

# College Analysis による物理シミュレーション2

## － 電荷と電場・電流と磁場 －

福井正康

福山平成大学経営学部経営学科

### 概要

我々は社会システム分析に用いられる様々な手法を統合化したプログラム College Analysis を作成し、その中のグラフィック機能を利用して物理シミュレーションのプログラムを開発している。今回は、静止電荷による静電場と定常電流による静磁場のプログラムを紹介する。静電場のプログラムでは電場、電気力線、ポテンシャルの厳密計算に加えて、ツリー法や高速多重極展開法のプログラムも加えた。また、磁場のプログラムでは、磁力線などの計算の他に、磁場の中での荷電粒子の運動のシミュレーションを行っている。

### キーワード

College Analysis, 物理, シミュレーション, 電磁気学, 静電場, 静磁場, ツリー法, 高速多重極展開法

URL: <http://www.heisei-u.ac.jp/ba/fukui/>

## 1. はじめに

これまで、社会システム分析ソフトウェア College Analysisにおいて、統計学、経営科学、意思決定手法などを中心にプログラムを作成してきたが、我々は College Analysis のグラフィック機能に注目し、教育・科学の分野で物理シミュレーションのプログラムを作成して行くことを決めた。その際、3次元での表示を心掛けることと簡易言語を用いてできるだけ汎用的に環境も含めて表現することを目指した。今回は、静止電荷が作る静電場と定常電流が作る静磁場についてのプログラムを紹介する。

静止電荷が作る電場のプログラムは、グリッドエディタに電荷のデータを与えて、空間中の電気力線や電場の向き、等電位面を描画する機能を持つ。電気力線の描画は少数の電荷の場合に限られるが、等電位面の描画では、今後の発展の可能性を考えて、数万個程度の電荷までを扱えるようにする。そのため、ツリー法や高速多重極展開法 (FMM) のアルゴリズムをプログラム化しておくことにした。これらのアルゴリズムは問題の規模や精度に応じて、領域の分割数や多重極展開や局所展開の次数などを調整する必要がある。そのため、これらの設定を変えられるようにして、計算時間や精度を比べられるようにしている。

定常電流による磁場は、理論的に複雑なものは用いておらず、単純に Biot-Savart の法則を用いて磁力線を描いているが、特徴は磁場を作る電流の形状をパラメータ関数を用いて表現し、描画できるところにある。ここではコイルなども簡単に表現でき、3次元空間に描画される。さらに、磁場の中の荷電粒子の運動は直感的に考えにくいので、これについてもシミュレーションを行えるようになっている。例えば地球磁場が太陽からの荷電粒子を防いでいる様子なども簡単なモデルにして見ることができる。

## 2. 電荷と電場

今回の物理シミュレーションでは、静止点電荷からの電気力線、空間中の電場の向き、等電位面の描画を取り上げる。電気力線は、電荷の近傍でクーロン力を計算し、電場の向きを繋いで行く。空間中の電場の向きは、空間の指定点での電場の向きを矢印で表わす。その際、上限は付けるが、矢印の長さで相対的な電場の強さを近似的に表現する。等電位面の描画は、直接クーロンポテンシャルを計算する方法の他に、多重極展開を用いた電荷から遠方での近似法も加えた。さらにこの多重極展開法を拡張したツリー法や高速多重極展開法のアルゴリズムをプログラムに組み込んだ。

この章では、最初に点電荷からの電場とポテンシャルについての理論を与える。次に、ツリー法や高速多重極展開法の理論についても解説する。その後、実行メニューに従って、プログラムの利用法を説明する。

## 2.1 静止電荷と電場の理論

電荷分布  $\rho(\mathbf{r}')$  [C/m<sup>3</sup>] や点電荷  $q_i$  [C] からの真空中の電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  [V/m] は以下のように計算される。

電荷分布の場合

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'$$

点電荷の場合 (このプログラムの場合)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

ここに  $\epsilon_0 = 8.854188 \times 10^{-12}$  [F/m] は真空の誘電率である。電気力線と電場はこの関係を用いて計算する。また、等電位面を計算する際の厳密な電位  $V(\mathbf{r})$  [V] は以下のように計算される。

電荷分布の場合

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

点電荷の場合

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

また電荷分布  $\rho(\mathbf{r}')$  の作るポテンシャルは、以下のように多重極展開や局所展開の式を用いて近似的に表される ( $l$  を有限で計算した場合)。今回我々は上側の定義に基づいてプログラムを作成しているが、下側 (括弧内) の定義が示されている教科書もある。

$\mathbf{r} > \mathbf{r}'$  のとき (多重極展開)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{M_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (1)$$

$$\left( V(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{M_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \right)$$

ここに、 $M_{l,m}$  は  $2^l$  重極子 ( $2^l$  重極モーメント) と呼ばれ、以下のように定義される。

電荷分布の場合

$$M_{l,m} = \int \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{l,m}^*(\theta', \phi') d\mathbf{r}'$$

点電荷の場合

$$M_{l,m} = \sum_{i=0}^n q(r_i) r_i^l Y_{l,m}^*(\theta_i, \phi_i) \quad (2)$$

$r < r'$  のとき (局所展開)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l L_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \varphi) r^l$$

$$\left( V(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} L_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \varphi) r^l \right)$$

ここに、 $L_{l,m}$  は局所展開係数と呼ばれ、以下のように定義される。

電荷分布の場合

$$L_{l,m} = \int \rho(\mathbf{r}') r'^{-(l+1)} Y_{l,m}^*(\theta', \varphi') d\nu'$$

点電荷の場合

$$L_{l,m} = \sum_{i=0}^n q(r_i) r_i^{-(l+1)} Y_{l,m}^*(\theta_i, \varphi_i)$$

$Y_{l,m}(\theta, \varphi)$  は球面調和関数で、 $Y_{l,m}^*(\theta, \varphi)$  はその複素共役である。今回は上側の定義に基づいている。

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

$$\left( Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \right)$$

ここに、 $m < 0$  に対しては以下の式が成り立つ。

$$Y_{l,-|m|}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,|m|}^*(\theta, \varphi)$$

また、 $P_l^m(x)$  は Legendre の陪多項式で、 $m \geq 0$  に対して以下のように定義される。

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

ここに、 $P_l(x)$  は Legendre の多項式である。

Legendre の陪多項式の計算には、以下の関係式を用いる。

$$P_m^m = (-1)^m (2m-1)!! (1-x^2)^{m/2}$$

$$(l-m)P_l^m = x(2l-1)P_{l-1}^m - (l+m-1)P_{l-2}^m$$

但し、 $P_{m-1}^m = 0$  である。

## 2.2 ツリー法と高速多重極展開法

電気力のポテンシャル計算において、電荷数が多くなると、1箇所での電位計算はその数に比例して時間がかかる。これに対して、近傍からの電位は直接計算し、遠方からの電位はまとめて多重極展開や局所展開を用いて計算し、計算時間の短縮化を図る方法が、ツリー法や高速多重極展開法である。

ここではこれらについてその詳細を参考文献 1), 2) に習って説明する。

### ツリー法

まず、電荷分布の領域を座標軸ごとに  $d$  分割（このプログラムでは  $d = 2$  または  $d = 3$  としている）する。これにより、3 次元空間を  $d^3$  分割することになるが、その中の 1 つの領域を第 1 階層のセルと呼ぶ。その第 1 階層のセルをさらに  $d^3$  分割し、その中の 1 つの領域を第 2 階層のセルと呼ぶ。第 2 階層のセルは  $d^6$  個になる。これを繰り返して、第  $n$  階層まで進める（このプログラムでは、第 4 階層まで想定している）。

