$ が無限回微分可能（C^∞ クラス）ならば、以下のような展開が出来る、という定理です。

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \tag{5.10}$$

ここに、$f^{(n)}(a)$ は関数 $f(x)$ を n 回微分したものに $x=a$ の値を代入したものです。それ故、a として予め計算の明らかな値を選んでおけば、右辺は $(x-a)$ のべき乗の式になります。しかも、$f^{(n)}(a)$ が有限で $|x-a|$ が大きくなければ比較的小さな n で数列を打ち切っても十分な精度で近似が成り立つことが知られています。

特に $a=0$ とおいた場合、この展開は特別にマクローリン展開と呼ばれています。

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \tag{5.11}$$

マクローリン展開は $e^x, \sin x, \cos x$ 等の値を求めるには非常に有効です。さて、以下では特にマクローリン展開について実際にやってみることにしましょう。

$y=e^x$ について

実際に微分すると、

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$$

であることが分かります。この関数に $x=0$ を代入して、以下を得ます。

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

これを用いると以下のような展開が得られます。

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$$

$y=\sqrt{1+x}$ について

この例では一般的な n 階微分は少し求めにくいので、近似は 3 階微分までとしておきましょう。

$$f(x)=(1+x)^{1/2}, \quad f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, \quad f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}, \quad \cdots$$

これに $x=0$ を代入し、以下を得ます。

$$f(0)=1, \quad f'(0)=\frac{1}{2}, \quad f''(0)=-\frac{1}{4}, \quad f'''(0)=\frac{3}{8}, \quad \cdots$$

この値を用いて、展開式を書くと以下となります。

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}&=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2!}x^2+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}x^3+\cdots\\&=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots\end{aligned}$$

問題

以下の展開式を導け。

1) $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$

4) $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1} \frac{x^i}{i}$

解答

具体的にやってみるしかないので省略します。

1), 2), 3) の展開から、

$$x \approx 0 \text{ のとき、} (1+x)^a \approx 1 + ax, \quad \sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$$

と近似されますが、これらは自然科学の分野では非常によく利用される近似式です。