補遺１　質的指標の検定

	対応の有無	検定手法
指定値との比較		適合度検定①
多群間の比較	対応なし	χ^2検定②
	対応あり	McNemar 検定③

① 適合度検定

n 回の観測の中で、事象１はn_1回、事象２はn_2回、・・・、事象 k はn_k 回起こるとする。
確率 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ に基づく予想値$m_1, m_2, \cdots, m_k$ （$m_i = np_i$）と等しいといえるか、有意水準αで検定する。

$$\chi^2 = \frac{(|n_1 - m_1| - 1/2)^2}{m_1} + \frac{(|n_2 - m_2| - 1/2)^2}{m_2} + \cdots + \frac{(|n_k - m_k| - 1/2)^2}{m_k} \underset{n\to\infty}{\sim} \chi^2_{k-1} \text{分布}$$

$p = chidist(\chi^2, k-1)$ として、 $p < \alpha$ ならば、理論値と差があると判定する。

② χ^2検定

2×2 表の場合

ある事象の出現、非出現を要因の有無により分けると以下のようになった。
出現、非出現の間に要因の有無による差があるか、有意水準αで検定する。

	出現	非出現	計
要因有り	a	b	$a+b$
要因無し	c	d	$c+d$
計	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d=n$

$$\chi^2 = \frac{n(|ad - bc| - n/2)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \sim \chi^2_1 \text{分布}$$

$p = chidist(\chi^2, 1)$ として、 $p < \alpha$ ならば、要因により差があると判定する。

r×s 表の場合

ある事象（r 種）の出現状況を要因（s 種）により分けると以下のようになる。
出現、非出現の間に要因の有無による差があるか、有意水準αで検定する。

	事象１	事象２	$\cdots$	事象 s	計
要因１	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1s}	$x_{1\cdot}$
要因２	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2s}	$x_{2\cdot}$
:	:	:		:	:
要因 r	x_{r1}	x_{r2}	$\cdots$	x_{rs}	$x_{r\cdot}$
計	$x_{\cdot 1}$	$x_{\cdot 2}$	$\cdots$	$x_{\cdot s}$	n

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{(|x_{ij} - x_{i\cdot}x_{\cdot j}/n| - 1/2)^2}{x_{i\cdot}x_{\cdot j}/n} \sim \chi^2_{(r-1)(s-1)} \text{分布}$$

$p = chidist(\chi^2, (r-1)(s-1))$ として、 $p < \alpha$ ならば、差があると判定する。

③ McNemar 検定

データと対照データとをある条件でマッチさせて、要因の有無で分類したところ以下の表を得た。要因はデータと対照データの違いに影響があると考えられるか、有意水準αで検定する。

	要因あり	要因なし
要因あり	a	b
要因なし	c	d

$$\chi^2 = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c} \sim \chi_1^2 \text{分布}$$

$p = chidist(\chi^2, 1)$ として、 $p < \alpha$ ならば、要因により差があると判定する。

補遺２　量的指標の検定

	対応の有無	正規性④	等分散性⑤	検定手法
指定値との比較		正規性あり		母平均のｔ検定⑥
		正規性なし		Wilcoxon の符号付順位和検定⑦
２群間の比較	対応なし	正規性あり	等分散	ｔ検定⑧
			異分散	Welch のｔ検定⑨
		正規性なし		Wilcoxon の順位和検定⑩
	対応あり	正規性あり		対応のある場合のｔ検定⑪
		正規性なし		Wilcoxon の符号付順位和検定⑫

④ 正規性の検定

ヒストグラム　　省略

正規確率紙的手法

1) データを入力する。(データ数 n)
2) データを小さい順に並べ替える。([データ－並べ替え])
3) データに１から番号を振る。
4) 累積比率を求める。　$p_i = i/(n+1)$　i は番号
5) $x = normsinv(p)$ 関数を用いて x 値を求める。
6) データと x 値を用いて散布図を描く。
7) グラフに近似曲線を加える。([グラフ－近似曲線の追加])
8) 直線に近く並んでいるようなら正規分布

⑤ 等分散性の検定（F 検定）

正規分布する２つの標本の母分散に差があるかどうか、有意水準 α で検定する。

データ数　n_1, n_2，不偏分散　u_1^2, u_2^2　　（$u_1^2 \geq u_2^2$ とする）

$$F = u_1^2 / u_2^2 \sim F_{n_1-1,\, n_2-1} \text{分布}$$

$p = fdist(F, n_1 - 1, n_2 - 1)$ として、 $p < \alpha$ ならば、差があると判定する。

⑥ 母平均のｔ検定

正規分布する標本の母集団の平均と指定値 μ とを比較し、差があるかどうか有意水準 α で判定する。データ数 n，標本平均 $\bar{x}$，不偏分散：u^2

$$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{u} \sim t_{n-1} \text{分布}$$