第  $n$  階層の各セルの座標の中心を展開の中心として、そのセル内の電荷による多重極子を(2)式によって計算する。次に第  $n - 1$  階層の各セル内で同様に多重極子を計算するが、直接計算は時間がかかるので、第  $n - 1$  階層のセルに含まれる  $d^3$  個の第  $n$  階層のセルから、多重極子の中心の移動公式を用いて計算する。その方法を以下に示す。

今、第  $i$  階層のセル A の中心  $O'$  にある多重極子をそのセルを含む第  $i - 1$  階層のセル B の中心  $O$  に移動させる問題を考える。セル B の中心  $O$  から、セル A の中心  $O'$  までのベクトルを極座標で  $\rho = (\rho, \alpha, \beta)$  と表す。また、 $O$  から電位を求める位置  $Q$  までのベクトルを極座標で  $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$  、 $O'$  から  $Q$  までのベクトルを極座標で  $\mathbf{r}' = (r', \theta', \varphi')$  とする。但し、 $\rho \ll r, r'$  とする。これを図で表わすと図 2.1 のようになる。

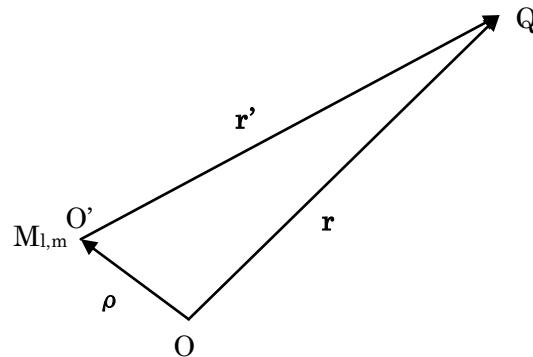


図 2.1 M(i)2M(i-1)

第  $i$  階層の中心にある多重極子が点  $Q$  の位置に作るポテンシャルは多重極展開によって以下のように書かれる。

$$V(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p \frac{M_{p,q} Y_{p,q}(\theta', \varphi')}{r'^{p+1}}$$

この  $Y_{p,q}(\theta', \varphi')/r'^{p+1}$  に対して、球面調和関数の変換公式 (4) を代入する。

$$\frac{Y_{p,q}(\theta', \varphi')}{r'^{p+1}} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=-r}^r \frac{J_s^q A_r^s A_p^q \rho^r Y_{r,-s}(\alpha, \beta)}{A_{r+p}^{s+q}} \frac{Y_{r+p,s+q}(\theta, \varphi)}{r^{r+p+1}} \quad (4)$$

ここに、

$$J_s^q = i^{|q+s|-|q|-|s|} = \begin{cases} (-1)^{\min(|q|, |s|)} & \text{if } q \cdot s < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A_p^q = \begin{cases} \frac{(-1)^p}{\sqrt{(p-q)!(p+q)!}} & \text{if } p \geq q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

その後、 $j \equiv r+p$ ,  $k \equiv s+q$ ,  $l \equiv r$ ,  $m \equiv s$  とすると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p \sum_{r=0}^p \sum_{s=-r}^r \frac{M_{p,q} J_s^q A_r^s A_p^q \rho^r Y_{r,-s}(\alpha, \beta)}{A_{r+p}^{m+q}} \frac{Y_{r+p,s+q}(\theta, \varphi)}{r^{r+p+1}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j \sum_{l=0}^j \sum_{m=-l}^l \frac{M_{j-l,k-m} J_m^{k-m} A_l^m A_{j-l}^{k-m} \rho^l Y_{l,-m}(\alpha, \beta)}{A_j^k} \frac{Y_{j,k}(\theta, \varphi)}{r^{j+1}} \end{aligned}$$

ここで、新しく

$$M'_{j,k} \equiv \sum_{l=0}^j \sum_{m=-l}^l \frac{M_{j-l,k-m} J_m^{k-m} A_l^m A_{j-l}^{k-m} \rho^l Y_{l,-m}(\alpha, \beta)}{A_j^k} \quad (5)$$

と定義すると、ポテンシャルは新たに定義された多重極子  $M'_{j,k}$  を用いて、以下のように書かれる。

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j \frac{M'_{j,k} Y_{j,k}(\theta, \varphi)}{r^{j+1}}$$

これにより、多重極展開の展開の中心が変更されたことになり、その際、多重極子は (5) 式のように変換されることが分かった。このように第  $i$  階層の多重極子をまとめて第  $i-1$  階層の多重極子にする処理を慣例により  $M(i)2M(i-1)$  と表す。ここで、多重極子の次数は理論的には  $\infty$  までとなっているが、現実の計算では、ある次数まで（例えば  $j \leq 3$ ）の計算で打ち切ることになる。

以上により、第  $n$  階層のセルの中心にある多重極子をそのセルを含む第  $n-1$  階層のセルの中心に移動させることができるようになった。この方法を利用して、さらに第  $n-1$  階層のセルの中心にある多重極子をそのセルを含む第  $n-2$  階層のセルの中心へ移動させ、これを繰り返して、第 1 階層の  $d^3$  個のセルまで続ける。これらの多重極子を用いて遠距離への効果をまとめて扱うようとする。

ツリー法は、ある位置でのポテンシャルを、近距離では厳密に、それより遠い所では第  $n$  階層のセルの中心にある多重極子を使って、さらに遠い所では、第  $n-1$  階層のセルの中心にある多重極子を使って、というように、距離によって階層別に計算し、それを足し合わせて求める。このプログラムでは、基本的な距離を第  $n$  階層のセルの対角長とし、電位を求める点と各階層のセルの中心との距離が、その何倍以上かでどの階層の多重極子を使うかを決められるようになっている。精度と実

行速度を秤にかけて、データ数に応じて、セルの階層、分割数、多重極展開の次数、距離を決めるパラメータなどを効果的に決めて行く必要がある。

### 高速多重極展開法

高速多重極展開法はツリー法をさらに進めた方法である。ツリー法において、ある点でのポテンシャルは、直接計算と距離による様々な階層の多重極子からの寄与の合計で与えられるが、これらは1つの位置につき、その都度計算を実行する必要があった。高速多重極展開法は、最初にこの複数の階層の多重極子からの寄与を第  $n$  階層の各セルの中心に集約しておく、その後の各点でのポテンシャル計算は、直接計算とその点が含まれる第  $n$  階層のセルの中心にある多重極子の寄与だけから計算する。これにより、多くの位置のポテンシャルを計算する場合は、ツリー法に比べ、計算効率がさらに向上する。但し、最初の集約段階でかなりの計算量を必要とするので、ポテンシャルを求める位置が少ない場合は、逆に効率が悪くなる。我々のプログラムでは、位置の数が 10,000 点程度から効果が表れて来るようである。

高速多重極展開法では、多重極子の集約に局所展開の方法を用いるが、これには2通りの方法が考えられる。遠方の多重極子を、ポテンシャルを調べる位置の第  $n$  階層のセルの中心に直接局所展開する方法と、遠方の多重極子が含まれる階層と調べる点が含まれる同じ階層のセルに一度局所展開し、さらに上の階層から順番に第  $n$  階層まで、局所展開を行う方法である。前者は局所展開が一度で済む分、計算精度の上で有利であるが、後者は、同じ階層のセルに局所展開する際、一度計算した値を記憶させておくことで計算時間の短縮を図れるという利点がある。我々のプログラムでは、この問題についても、どの程度時間短縮が図れるのか調べられるようになっている。

