２章 確率

2.1 事象と集合

世の中では様々な事柄（状況）がある出現の割合で起こっています。例えば宝くじを考えてみましょう。宝くじに当るという事実が事柄で、何本中に 1 本の当りくじというのが出現割合です。このある事柄を事象と言い、その出現割合を確率といいます。ここではこの事象と確率について例を用いて考えてみたいと思います。

サイコロを投げる場合の出る目の事象を考えてみましょう。1, 2, 3, 4, 5, 6 が出ることが事象ですので、集合の要素をサイコロの目の数とすると、全事象を集めた集合U は、

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

のように表わされます。

次にサイコロを 2 個投げる場合の出る目の事象を考えてみましょう。この場合の全事象は、2 つのサイコロが区別できるとして、

$$U = \{(1,1), (1,2), (1,3), \cdots, (6,5), (6,6)\}$$

のように与えられます。

今度はいろいろな条件のついた事象を考えてみましょう。サイコロの目が奇数となる事象をAとすると、$A = \{1, 3, 5\}$ となります。サイコロの目が奇数とならない事象（偶数となる事象）は、全事象の中でAでないものなので、これを$\overline{A}$ と書いて余事象といいます。この余事象は具体的に$\overline{A} = \{2, 4, 6\}$ のように表わされます。同様に、サイコロの目が 3 以下となる事象をB とすると、$B = \{1, 2, 3\}$ で、余事象は$\overline{B} = \{4, 5, 6\}$ となります。

次は複数の条件が付く場合です。サイコロの目が奇数で「かつ」3 以下となる事象は、上のAとBに共通な要素を抜き出したものとなり、$A \cap B = \{1, 3\}$ で表わされ、AとBの積事象と呼ばれます。また、サイコロの目が奇数「または」3 以下となる事象は、AとBどちらかに含まれる要素を抜き出したものとなり、$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ で表わされ、AとBの和事象と呼ばれます。

さて、サイコロの目が 4 または 6 となる事象を$C = \{4, 6\}$ とすると、AとCの積事象の要素は存在しません。このことは$A \cap C = \phi$ と表わし、記号ϕ（ヌルと読みます）を空事象と呼びます。積事象が空事象となる互いの事象を排反事象といいます。

ここで学んだ用語は数学の集合の用語に置き換えることもできます。事象を集合、余事象を補集合、積事象を積集合、和事象を和集合、空事象は空集合です。どちらか自分の親しみ易い呼び名を使えばよいと思います。

2.2 確率とは

この節では、統計の最重要事項である「確率」について学びます。確率はある事象が起こる確からしさと考えますが、この確からしさをきちんと定義しておかなければなりません。これには、統計的確率と呼ばれる定義法と数学的確率と呼ばれる定義法があります。以下にそれらをきちんと書いておきましょう。

統計的確率

ある試行を n 回繰り返して、事象 A が r 回起こったとき、$\lim_{n\to\infty} r/n = p$ ならば、p を事象 A の起こる（統計的）確率という。

この定義を簡単に言うと、統計的確率とは、多くの試行を繰り返したときに事象 A が現れる割合です。我々の感覚からすれば、どのぐらいの頻度で起こるかが大事ですから、この統計的確率が直感的に理解し易いと思います。ただ、実際に何度も試行を繰り返すことはできませんから、これを直接観測することは実際のところ不可能でしょう。

数学的確率

ある試行の全事象 U に含まれる要素の数を $n(U)$とし、これらは同等に起こるものとする。事象 A に含まれる要素の数を $n(A)$とするとき、事象 A の起こる（数学的）確率を $p(A) = n(A)/n(U)$ と定義する。

これは要素の数の割り算ですから、計算は可能です。しかし、このように定義した確率が、上の統計的確率と一致するかどうかすぐには分かりません。ところがこの２つの定義は以下のように同じ値を与えることが示されています。

$$\lim_{n\to\infty} r/n = n(A)/n(U)$$

これは大数の法則と呼ばれています。このことから、今後は２つの確率を区別せずに計算を進めて行こうと思います。

具体的な例を見る前に、確率の値について重要な注意をしておきます。即ち、事象の要素数は必ず 0 以上ですし、ある事象の要素数が全事象の要素数より多くなることはありません。それゆえ確率の値には以下の制限が付きます。

$$0 \le p \le 1$$

さて、具体的にいくつかの事象の出現確率を求めてみましょう。まず、サイコロの目が奇数となる確率は、全事象の要素数が 6、奇数の目の出る要素数が 3 ですから、以下のようになります。

