

2章 確率

2.1 事象と集合

世の中では様々な事柄（状況）がある出現の割合で起こっています。例えば宝くじを考えてみましょう。宝くじに当たるという事実が事柄で、何本中に1本の当りくじというのが出現割合です。このある事柄を事象と言い、その出現割合を確率といいます。ここではこの事象と確率について例を用いて考えてみたいと思います。

サイコロを投げる場合の出る目の事象を考えてみましょう。1, 2, 3, 4, 5, 6 が出るのが事象ですので、集合の要素をサイコロの目の数とすると、全事象を集めた集合 U は、

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

のように表わされます。

次にサイコロを2個投げる場合の出る目の事象を考えてみましょう。この場合の全事象は、2つのサイコロが区別できるとして、

$$U = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,5), (6,6)\}$$

のように与えられます。

今度はいろいろな条件のついた事象を考えてみましょう。サイコロの目が奇数となる事象を A とすると、 $A = \{1, 3, 5\}$ となります。サイコロの目が奇数とならない事象（偶数となる事象）は、全事象の中で A でないものなので、これを \bar{A} と書いて余事象といいます。この余事象は具体的に $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$ のように表わされます。同様に、サイコロの目が3以下となる事象を B とすると、 $B = \{1, 2, 3\}$ で、余事象は $\bar{B} = \{4, 5, 6\}$ となります。

次は複数の条件が付く場合です。サイコロの目が奇数で「かつ」3以下となる事象は、上の A と B に共通な要素を抜き出したものとなり、 $A \cap B = \{1, 3\}$ で表わされ、 A と B の積事象と呼ばれます。また、サイコロの目が奇数「または」3以下となる事象は、 A と B どちらかに含まれる要素を抜き出したものとなり、 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ で表わされ、 A と B の和事象と呼ばれます。

さて、サイコロの目が4または6となる事象を $C = \{4, 6\}$ とすると、 A と C の積事象の要素は存在しません。このことは $A \cap C = \phi$ と表わし、記号 ϕ （ヌルと読みます）を空事象と呼びます。積事象が空事象となる互いの事象を排反事象といいます。

ここで学んだ用語は数学の集合の用語に置き換えることもできます。事象を集合、余事象を補集合、積事象を積集合、和事象を和集合、空事象は空集合です。どちらか自分の親しみやすい呼び名を使えばよいと思います。

2.2 確率とは

この節では、統計の最重要事項である「確率」について学びます。確率はある事象が起こる確からしさと考えますが、この確からしさをきちんと定義しておかなければなりません。これには、統計的確率と呼ばれる定義法と数学的確率と呼ばれる定義法があります。以下にそれらをきちんと書いておきましょう。

統計的確率

ある試行を n 回繰り返して、事象 A が r 回起こったとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r/n = p$ ならば、 p を事象 A の起こる（統計的）確率という。

この定義を簡単に言うと、統計的確率とは、多くの試行を繰り返したときに事象 A が現れる割合です。我々の感覚からすれば、どのぐらいの頻度で起こるかが大事ですから、この統計的確率が直感的に理解し易いと思います。ただ、実際に何度も試行を繰り返すことはできませんから、これを直接観測することは実際のところ不可能でしょう。

数学的確率

ある試行の全事象 U に含まれる要素の数を $n(U)$ とし、これらは同等に起こるものとする。事象 A に含まれる要素の数を $n(A)$ とするとき、事象 A の起こる（数学的）確率を $p(A) = n(A)/n(U)$ と定義する。

これは要素の数の割り算ですから、計算は可能です。しかし、このように定義した確率が、上の統計的確率と一致するかどうかすぐには分かりません。ところがこの2つの定義は以下のように同じ値を与えることが示されています。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r/n = n(A)/n(U)$$