ここでは、第  $i$  階層のセル  $A$  の中心  $O'$  にある多重極子を遠く離れた第  $j$  階層のセル  $B$  (階層は同じでなくてもよい) の中心  $O$  に局所展開する問題を考える。セル  $B$  の中心  $O$  から、セル  $A$  の中心  $O'$  までのベクトルを極座標で  $\rho = (\rho, \alpha, \beta)$  と表す。また、 $O$  から電位を求める位置  $Q$  までのベクトルを極座標で  $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$  、 $O'$  から  $Q$  までのベクトルを極座標で  $\mathbf{r}' = (r', \theta', \varphi')$  とする。但し、この場合は、 $r \ll \rho, r'$  である。これを図で表わすと図 2.2 のようになる。

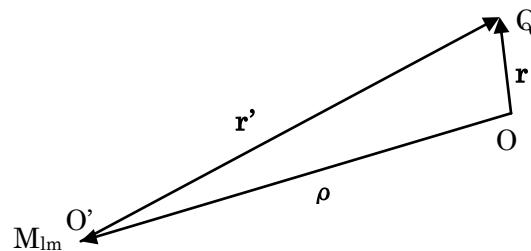


図 2.2  $M(i)2L(j)$

セル A の中心  $O'$  にある多重極子が点  $Q$  の位置に作るポテンシャルは多重極展開によって以下のように書かれる。

$$V(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p \frac{M_{p,q} Y_{p,q}(\theta', \varphi')}{r'^{p+1}}$$

この  $Y_{p,q}(\theta', \varphi')/r'^{p+1}$  に対して、球面調和関数の 2 番目の変換公式 (6) を代入する。

$$\frac{Y_{p,q}(\theta', \varphi')}{r'^{p+1}} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=-r}^r \frac{J_{p,s}^q A_r^s A_p^q Y_{p+r,q-s}(\alpha, \beta)}{A_{r+p}^{s-q} \rho^{r+p+1}} Y_{r,s}(\theta, \varphi) r^r \quad (6)$$

ここに、

$$J_{p,s}^q = (-1)^p i^{|s-q|-|s|-|q|} = \begin{cases} (-1)^p (-1)^{\min(|q|, |s|)} & \text{if } q \cdot s > 0 \\ (-1)^p & \text{otherwise} \end{cases}$$

その後、 $j \equiv r$ ,  $k \equiv s$ ,  $l \equiv p$ ,  $m \equiv q$  とすると、以下のようにになる。

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=-r}^r \frac{M_{p,q} J_{p,s}^q A_r^s A_p^q Y_{p+r,q-s}(\alpha, \beta)}{A_{r+p}^{s-q} \rho^{r+p+1}} Y_{r,s}(\theta, \varphi) r^r \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{M_{l,m} J_{l,k}^m A_j^k A_l^m Y_{l+j,m-k}(\alpha, \beta)}{A_{j+l}^{k-m} \rho^{j+l+1}} Y_{j,k}(\theta, \varphi) r^j \end{aligned}$$

ここで、新しく

$$L_{j,k} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{M_{l,m} J_{l,k}^m A_j^k A_l^m Y_{l+j,m-k}(\alpha, \beta)}{A_{j+l}^{k-m} \rho^{j+l+1}} \quad (7)$$

と定義すると、ポテンシャルは新たに定義された局所展開係数  $L_{j,k}$  を用いて、以下のように書かれる。

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j L_{j,k} Y_{j,k}(\theta, \varphi) r^j$$

この展開を慣例として  $M(i)2L(j)$  と呼ぶ。

上の局所展開が同階層で行われた場合、階層間の局所展開を続けて行う。その理論を説明しておく。ここでは、第  $i$  階層のセル A の中心  $O'$  にある多重極子をそれに含まれる第  $i+1$  階層のセル B の中心  $O$  に局所展開する問題を考える。セル B の中心  $O$  から、セル A の中心  $O'$  までのベクトルを極座標で  $\rho = (\rho, \alpha, \beta)$  と表す。また、 $O$  から電位を求める位置  $Q$  までのベクトルを極座標で  $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$  、 $O'$  から  $Q$  までのベクトルを極座標で  $\mathbf{r}' = (r', \theta', \varphi')$  とする。但し、この場合は、セル A の中にセル B があるため、 $r < \rho, r'$  であるが、これまでのようには大きな差はない。そのため、局所展開の際の誤差は大きくなる。これを図で表わすと図 2.3 のようになる。

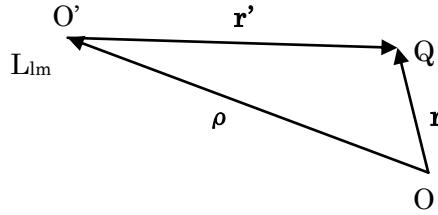


図 2.3  $L(i)2L(i+1)$

セルAの中心  $O'$  にある局所展開係数が点  $Q$  の位置に作るポテンシャルは局所展開によって以下のよう に書かれる。

$$V(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p L_{p,q} Y_{p,q}(\theta', \varphi') r'^p$$

この  $Y_{p,q}(\theta', \varphi')/r'^{p+1}$  に対して、球面調和関数の 3 番目の変換公式 (8) を代入する。

$$Y_{p,q}(\theta', \varphi') r'^p = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=-r}^r \frac{J'_{r,s} A_r^s A_{p-r}^{q-s} \rho^r Y_{r,s}(\alpha, \beta)}{A_p^q} Y_{p-r, q-s}(\theta, \varphi) r^{p-r} \quad (8)$$

ここに、

$$J'_{r,s} = (-1)^r i^{|q|-|s|-|q-s|} = \begin{cases} (-1)^r (-1)^s & \text{if } q \cdot s < 0 \\ (-1)^r (-1)^{q-s} & \text{if } q \cdot s \geq 0 \text{ and } |q| < |s| \\ (-1)^r & \text{otherwise} \end{cases}$$

その後、 $j \equiv p-r$ ,  $k \equiv q-s$ ,  $l \equiv p$ ,  $m \equiv q$  とすると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=-r}^r \frac{L_{p,q} J'_{r,s} A_r^s A_{p-r}^{q-s} \rho^r Y_{r,s}(\alpha, \beta)}{A_l^m} Y_{p-r, q-s}(\theta, \varphi) r^{p-r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j \sum_{l=j}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{L_{l,m} J'_{l-j, m-k} A_{l-j}^{m-k} A_j^k \rho^{l-j} Y_{l-j, m-k}(\alpha, \beta)}{A_l^m} Y_{j,k}(\theta, \varphi) r^j \end{aligned}$$

ここで、新しく

$$L'_{j,k} \equiv \sum_{l=j}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{L_{l,m} J'_{l-j, m-k} A_{l-j}^{m-k} A_j^k \rho^{l-j} Y_{l-j, m-k}(\alpha, \beta)}{A_l^m} \quad (9)$$

と定義すると、ポテンシャルは新たに定義された局所展開係数  $L'_{j,k}$  を用いて、以下のように書かれる。

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j L'_{j,k} Y_{j,k}(\theta, \varphi) r^j$$

展開の次数は  $\infty$  までになっているが、現実の計算ではある次数までとする。この展開を慣例として  $L(i)2L(i+1)$  と呼ぶ。

## 2.3 プログラムの利用法

メニュー [分析－教育・科学他－物理シミュレーション－電荷と電場] を選択すると、図 2.4 のような実行メニューが表示される。



図 2.4 電荷と電場実行メニュー

データの入力形式はグリッド入力で、「入力形式」ボタンをクリックすると図 2.5 のように例が表示される。

データ入力形式					
	電荷	X	Y	Z	
▶ 電荷1	1	5	0	0	
電荷2	-1	-5	0	0	

図 2.5 入力形式

これは、 $x = \pm 5 \text{ m}$  のところに、 $\pm 1 \times 10^{-6} \text{ C}$  の電荷がある例である。メニューの最下部に書いていくように、電荷の単位は、 $10^{-6} \text{ C}$  とする。