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

次は、サイコロの目が奇数でかつ 3 以下となる確率です。奇数でかつ 3 以下という事象の要素数は 2 ですので、出現確率は以下のようになります。

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3 枚の硬貨を同時に投げるとき、1 枚が表である確率を求めてみます。硬貨は区別できるとして、全事象の数は、各硬貨表裏で 2 種類ずつですから $2^3 = 8$ となります。3 枚中 1 枚が表である場合の数は、どれか 1 枚表のコインを選ぶ場合の数ですから 3 です。それゆえ確率

は以下のようになります。

$$p=\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$$

問題１

1〜5の番号のついたボールから2個取りだすとき､それが両方奇数である確率を求めよ。

解答

全事象の数は 5 個の異なるものから 2 個取り出す組み合わせの問題なので ${}_5C_2=10$ 、2 個取り出した番号が奇数である場合の数は､奇数のボールの数3個から2個選ぶ組合せなので ${}_3C_2=3$ となる。それゆえ、確率は以下で与えられる。

$$p=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

問題２

ある袋に赤玉7個と白玉3個が入っている。この袋から3個取り出すとき、それが赤玉2個、白玉1個である確率を求めよ。

解答

$$p=\frac{{}_7C_2\times{}_3C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$$

問題３

a と b の 2 つのサイコロを振って、a が偶数、b が 2 以下となる確率を求めよ。

解答

a が偶数となる場合の数は 3､b が 2 以下となる場合の数は 2 で､2 つのサイコロは互いに影響を与えることはないので、確率は以下で与えられる。

$$p=\frac{3\times 2}{6^2}=\frac{1}{6}$$

ここで上の問題の式を少し書き換えてみます。

$$P=\frac{3\times 2}{6^2}=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=P(A)\times P(B)$$

ここに $P(A)$ はサイコロ a が偶数となる事象 A の実現確率、$P(B)$ はサイコロ b が 2 以下となる事象 B の実現確率です。確率は各サイコロについての実現確率の積になります。このように事象 A と事象 B とが同時に起こり、その生起確率が $P=P(A)\times P(B)$ で与えられる場合、２つの事象は互いに独立であるといいます。

事象の要素数についてもう１つ重要な関係があります。２つの事象 A と B についてその和事象の要素数は、それぞれの要素数から積事象（重なっている部分）の要素数を引いたものになります。

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

これは積事象に含まれる要素は$n(A)+n(B)$で2度数えられるので、引いておかなければならないからです。これから、事象$A\cup B$の起きる確率は以下のように計算できることが分かります。

$$P(A\cup B)=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(U)}=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

ここで、事象Aと事象Bが互いに俳反の関係にあると、積事象は空事象になりますので、$n(A\cap B)=0$となり、$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$の関係が得られます。これから上と同様に、排反事象に対しては以下の関係が得られます。

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

今、全事象をr個の排反事象$A_i\ (i=1,2,\cdots,r)$に分けたとします。それぞれの事象の出現確率を$P(A_i)$とすると、この確率の合計は1となることが容易に理解できます。

$$\sum_{i=1}^{r}p(A_i)=\sum_{i=1}^{r}\frac{n(A_i)}{n(U)}=\frac{n(U)}{n(U)}=1$$

全確率が1であるというこの関係は、今後いろいろな場面で登場する重要な関係です。

2.3 事後確率とベイズの定理【Skip OK】

これまでは事象A_i（$i=1,\cdots,m$）と事象B_j（$j=1,\cdots,n$）が同時に起こる場合の確率$P(A_i\cap B_j)$を考えてきましたが、ここでは事象B_jが起こったことが分かっている場合に事象A_iが起きる確率を考えてみましょう。この確率を$P(A_i\,|\,B_j)$と書き、B_jの事後確率と呼びます。同時確率と事後確率の関係は、以下のようになります。

$$P(A_i\cap B_j)=P(B_j\,|\,A_i)P(A_i)=P(A_i\,|\,B_j)P(B_j) \qquad (1)$$

これは事象B_jが起きる確率に、事象B_jが起きた後に事象A_iの起きる確率を掛けると事象A_iとB_jが同時に起きる確率になるということを表しており、ごく自然に受け入れられるように思います。この関係から以下のような式が導かれます。