これは大数の法則と呼ばれています。このことから、今後は2つの確率を区別せずに計算を進めて行こうと思います。

具体的な例を見る前に、確率の値について重要な注意をしておきます。即ち、事象の要素数は必ず 0 以上ですし、ある事象の要素数が全事象の要素数より多くなることはありません。それゆえ確率の値には以下の制限が付きます。

$$0 \leq p \leq 1$$

さて、具体的にいくつかの事象の出現確率を求めてみましょう。まず、サイコロの目が奇数となる確率は、全事象の要素数が6、奇数の目の出る要素数が3ですから、以下のようになります。

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

次は、サイコロの目が奇数でかつ3以下となる確率です。奇数でかつ3以下という事象の要素数は2ですので、出現確率は以下のようになります。

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3枚の硬貨を同時に投げるとき、1枚が表である確率を求めてみます。硬貨は区別できるとして、全事象の数は、各硬貨表裏で2種類ずつですから $2^3 = 8$ となります。3枚中1枚が表である場合の数は、どれか1枚表のコインを選ぶ場合の数ですから3です。それゆえ確率は以下のようになります。

$$p = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$$

問題

1~5の番号のついたボールから2個取りだすとき、それが両方奇数である確率を求めよ。

解答

全事象の数は5個の異なるものから2個取り出す組み合わせの問題なので ${}_5C_2 = 10$ 、2個取り出した番号が奇数である場合の数は、奇数のボールの数3個から2個選ぶ組合せなので ${}_3C_2 = 3$ となる。それゆえ、確率は以下で与えられる。

$$p = \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

問題

aとbの2つのサイコロを振って、aが偶数、bが2以下となる確率を求めよ。

解答

aが偶数となる場合の数は3、bが2以下となる場合の数は2で、2つのサイコロは互いに影響を与えることはないので、確率は以下で与えられる。

$$p = \frac{3 \times 2}{6^2} = \frac{1}{6}$$

ここで上の問題の式を少し書き換えてみます。

$$P = \frac{3 \times 2}{6^2} = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = P(A) \times P(B)$$

ここに $P(A)$ はサイコロ a が偶数となる事象 A の実現確率、 $P(B)$ はサイコロ b が 2 以下となる事象 B の実現確率です。確率は各サイコロについての実現確率の積になります。このように事象 A と事象 B とが同時に起こり、その生起確率が $P = P(A) \times P(B)$ で与えられる場合、2つの事象は互いに独立であるといいます。

事象の要素数についてももう1つ重要な関係があります。2つの事象 A と B についてその和事象の要素数は、それぞれの要素数から積事象（重なっている部分）の要素数を引いたものになります。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

これは積事象に含まれる要素は $n(A) + n(B)$ で2度数えられるので、引いておかなければならないからです。これから、事象 $A \cup B$ の起きる確率は以下のように計算できることが分かります。

$$P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(U)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ここで、事象 A と事象 B が互いに排反の関係にあると、積事象は空事象になりますので、 $n(A \cap B) = 0$ となり、 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ の関係が得られます。これから上と同様に、排反事象に対しては以下の関係が得られます。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

今、全事象を r 個の排反事象 A_i ($i = 1, 2, \dots, r$) に分けたとします。それぞれの事象の出現確率を $P(A_i)$ とすると、この確率の合計は1となることが容易に理解できます。

$$\sum_{i=1}^r P(A_i) = \sum_{i=1}^r \frac{n(A_i)}{n(U)} = \frac{n(U)}{n(U)} = 1$$

全確率が1であるというこの関係は、今後いろいろな場面で登場する重要な関係です。

2.3 期待値

前節で各事象の確率を計算する方法を学びましたが、ここではそれぞれの事象に特徴的な値（例えばサイコロだと目の数、賭けだと儲け）を付けて、試行を繰り返す際のこの値の平均的なふるまいを考えてみましょう。

例えば、じゃんけんが勝ったら1000円もらい、負けたら2000円支払う賭けを考えてみましょう。こんな賭けをあなたはやってみますか。よっぽどの場合でなかったら、

挑戦する人はいないと思います。なぜでしょうか。この賭けを繰り返すと負けがどんどん増えるということが直感的に分かるからです。しかし、もう少し複雑な場合にはなかなか直感は働きませんので、論理的に考えてみる必要があります。