図 2.5 のような形にデータをグリッド入力し、描画範囲をすべての軸で-10 m から 10 m に設定し、「電気力線」ボタンをクリックすると、図 2.6 のような結果が表示される。電気力線は、出て行く（入って来る）本数だけが設定され、方向はプログラムで決まった設定による。

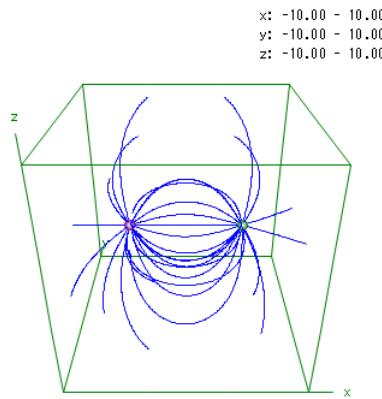


図 2.6 電気双極子の電気力線

電荷から出る（入る）電気力線の本数は、「単位電荷当」（ $10^{-6}$  C 当り）テキストボックスに入力する。図 2.4 のメニューでは、12 本に設定されており、正の電荷から 12 本出て、負の電荷に 12 本入っている。それぞれの電気力線は、異符号の電荷に入って終わるが、途中で描画範囲を超える場合は中断する。電気力線は「微小区間」の長さの線分を繋ぎ合わせて表示するが、繋いだ本数が、「最大連鎖」数を超える場合も中断する。必要な場合は、最大連鎖数を増やしてきれいな図を描くことができる。電荷の大きさは、「電荷半径」で指定することができる。色は正電荷が紫、負電荷が緑に設定されている。

図 2.7 に本数を 30 本に増やした例、図 2.8 に電気 8 重極子からの電気力線の例を示す。

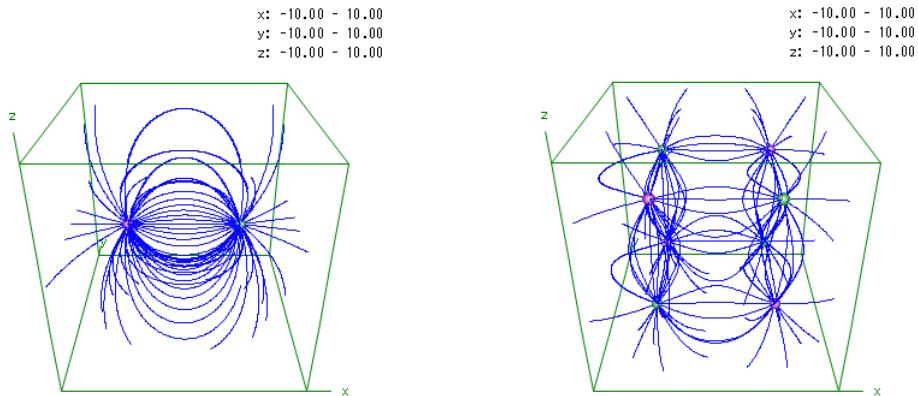


図 2.7 本数を増やした電気力線

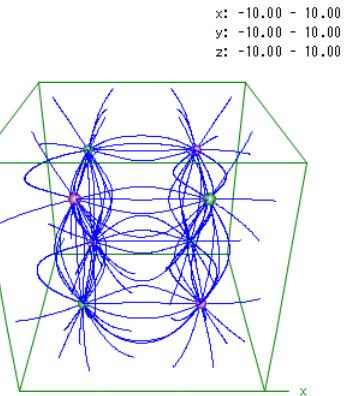


図 2.8 8 重極子からの電気力線

電気力線の他に、我々は空間中の電場を矢印で表現することにした。図 2.9 にその例を示す。矢印

の向きは電場の向き、長さは空間内の電場の強さに比例するようにし、平均+標準偏差の2倍以上を基準の長さ、-2倍以下を0になるように描画している。また、図2.9では、電場の矢印が重なって見にくいので、平面を切り出す機能も付けることにした。図2.10にその例を示す。この図は、描画範囲のy軸の幅を0にして、「電場表示」を「8,1,8」に設定して得られたものである。

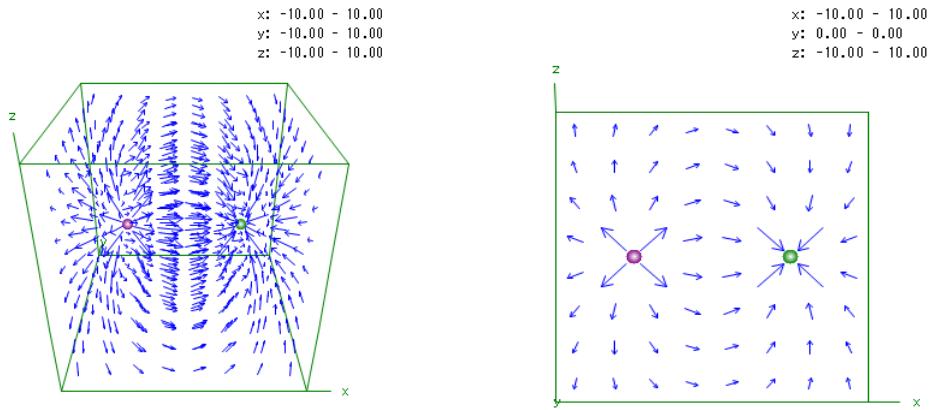


図 2.9 電場の向きと強さ

図 2.10 電場の平面表示

次に等電位面の描画について説明する。電荷量は  $10^{-6}$  C で位置を  $x = \pm 1\text{m}$  にする。等電位面を描くには、まず「端点電位」ボタンで、領域の端の電位を調べておく。図2.11に双極子の端点での電位を示す。

端点電位				
	電位	X	Y	Z
端点1	34.5164		-10	-10
端点2	34.5164		-10	10
端点3	34.5164		-10	10
端点4	34.5164		10	10
端点5	-34.5164		10	-10
端点6	-34.5164		10	10
端点7	-34.5164		10	-10
端点8	-34.5164		10	10

図 2.11 双極子の領域の端点での電位

等電位面は、「開始」電位、電位の「幅」、「枚数」を指定し、「等電位面」グループボックス内の「厳密計算」ボタンをクリックして描画する。図2.12に、範囲を各軸-10mから10mに設定した100Vの等電位面、図2.13に、-200V, -100V, 0V, 100V, 200Vの5枚の等電位面をまとめて示す。図2.13で中央の平面は0V等電位面である。ここで電荷半径は0.2に設定している。ここでは電位表示の「分割」が40のデフォルトの設定で、約64,000 ( $40^3$ )点の電位を調べ、それを用いて電位の等高線を描いている。

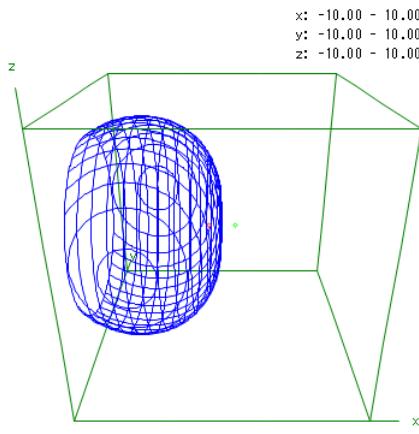


図 2.12 双極子からの 100V 等電位面

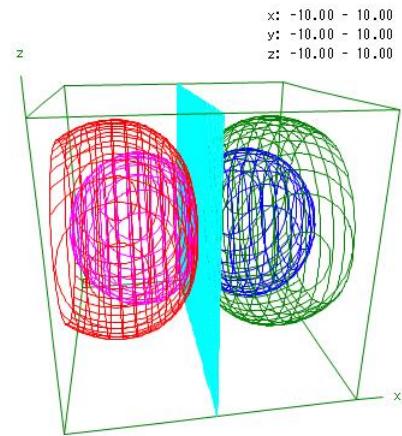


図 2.13 5 枚の等電位面

図 2.14 に  $y$  平面上の 4 重極子（電荷量は  $10^{-6}$  C で、位置は  $x, z = \pm 1\text{m}$ ）からの 50V 等電位面、図 2.15 に 8 重極子（電荷量は  $10^{-6}$  C で、位置は  $x, y, z = \pm 1\text{m}$ ）からの 10V 等電位面を示す。