$p = tdist(|t|, n-1, 2)$ として、 $p < \alpha$ のとき差があると判定する。

⑦ Wilcoxonの符号付順位和検定

一般的分布の標本の母集団の中央値と指定値μを比較し、差があるかどうか有意水準αで検定する。

$z_i = x_i - \mu$として、$|z_i|$の小さい順に0を除いて順位r_iを付け、z_iの正負で2群に分ける。（同数値の場合は、順位平均をとる。）それぞれの群の順位和をとり、このうち小さい方を選ぶ。$R = \min(R_r, R_s)$， $n = r + s$　データ数n

データ数が少ない（$n \le 50$）とき

数表（補遺３）を参照し、$R \le R_1$のとき、差があると判定する。

データ数が多い（$n > 50$）とき

$$z = \frac{|R - n(n+1)/4| - 1/2}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}} \sim N(0,1)\text{分布（正の部分）}$$

$p = 2 \times (1 - normsdist(z))$として、$p < \alpha$のとき、差があると判定する。

⑧ t検定

正規分布する等分散の２つの標本について母平均を比較し、差があるかどうか有意水準αで検定する。データ数 n_1, n_2，標本平均 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$，不偏分散 u_1^2, u_2^2

$$t = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)u_1^2 + (n_2 - 1)u_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}\text{分布}$$

$p = tdist(|t|, n_1 + n_2 - 2, 2)$として、$p < \alpha$ならば差があると判定する。

⑨ Welchのt検定

正規分布する分散の異なる２つの標本について母平均を比較し、差があるかどうか有意水準αで検定する。データ数 n_1, n_2，標本平均 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$，不偏分散 u_1^2, u_2^2

$c = \dfrac{u_1^2/n_1}{u_1^2/n_1 + u_2^2/n_2}$、自由度を　$d = \left(\dfrac{c^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(1-c)^2}{n_2 - 1}\right)^{-1}$　（切り捨て）とし、

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{u_1^2/n_1 + u_2^2/n_2}} \sim t_d\text{分布}$$

$p = tdist(|t|, d, 2)$として、$p < \alpha$ならば差があると判定する。

⑩ Wilcoxonの順位和検定

一般的分布の２つの標本について母集団の中央値を比較し、差があるかどうか有意水準αで検定する。

両群のデータの小さい順に順位を付ける（同じ値には順位の平均値)。

データ数$n_1 \le n_2$の小さい群の順位合計を$W = \sum_{i=1}^{n_1} r_i$として、

データ数が少ない（$n_2 \le 20$）とき

数表（補遺４）を参照し、データ数n_1, n_2の組で$W \le W_1$または$W \ge W_2$であれば、両群の中央値に差があると判定する。

データ数が多い（$n_2 > 20$）とき

$$z = \frac{|W - n_1(n_1 + n_2 + 1)/2| - 1/2}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)/12}} \sim N(0, 1)\text{分布}$$

$p = 2 \times (1 - normsdist(z))$ として、 $p < \alpha$ のとき、中央値に差があると判定する。

⑪ 対応のある場合の t 検定

正規分布し、対応のある２標本の母平均を比較し、差があるかどうか有意水準αで検定する。各標本の差z_i，データ数n組，差の平均$\bar{z}$，差の不偏分散u_z^2

$$t = \frac{\sqrt{n}\bar{z}}{u_z} \sim t_{n-1}\text{分布}$$

$p = tdist(|t|, n-1, 2)$ として、 $p < \alpha$ のとき、差があると判定する。

⑫ Wilcoxon の符号付き順位和検定

一般的分布の対応のある２つの標本の母平均を比較し、差があるかどうか有意水準αで検定する。対応する各標本の差をz_iにとり、後は⑦の手順に従う。

統計的推定

⑬ 母比率の区間推定

データ数n、比率$\hat{p}$の標本から、母比率pを信頼区間$(1-\alpha) \times 100\%$で推定する。

$$z_0 = normsinv(1 - \alpha/2) \text{ として、} \quad \hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_0 \le p \le \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}z_0$$

⑭ 母平均の区間推定

データ数n、平均$\bar{x}$、不偏分散u^2の標本から、正規分布する母集団の母平均μを信頼区間$(1-\alpha) \times 100\%$で推定する。

$$t_0 = tinv(\alpha, n-1) \text{ として、} \quad \bar{x} - \frac{u}{\sqrt{n}}t_0 \le \mu \le \bar{x} + \frac{u}{\sqrt{n}}t_0$$

補遺３　ウィルコクソンの符号付き順位和検定の両側確率と検定値（R_1）

n	α =0.05	α =0.01	n	α =0.05	α =0.01
5	-	-	28	116	91
6	0	-	29	126	100
7	2	-	30	137	109
8	3	0	31	147	118
9	5	1	32	159	128
10	8	3	33	170	138
11	10	5	34	182	148
12	13	7	35	195	159
13	17	9	36	208	171
14	21	12	37	221	182
15	25	15	38	235	194
16	29	19	39	249	207
17	34	23	40	264	220
18	40	27	41	279	233
19	46	32	42	294	247
20	52	37	43	310	261
21	58	42	44	327	276
22	65	48	45	343	291
23	73	54	46	361	307
24	81	61	47	378	322
25	89	68	48	396	339
26	98	75	49	415	355
27	107	83	50	434	373