この例では、じゃんけんに勝つ事象には 1000 (円) が、負ける事象には -2000 (円) が対応しており、それぞれの実現確率は 1/2 です。そこで (1 回当りの) 平均的な儲けを以下のように計算します。

$$E(X) = \frac{1}{2} \times 1000 + \frac{1}{2} \times (-2000) = -500 \text{円}$$

それぞれの値に実現確率を掛けてその合計を取る、このように計算された値を期待値または平均値と呼びます。

一般に各事象に付与された数値の期待値は、その値に事象の実現確率を掛けて、全事象について合計を取る方法で計算します。各事象に付与された数値は確率的に変動しますので、確率変数といいます。これを X とすると、確率変数 X の期待値は $E(X)$ と表わされます。

さて、サイコロを振って、1 が出たら相手から 1000 円もらい、2~5 が出たら相手に 250 円支払い、6 が出たら胴元に 60 円支払う賭けを考えます。自分がもらうお金の期待値を計算してみましょう。1 が出る場合、2~5 が出る場合、6 が出る場合の確率はそれぞれ、1/6, 2/3, 1/6 で、自分がもらうお金の期待値ですから、胴元に払う場合はマイナスになり、以下の結果を得ます。

$$E(X) = \frac{1}{6} \times 1000 + \frac{4}{6} \times (-250) + \frac{1}{6} \times (-60) = -10 \text{円}$$

問題

ある企業に 100 万円投資すると、確率 0.7 で 140 万円の収入があり、確率 0.2 で 50 万円の収入となり、確率 0.1 で収入がなくなる。このような投資は有利と考えるか？

解答

$$E(X) = 0.7 \times 140 + 0.2 \times 50 + 0.1 \times 0 = 108 > 100$$

期待値が投資額を上回っているため、不利な投資ではないと思われるが、差が小さいため用心が必要であろう。

問題

クイズで勝って 10 万円獲得しているとする。ここで辞めれば 10 万円もらえるが、

次の問題に挑戦すると、出来たら 30 万円、出来なかったら 0 円になる。もらう金額の期待値を求めよ。但し、次の問題は 2 択または 5 択とし、さっぱり分からなくて勘で解答するとする。

解答

$$2 \text{ 択の場合} \quad E(X) = \frac{1}{2} \times 30 + \frac{1}{2} \times 0 = 15 \text{ 万円} > 10 \text{ 万円}$$

$$5 \text{ 択の場合} \quad E(X) = \frac{1}{5} \times 30 + \frac{4}{5} \times 0 = 6 \text{ 万円} < 10 \text{ 万円}$$

以上の結果を見て、あなたは挑戦しますか？

ここで、数学的に期待値の定義をしておきます。確率変数 X の実現値 x_i の生起確率を p_i として、確率変数 X の期待値 $E(X)$ は以下で与えられます。

$$\begin{aligned} E(X) &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \\ &= \sum_{i=1}^n p_i x_i \end{aligned}$$

これは実現値が離散的な（とびとびの値を取る）場合の定義で、身長や体重のように連続的な値を取る場合の定義は後に学びます。しかし、期待値に関する様々な性質は離散的な定義も連続的な定義も同じように計算できますので、今後ちょっとした証明にはこの離散的な定義式を利用することにします。

問題

確率変数 X の期待値が $E(X)$ で与えられるとき、 $X' = aX + b$ なる変換で新たにできた確率変数 X' の期待値が $aE(X) + b$ で与えられることを示せ。但し、確率変数 X は n 個の離散的な値 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を取るものとする。

解答

$$E(X') = \sum_{i=1}^n p_i (ax_i + b) = a \sum_{i=1}^n p_i x_i + b \sum_{i=1}^n p_i = aE(X) + b$$