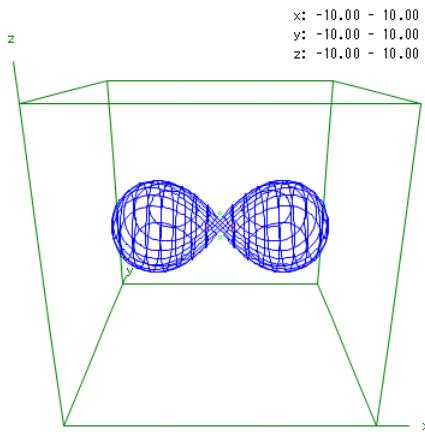


図 2.14 4 重極子からの 50V 等電位面

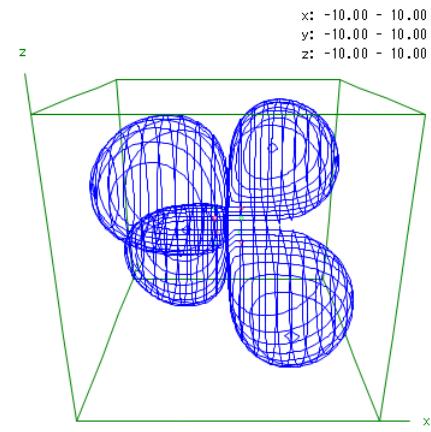


図 2.15 8 重極子からの 10V 等電位面

描画の精度は「分割」と「表示間隔」で与えられる。分割は、領域を分割して各点で電位を測る各軸の分割数、表示間隔は、分割をいくつ毎表示するかの間隔を表す。「分割」を 50、「表示間隔」を 1 にして、上と同じ図を図 2.16 と図 2.17 に描いておく。

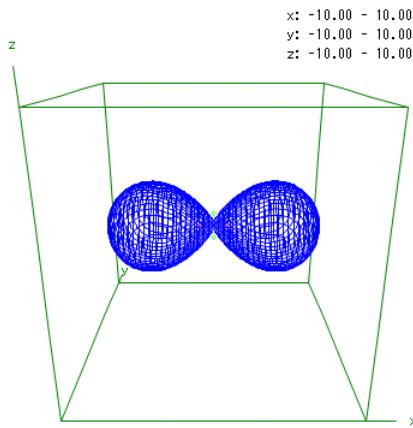


図 2.16 4 重極子からの等電位面詳細表示

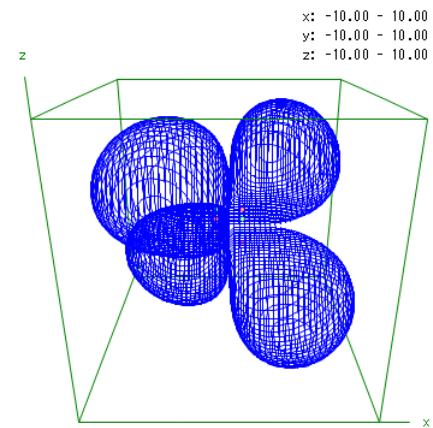


図 2.17 8 重極子からの等電位面詳細表示

次に、電荷から遠方の近似を与える多重極展開を用いた等電位面は、「多重極展開」ボタンをクリックすると得られる。その際、多重極展開の次数は「多重極次数」テキストボックスに入力する。図 2.18 に上で述べた双極子からの 3 次の多重極展開による 100V 等電位面を示す。図 2.19 に上で述べた 8 重極子からの 3 次の多重極展開による 10V 等電位面を示す。図 2.12 と図 2.15 と比べて良い近似になっていることが分かる。但し、この場合電荷数が少ないので、計算時間は直接計算の方がかなり速い。

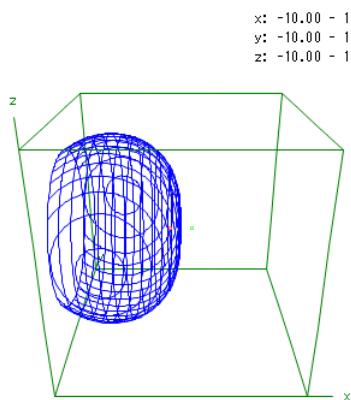


図 2.18 双極子からの 100V 等電位面

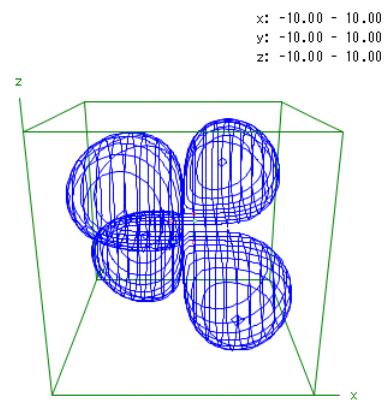


図 2.19 8 重極子からの 10V 等電位面

最後に、各軸とも -2m から 2m までの区間に分布する 1,000 個の電荷の場合について、厳密計算と多重極展開の近似との比較を行っておく。この電荷数では、多重極展開近似がかなり速くなる。図 2.20a に厳密計算の等電位面、図 2.20b に 3 次までの近似、図 2.20c に 2 次までの近似、図 2.20d に 1 次までの近似の等電位面を示す。遠方では 3 次までの近似で、比較的良好な結果が与えられる。