丹後俊郎，新版医学への統計学，朝倉書店　より抜粋

補遺４　ウィルコクソンの順位和検定の両側確率と検定値（U_1/U_2）

*n*1	*n*2	α=0.05	α=0.01	*n*1	*n*2	α=0.05	α=0.01	*n*1	*n*2	α=0.05	α=0.01
2	4	-	-		16	30/80	24/86		14	91/159	81/169
	5	-	-		17	32/83	25/90		15	94/166	84/176
	6	-	-		18	33/87	26/94		16	97/173	86/184
	7	-	-		19	34/91	27/98		17	100/180	89/191
	8	3/19	-		20	35/95	28/102		18	103/187	92/198
	9	3/21	-	6	6	26/52	23/55		19	107/193	94/206
	10	3/23	-		7	27/57	24/60		20	110/200	97/213
	11	3/25	-		8	29/61	25/65	11	11	96/157	87/166
	12	4/26	-		9	31/65	26/70		12	99/165	90/174
	13	4/28	-		10	32/70	27/75		13	103/172	93/182
	14	4/30	-		11	34/74	28/80		14	106/180	96/190
	15	4/32	-		12	36/79	30/84		15	110/187	99/198
	16	4/34	-		13	37/83	31/89		16	113/195	102/206
	17	5/35	-		14	38/88	32/94		17	117/202	105/214
	18	5/37	-		15	40/92	33/99		18	121/209	108/222
	19	5/39	3/41		16	42/96	34/104		19	124/217	111/230
	20	5/41	3/43		17	43/101	36/108		20	128/224	114/238
3	3	-	-		18	45/105	37/113	12	12	115/185	105/195
	4	-	-		19	46/110	38/118		13	119/193	109/203
	5	6/21	-		20	48/114	39/123		14	123/201	112/212
	6	7/23	-	7	7	36/69	32/73		15	127/209	115/221
	7	7/26	-		8	38/74	34/78		16	131/217	119/229
	8	8/28	-		9	40/79	35/84		17	135/225	122/238
	9	8/31	6/33		10	42/84	37/89		18	139/233	125/247
	10	9/33	6/36		11	44/89	38/95		19	143/241	129/255
	11	9/36	6/39		12	46/94	40/100		20	147/249	132/264
	12	10/38	7/41		13	48/99	41/106	13	13	136/215	125/226
	13	10/41	7/44		14	50/104	43/111		14	141/223	129/235
	14	11/43	7/47		15	52/109	44/117		15	145/232	133/244
	15	11/46	8/49		16	54/114	46/122		16	150/240	136/254
	16	12/48	8/52		17	56/119	47/128		17	154/249	140/263
	17	12/51	8/55		18	58/124	49/133		18	158/258	144/272
	18	13/53	8/58		19	60/129	50/139		19	163/266	147/282
	19	13/56	9/60		20	62/134	52/144		20	167/275	151/291
	20	14/58	9/63	8	8	49/87	43/93	14	14	160/246	147/259
4	4	10/26	-		9	51/93	45/99		15	164/256	151/269
	5	11/29	-		10	53/99	47/105		16	169/265	155/279
	6	12/32	10/34		11	55/105	49/111		17	172/276	159/289
	7	13/35	10/38		12	58/110	51/117		18	179/283	163/299
	8	14/38	11/41		13	60/116	53/123		19	183/293	168/308
	9	14/42	11/45		14	62/122	54/130		20	188/302	172/318
	10	15/45	12/48		15	65/127	56/136	15	15	184/281	171/294
	11	16/48	12/52		16	67/133	58/142		16	190/290	175/305
	12	17/51	13/55		17	70/138	60/148		17	195/300	180/315
	13	18/54	13/59		18	72/144	62/154		18	200/310	184/326
	14	19/57	14/62		19	74/150	64/160		19	205/320	189/326
	15	20/60	15/65		20	77/155	66/166		20	210/330	193/347
	16	21/63	15/69	9	9	62/109	56/115	16	16	211/317	196/332
	17	21/67	16/72		10	65/115	58/122		17	217/327	201/343
	18	22/70	16/76		11	68/121	61/128		18	222/338	206/354
	19	23/73	17/79		12	71/127	63/135		19	228/348	210/366
	20	24/76	18/82		13	73/134	65/142		20	234/358	215/377
5	5	17/38	15/40		14	76/140	67/149	17	17	240/355	223/372
	6	18/42	16/44		15	79/146	69/156		18	246/366	228/384
	7	20/45	16/49		16	82/152	72/162		19	252/377	234/395
	8	21/49	17/53		17	84/159	74/169		20	258/388	239/407
	9	22/53	18/57		18	87/165	76/176	18	18	270/396	252/414
	10	23/57	19/61		19	90/171	78/183		19	277/407	258/426
	11	24/61	20/65		20	93/177	81/189		20	283/419	263/439
	12	26/64	21/69	10	10	78/132	71/139	19	19	303/438	283/458
	13	27/68	22/73		11	81/139	73/147		20	309/451	289/471
	14	28/72	22/78		12	84/146	76/154	20	20	337/483	315/505
	15	29/76	23/82		13	88/152	79/161				

丹後俊郎，新版医学への統計学，朝倉書店　より抜粋