$$P(A_i\,|\,B_j)=\frac{P(B_j\,|\,A_i)P(A_i)}{P(B_j)}$$

ここで$P(B_j)$については (1) 式を用いて以下のようになります。

$$P(B_j)=\sum_k P(A_k\cap B_j)=\sum_k P(B_j\,|\,A_k)P(A_k)$$

これを上の式に代入すると以下のような式が得られます。

$$P(A_i\,|\,B_j)=\frac{P(B_j\,|\,A_i)P(A_i)}{\sum_k P(B_j\,|\,A_k)P(A_k)}$$

これはB_jの事後確率をA_kの事後確率に変換する重要な公式で、ベイズの定理と呼ばれています。ここでこの定理を使った例題を考えてみましょう。

例

今袋１と袋２の 2 つの袋に赤玉と白玉が 10 個ずつ入っているとします。袋１には赤玉 7 つと白玉　3 つ、袋２には赤球 4 つと白玉 6 つとし、外見上見分けが付かないとする。今それらの袋から１つを選び、玉を取り出すことを考える。以下の問いに答えよ。

１）袋を選んで 1 つ玉を取り出したとき、それが赤玉であったとする。選んだ袋が袋 1 である確率を求めよ。

２）袋を選んで 2 つ玉を取り出したとき、それが 2 つとも赤玉であったとする。選んだ袋が袋 1 である確率を求めよ。

解答

袋 1 を選ぶ事象を A_1 、袋２を選ぶ事象を A_2 とすると、2 つの袋が完全に見分けが付かなければ、事象の出現確率は以下となります。

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

１）

袋を選んで取り出した玉が赤玉である事象を B_1 、白玉である事象を B_2 とします。この例の場合、取り出した玉が赤玉ですので、事象 B_1 が観測されたものとします。このときに自分の選んだ袋が袋 1 である確率を考えます。

これにはベイズの定理を利用します。以下の計算を見て下さい。

$$P(A_1 | B_1) = \frac{P(B_1 | A_1)P(A_1)}{P(B_1 | A_1)P(A_1) + P(B_1 | A_2)P(A_2)}$$

$$= \frac{\frac{7}{10} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{2}} = \frac{7}{11}$$

何も情報がないときに比べて、袋 1 である確率が高くなっていることが分かります。

２）

取り出した 2 つの玉の色で、以下のように事象を考えます。事象 B_1' を 2 つとも赤玉の事象、B_2' を赤玉 1 つ、白玉 1 つの事象、B_3' を白玉 2 つの事象とします。赤玉 2 つであることが分かっている場合、以下のようにして選んだ袋が袋 1 である確率を計算します。

$$P(A_1 | B_1') = \frac{P(B_1' | A_1)P(A_1)}{P(B_1' | A_1)P(A_1) + P(B_1' | A_2)P(A_2)}$$

$$= \frac{\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{1}{2}} = \frac{7}{9}$$

赤玉 2 つという情報は、選んだ袋が袋 1 であるということを後押しする情報になっています。

ここで述べた以外のケースについても考えてみて下さい。

問題

抽選の箱がある。通常当たりくじは 10 本に 1 本の割合で入っているが、10 箱に 1 箱大当たりの箱があってそこには 10 本に 2 本の割合で当たりくじが入っている。今ある箱で、10 人の人が引くのを見ていたら、3 本の当たりが出た。この箱が大当たりの箱である確率を求めよ。但し、箱のくじは十分多く、多少くじをひいても当たりの確率に影響を与えないものとする。

解答

現在の箱が大当たりの箱である事象を A_1、普通の箱である事象を A_2 であるとする。くじで 10 人中 3 本の当たりがでた事象を B とすると、ベイズの定理より以下のようになる。

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)}$$

ここで

$$P(B|A_1)={}_{10}C_3\left(\frac{2}{10}\right)^3\left(\frac{8}{10}\right)^7=\frac{120\times 2^3\times 8^7}{10^{10}}$$

$$P(B|A_2)={}_{10}C_3\left(\frac{1}{10}\right)^3\left(\frac{9}{10}\right)^7=\frac{120\times 9^7}{10^{10}}$$

$$P(A_1)=\frac{1}{10},\quad P(A_2)=\frac{9}{10}$$

以上より、

$$P(A_1|B)=\frac{2^3\times 8^7}{2^3\times 8^7+9^7\times 9}=\frac{1}{1+(9/8)^8}=0.280$$