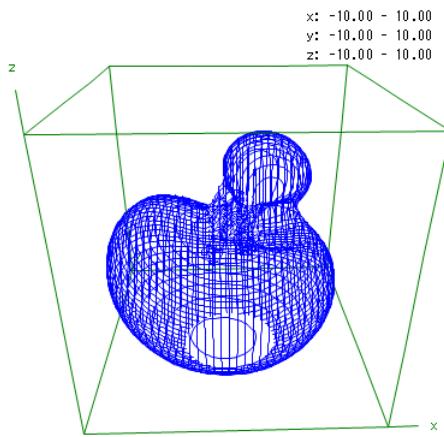


図 2.20a 厳密計算の等電位面

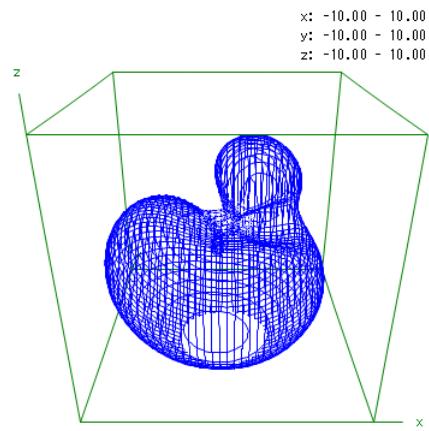


図 2.20b  $l \leq 3$  の多重極展開近似

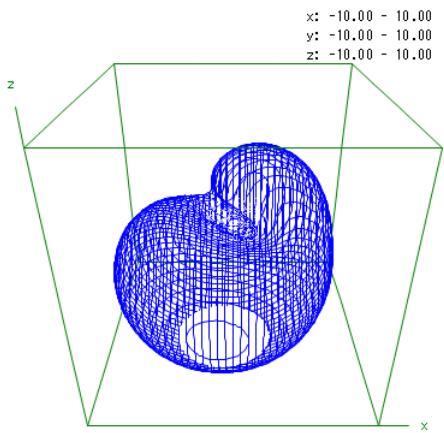


図 2.20c  $l \leq 2$  の多重極展開近似

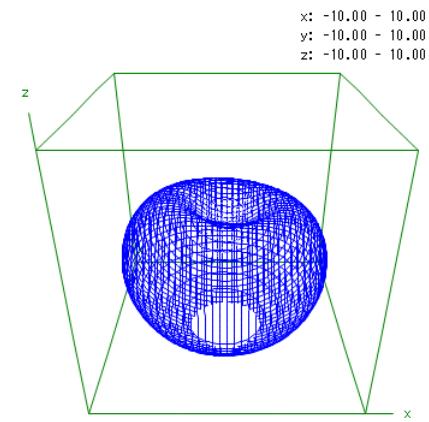


図 2.20d  $l \leq 1$  の多重極展開近似



図 2.21 ツリー法と高速多重極展開法実行画面

次に、ツリー法や高速多重極展開法（FMM）に関係する部分について説明するが、設定が複雑に

なるので、もう一度プログラム実行画面から、これらに関係のある部分を抜き出して、図 2.21 に示しておくる。

これまで述べて来た等電位面の描画は、デフォルトの設定で約 64,000 点のポテンシャルを求めて、描画するプログラムである。電荷の数が、1,000 点位までは厳密計算で対応可能であるが、10,000 点を超えると、時間がかかり、ツリー法や高速多重極展開法が有利になる。

図 2.21 のメニューで、「階層」はこれらの計算のセルの階層である。2 階層から 4 階層にまで対応している。「分割」は、1 つ上の階層のセルの軸をいくつに分割するかを決める。通常は 2 分割か 3 分割であるが、パソコンで取り扱う限り、4 階層 3 分割は計算時間が余計にかかるてしまい、現実的ではない。10,000 点で 3 階層 2 分割、100,000 点で 4 階層 2 分割当りが適当ではないかと思われる。

「多重極次数」はどの次数まで多重極展開や局所展開を考えるかを決める。「高速化」は、次数が 3 次まで球面調和関数の具体的な形を用い、 $M(i)2L(i)$  の上位 3 階層で計算結果を保存しておき、計算量を減らすように工夫する方法である。これによって、計算は 2 割程度高速化される。「近傍決定パラメータ」は、精度とスピードに大きく影響する。上位階層から見て行き、最下位階層のセルの対角長の何倍までその階層の多重極子の結果を用いるかを指定する。大きな値を用いるほど精度は上がるが、スピードは落ちる。

「M2M」は  $M(i)2M(i-1)$  の処理を行うか、直接電荷から多重極子を計算するかを決める。通常はチェックを入れて、多重極子の移動によって階層的に計算する方法を選んでおく。「L2L」は  $M2L$  の局所展開を同じ階層で行うか、直接下の階層で行うかを決める。チェックを入れると同じ階層で行い、 $L2L$  の処理を追加する。

通常は、図 2.21 の「ツリー法」や「FMM」（高速多重極展開）などのボタンで、等電位面が描かれるが、「電荷位置電位」をチェックすると、各電荷の位置の電位を表形式で表示する。計算精度を厳密計算と詳しく比較する場合に利用する。このプログラムでは処理時間の測定が重要なので、一番下に、画面表示などを除いた処理時間を表示するようにしている。

計算の例として、10,000 個の電荷が領域全体に分布している場合の約 64,000 点での電位の計算を 4 つの計算法で比較する。計算結果を図 2.22a～2.22d に 1 つの等電位面（この例では-50,000V）として与える。多重極展開は 3 次の多重極子まで求めているが、電荷から遠方での近似でしか利用できないため、結果は正しくない。ツリー法と高速多重極展開法では、ほぼデフォルトの設定で計算しているが、「多重極次数」を 2 次までとし、「高速化」の処理を行っている。この電荷数では、ツリー法と高速多重極展開法でさほど計算時間に差はないが、精度においては、局所展開の近似が無い分、ツリー法が上回っている。設定によって、高速多重極展開法では、さらに計算時間を短縮することもできる（我々の計算では約半分程度）。今、電位を計算する地点の数を固定しているが、一般には電荷が存在する位置の電位計算をする場合が多い。そのような場合、電荷数がさらに増えると、高速多重

極展開法の計算は有利になる。電荷数に応じて、どんな設定でどのような計算法を利用するのが有利か、今後議論しておく必要がある。

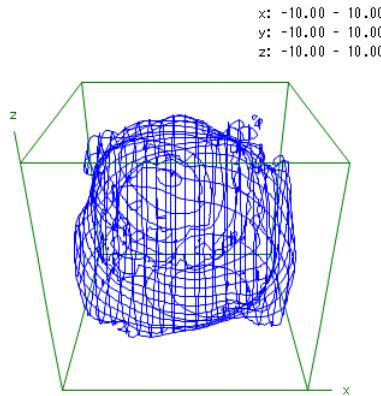


図 2.22a 厳密計算 (564 秒)

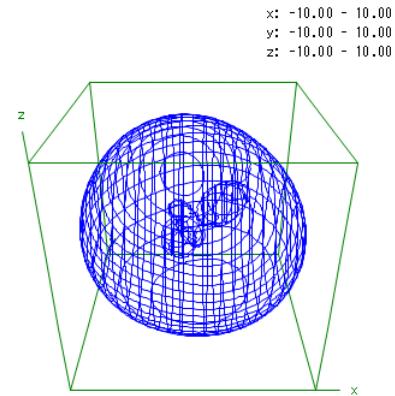


図 2.22b 多重極展開法 (5 秒)

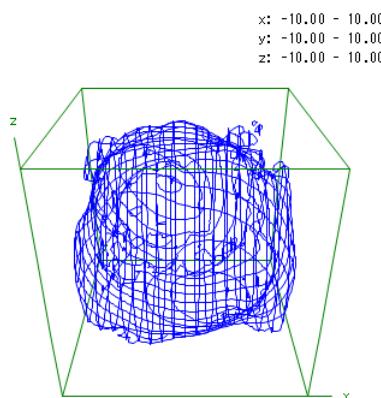


図 2.22c ツリー法 (153 秒)

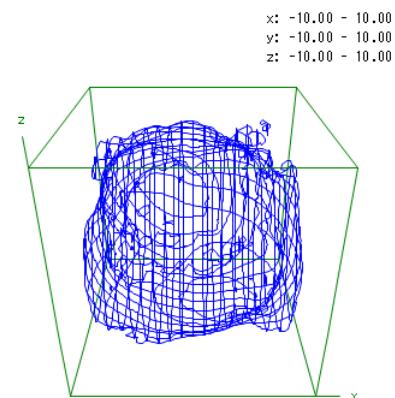


図 2.22d 高速多重極展開法 (127 秒)

### 3. 電流と磁場

この章では定常電流によって作られる磁場とその中の荷電粒子の運動について考える。簡易言語を用いて、電流を 3 次元パラメータ関数によって表し、それによって作られる磁力線や磁場を電流も含めて 3D ビューア上に表現する。その際、磁場中の荷電粒子の運動についてもシミュレーションできるようとする。

微小な長さの定常電流のつくる磁場  $d\mathbf{H}$  [A/m] は、以下の Biot-Savart の法則によって与えられ

る。

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I ds \times \mathbf{r}}{r^3}$$

ここに、 $I$  [A] は電流、 $ds$  [m] は電流の微小な長さ、 $\mathbf{r}$  [m] は電流から磁場を作る点への位置ベクトルである。微小な長さの定常電流のつくる真空中の磁束密度  $d\mathbf{B}$  [Wb/m<sup>2</sup>] は、真空の透磁率を  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  [H/m] とすると、以下となる。

$$d\mathbf{B} = \mu_0 d\mathbf{H} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \times \mathbf{r}}{r^3}$$

ここに、ある地点における磁場や磁束密度はこれらの足し合わせによって得られる。

磁束密度  $\mathbf{B}$  の空間で、電荷量  $q$  [C]、速度  $\mathbf{v}$  [m/s] の荷電粒子に働く力  $\mathbf{F}$  [N] は、以下で与えられる。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

この章でのシミュレーションはこれらの関係を利用して計算される。

メニュー [分析－教育・科学他－物理シミュレーション－電流と磁場] を選択すると図 3.1 のような実行メニューが表示される。

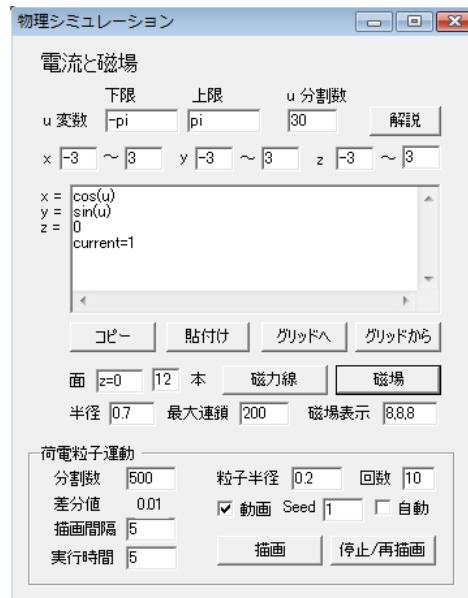


図 3.1 実行メニュー

電流は「u 変数」で与えられるパラメータによって、パラメータ関数として式入力用のテキストボックスに記述する。u 変数の「下限」と「上限」はパラメータの設定範囲、「u 分割数」はパラメータの範囲の分割数を表すが、パラメータ関数を分割した微小の長さは電流の微小線分を表す。実行メニ

ユーの例は、デフォルトで与えられるもので、後に述べる円形コイルを表す。磁力線や、磁場、粒子の運動の描画範囲は、「x」、「y」、「z」で与えられ、初期値はいずれも-3m～3mとなっている。

磁力線を表示するには、まず描画を開始する「面」を指定する。面は、 $z=0$  のような式で表わすが、磁力線は、その中の描画領域の中央を中心とする「半径」（デフォルトで 0.7）で示される円内でバランスが取れるように（ $0.5 \times \text{「半径」}$  のところに本数の 1/3、「半径」のところに残りの本数）開始点が設定される。磁力線の本数は初期設定では 12 本になっている。微小な長さの磁力線の「最大連鎖」はデフォルトで 200、または描画領域外に到達するまでである。以後の図はすべて磁力線のデフォルト値を用いている。

### 例 1 円形コイル

```
cos(u)
sin(u)
0
current=1
```

これは円形コイルの例である。上から 3 行はパラメータ関数で表わした電流の経路で、`current=1` は電流が 1A 流れていることを示す。メニュー中央のテキストボックスに上の設定を書き込み、「磁力線」ボタンをクリックすると図 3.2 のような円形コイルの作る磁力線が表示される。

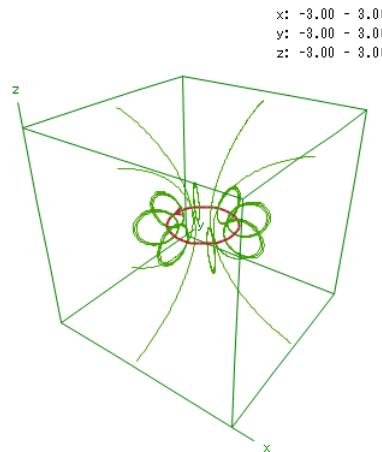


図 3.2 円形コイルの磁力線

図の中心の円は電流を表し、電流の向きは、電流上に矢印で示されている。円形コイルの場合、本来磁力線は閉じた曲線で表わされるが、ここでは誤差があるため、曲線が少しづれている。

### 例 2 バネ状コイル

```
cos(10*u)
sin(10*u)
u/2
```

```
current=1
```

これはバネ状コイルを表している。このコイルの作る磁力線を図 3.3 に表示する。ここで、u 分割数は 150 に設定している。

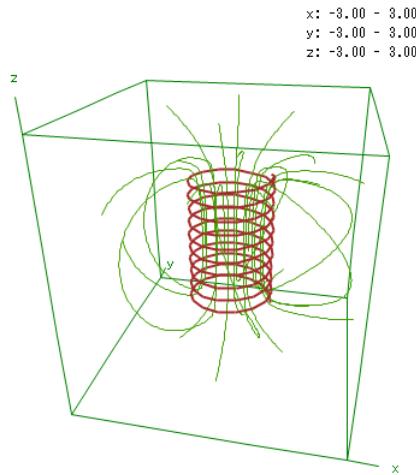


図 3.3 バネ状コイルの磁力線

### 例 3 2つの円形コイル

$\cos(u)$	-3
$\sin(u)$	$3 * \cos(u)$
0	$3 * \sin(u)$
	current=1, 1

これは 2 種類の円形コイルを表している。紙面の都合上 2 列で書いているが、パソコンでは 1 列で入力する。電流は上から 3 行ずつを 1 組にして、2 種類の経路を示している。current=1, 1 は経路順に、2 つの電流の強さを与えており。最後に 2 つの円形コイルの作る磁力線を図 3.4 に示す。

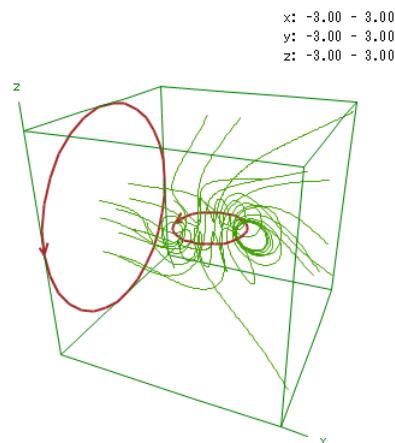


図 3.4 2 つの円形コイルが作る磁力線

磁場は、領域内で x, y, z 軸方向をそれぞれ、「磁場表示」で指定した数で分割して、その分割の中央に表示する。「磁場表示」を 8,8,8 とした例 1 の円形コイルの場合の磁場を図 3.5a に、描画領域で y を 0 – 0 に指定して「磁場表示」を 8,1,8 とした平面表示を図 3.5b に示す。矢印の中央が磁場を求める点である。

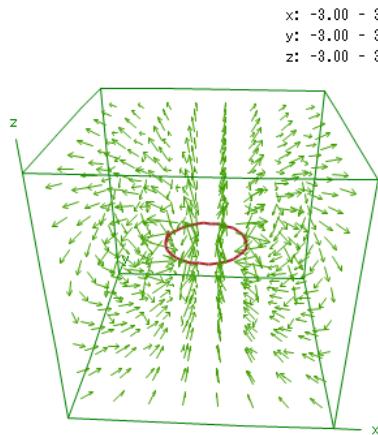


図 3.5a 円形電流の磁場

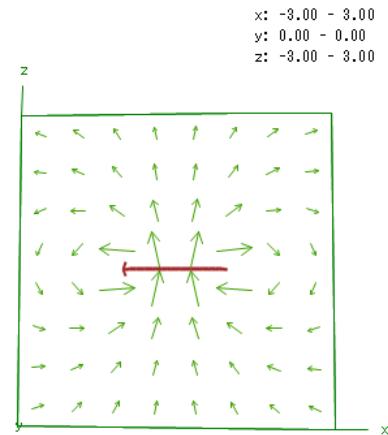


図 3.5b 円形電流の平面表示

#### 例 4 円コイルの作る磁場中の荷電粒子の運動 1

$\cos(u)$	$@x=3$
$\sin(u)$	$@y=0$
0	$@z=0$
current=1	$@vx=-2$
mass=0.0000001	$@vy=0$
charge=1	$@vz=0$