最後の部分は電卓か Excel で計算して下さい。

2.4 期待値

前節で各事象の確率を計算する方法を学びましたが、ここではそれぞれの事象に特徴的な値（例えばサイコロだと目の数、賭けだと儲け）を付けて、試行を繰り返す際のこの値の平均的なふるまいを考えてみましょう。

例えば、じゃんけんで勝ったら 1000 円もらい、負けたら 2000 円支払う賭けを考えてみましょう。こんな賭けをあなたはやってみますか。よっぽどの場合でなかったら、挑戦する人はいないと思います。なぜでしょうか。この賭けを繰り返すと負けがどんどん増えるということが直感的に分かるからです。しかし、もう少し複雑な場合にはなかなか直感は働きませんので、論理的に考えてみる必要があります。

この例では、じゃんけんに勝つ事象には 1000（円）が、負ける事象には-2000（円）が対応しており、それぞれの実現確率は 1/2 です。そこで（１回当りの）平均的な儲けを以下のように計算します。

$$E(X)=\frac{1}{2}\times 1000+\frac{1}{2}\times(-2000)=-500 \text{円}$$

それぞれの値に実現確率を掛けてその合計を取る、このように計算された値を期待値または平均値と呼びます。

一般に各事象に付与された数値の期待値は、その値に事象の実現確率を掛けて、全事象について合計を取る方法で計算します。各事象に付与された数値は確率的に変動しますので、確率変数といいます。これを X とすると、確率変数 X の期待値は $E(X)$ と表わされます。

さて、サイコロを振って、1 が出たら相手から 1000 円もらい、2〜5 が出たら相手に 250 円支払い、6 が出たら胴元に 60 円支払う賭けを考えます。自分がもらうお金の期待値を計算してみましょう。1 が出る場合、2〜5 が出る場合、6 が出る場合の確率はそれぞれ、1/6, 2/3, 1/6 で、自分がもらうお金の期待値ですから、胴元に払う場合はマイナスになり、以下の結果を得ます。

$$E(X)=\frac{1}{6}\times 1000+\frac{4}{6}\times(-250)+\frac{1}{6}\times(-60)=-10 \text{円}$$

問題

ある企業に 100 万円投資すると、確率 0.7 で 140 万円の収入があり、確率 0.2 で 50 万円の収入となり、確率 0.1 で収入がなくなる。このような投資は有利と考えるか？

解答

$$E(X)=0.7\times 140+0.2\times 50+0.1\times 0=108>100$$

期待値が投資額を上回っているため、不利な投資ではないと思われるが、差が小さいため用心が必要であろう。

問題

クイズで勝って 10 万円獲得しているとする。ここで辞めれば 10 万円もらえるが、次の問題に挑戦すると、出来たら 30 万円、出来なかったら 0 円になる。もらう金額の期待値を求めよ。但し、次の問題は 2 択または 5 択とし、さっぱり分からなくて勘で解答するとする。

解答

2 択の場合　$E(X)=\frac{1}{2}\times 30+\frac{1}{2}\times 0=15$ 万円 ＞10 万円

5 択の場合　$E(X)=\frac{1}{5}\times 30+\frac{4}{5}\times 0=6$ 万円 <10 万円

以上の結果を見て、あなたは挑戦しますか？

ここで、数学的に期待値の定義をしておきます。確率変数 X の実現値 x_i の生起確率を p_i として、確率変数 X の期待値 $E(X)$ は以下で与えられます。

$$
\begin{aligned}
E(X) &= p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_ix_i
\end{aligned}
$$

これは実現値が離散的な（とびとびの値を取る）場合の定義で、身長や体重のように連続的な値を取る場合の定義は後に学びます。しかし、期待値に関する様々な性質は離散的な定義も連続的な定義も同じように計算できますので、今後ちょっとした証明にはこの離散的な定義式を利用することにします。

問題

確率変数 X の期待値が $E(X)$ で与えられるとき、 $X' = aX + b$ なる変換で新たにできた確率変数 X' の期待値が $aE(X)+b$ で与えられることを示せ。但し、確率変数 X は n 個の離散的な値 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ を取るものとする。

解答

$$
E(X') = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i + b) = a\sum_{i=1}^{n} p_ix_i + b\sum_{i=1}^{n} p_i = aE(X) + b
$$