これは円形コイルの中を荷電粒子が運動するプログラムである。この荷電粒子の運動を見るためには、粒子の質量と電荷、及び初期位置と初速度が必要になる。最初の 4 行は電流を表すコマンドであり、「mass=0.0000001」と「charge=1」は、粒子の質量 [kg] と電荷 [C] を表す。粒子の初期値は、 $@x=$ ,  $@y=$ ,  $@z=$ ,  $@vx=$ ,  $@vy=$ ,  $@vz=$  の形で入力する。図 3.6 に上の設定で、「動画」チェックボックスを外し、「描画」ボタンをクリックした結果を示す。画面には粒子の軌道が描かれている。ここで粒子の「粒子半径」は 0.2 にしている。もちろん「動画」チェックボックスにチェックを入れると、粒子の運動を見ることができる。

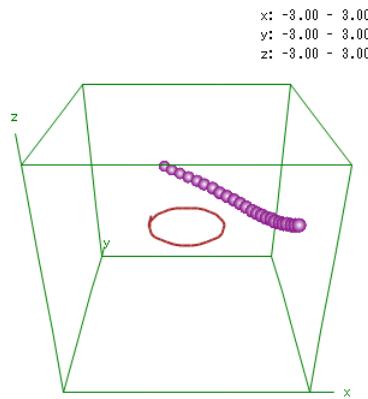


図 3.6 磁場中の正電荷の運動

#### 例 5 円形コイルの作る磁場中の荷電粒子の運動 2

```

cos(u) @x=3
sin(u) @y=0
0 @z=0
current=1 @vx=-1
mass=0.0000001 @vy=0
charge=-1+2*theta(rnd-0.5) @vz=-1+2*rnd

```

これは電荷を $\pm 1C$ の乱数で与え、 $x$ 方向から粒子を初速度 $1m/s$ で入射させ、 $z$ 方向の初速度を $-1m/s$ ～ $1m/s$ の一様乱数に設定した場合の例である。乱数は「Seed」で乱数のシードを固定したり、「自動」で変動したりすることができる。結果を図 3.7a に示す。ここで、電荷が正の荷電粒子は紫、負の荷電粒子は緑で表わしている。荷電粒子が磁場ではじかれている様子がよく分かる。

同様にして、 $z$ 方向から粒子を初速度 $1m/s$ で入力させ、 $y$ 方向の初速度を上と同様に変動させた例を図 3.7b に示す。

```

cos(u) @x=0
sin(u) @y=0
0 @z=3
current=1 @vx=0
mass=0.0000001 @vy=-1+2*rnd
charge=-1+2*theta(rnd-0.5) @vz=-1

```

x: -3.00 - 3.00  
y: -3.00 - 3.00  
z: -3.00 - 3.00

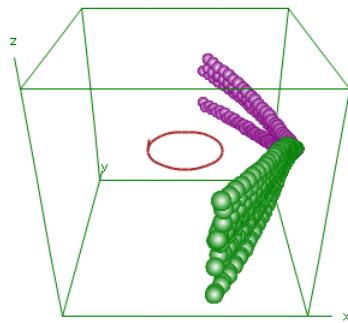


図 3.7a 荷電粒子の軌道 (x 方向)

x: -3.00 - 3.00  
y: -3.00 - 3.00  
z: -3.00 - 3.00

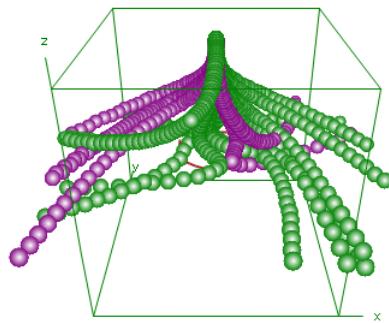


図 3.7b 荷電粒子の軌道 (z 方向)

## おわりに

我々は、荷電粒子の作る静電場と定常電流の作る静磁場についてのシミュレーションプログラムを作成した。その際、静電場のプログラムでは、3次元空間中に電気力線や電場の方向を描き、等位面を網状の等高面として表現した。また、これまでの教育用プログラムには見られない高速多重極展開法を体感できる機能も付け加えた。静磁場では3次元空間中に磁力線や磁場の方向を描き、それを作る電流の回路も合わせて表示できるようにした。また、その磁場の中を荷電粒子が運動するシミュレーションも追加した。これらの一連の処理は簡易言語を作つて実行できるようにした。

特に電流と磁場のシミュレーションでは、質点の運動のプログラムでも論じた、環境を描くという考え方によって、電流が加えられている。この考え方は、今後のプログラムでも利用する予定であるが、考え方を統合化して、運動の式や環境を表す共通のコマンドを作つておくことはプログラムの効率化に有効である。また、このような考え方は、これまでの教育用物理シミュレーションではあまり使われていないと思われるが、新しい手法として提案する意味があるように思う。3次元の物理シミュレーションは College Analysis の 3D ビューアを利用するが、今後発展の可能性が期待できる分野である。

力学と電磁気学のシミュレーションプログラムを作成して感じることは、単位系の問題である。力学では、MKS 単位系でイメージが湧き易いが、電磁気学では MKS 単位系ではイメージが掴みにくいところもある。例えば、コイルはどうしても机の上の小さなサイズを考えてしまうし、kg 単位の質量の荷電粒子は、日常的には殆ど考えない。また同様の理由で（双極子の作る電位が数メートルのところで 100V 程度になるように）、電場のシミュレーションでは電荷の単位を  $10^{-6}$  クーロンの単位で記述するようにしている。単位は全て共通の MKS にするのが最良であろうが、生活の中でのイメージ

ージとのギャップをどのように考えるかが問題であろう。もちろんこのギャップこそが力の大きさを理解するために必要なものなのかも知れず、今後設定に変更を加える可能性もある。

## 参考文献

- 1) 理工系の基礎数学 8 数値計算, 高橋大輔, 岩波書店, 1996.
- 2) 岩波基礎物理シリーズ 3 電磁気学, 川村清, 岩波書店, 1994.
- 3) コンピュータ・シミュレーションの基礎 [第 2 版], 岡崎進・吉井範行, 化学同人, 2011.
- 4) The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems, Leslie F. Greengard, MIT Press.
- 5) College Analysis による物理シミュレーション 1 — 質点系の運動・惑星シミュレーション —, 福井正康, 石丸敬二, 福山平成大学経営研究, 第 9 号, (2013).

# **Physics Simulation in College Analysis 2**

## **- Charge and Electric Field, Current and Magnetic Field -**

Masayasu FUKUI

Department of Business Administration, Faculty of Business Administration,  
Fukuyama Heisei University

### **Abstract**

We have created a unified program named College Analysis on the social system analysis, enhancing the graphics output. In this time, we introduce the programs on the electrostatic field generated by the stationary charges and the magnetic field generated by the steady-state current. In the program of electrostatic field, we included the tree method approximation and the fast multi-pole expansion approximation in addition to the exact calculation. In the program of magnetic field, we added simulation of motion of charged particles in the magnetic field.

### **Keywords**

College Analysis, physics, simulation, electric field, magnetic field, tree method, fast multi-pole expansion

URL: <http://www.heisei-u.ac.jp/ba/fukui/>