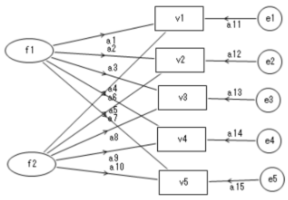
最尤法と最小 2 乗法による因子分析

標準化された観測変数を以下のように p 個の因子（内生変数）で表すものとする。

$$x_{i\lambda} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} f_{p\lambda} + b_i e_{i\lambda}$$



これを用いると、相関係数 s_{ij} は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{1}{N}\sum_{\lambda=1}^{N} x_{i\lambda} x_{j\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{\lambda=1}^{N} (\sum_{k=1}^{p} a_{ik} f_{k\lambda} + b_i e_{i\lambda})(\sum_{l=1}^{p} a_{jl} f_{l\lambda} + b_j e_{j\lambda}) \\ &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} a_{ik} a_{jl} \frac{1}{N}\sum_{\lambda=1}^{N} f_{k\lambda} f_{l\lambda} + b_i b_j \frac{1}{N}\sum_{\lambda=1}^{N} e_{i\lambda} e_{j\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} a_{jk} + b_i b_j \delta_{ij} \equiv \mathbf{\Sigma}_{ij} \end{aligned}$$

ここに、因子と誤差について、以下の関係があるものとする。

$$\frac{1}{N}\sum_{\lambda=1}^{N} f_{k\lambda} f_{l\lambda} = \delta_{kl}, \quad \frac{1}{N}\sum_{\lambda=1}^{N} e_{i\lambda} e_{j\lambda} = \delta_{ij}, \quad \sum_{\lambda=1}^{N} f_{k\lambda} e_{i\lambda} = 0$$

最尤法では、以下の尤度を考える。

$$\begin{aligned} L &= \prod_{\lambda=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\mathbf{\Sigma}|}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} (\mathbf{\Sigma}^{-1})_{ij} x_{i\lambda} x_{j\lambda} \right] \\ &= (2\pi)^{-pN/2} |\mathbf{\Sigma}|^{-N/2} \exp\left[-\frac{N}{2} tr(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}) \right] \end{aligned}$$

これを最大化するために、符号を反対にした対数尤度の最小化を考える。

$$\begin{aligned} -\log L &= \frac{pN}{2}\log(2\pi) + \frac{N}{2}\log|\mathbf{\Sigma}| + \frac{N}{2} tr(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}) \\ &= \frac{N}{2}\left[tr(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}) - \log|\mathbf{\Sigma}^{-1}| \right] + const. \end{aligned}$$

この形から、$\mathbf{\Sigma}$ と $\mathbf{S}$ が完全に一致する場合に 0 になるように、評価関数 $f_{ML}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ を以下のように定義してこれを最小化する。

$$f_{ML}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = tr(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}) - \log|\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}| - p$$

最小 2 乗法では、評価関数 $f_{MS}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ を以下のように定義してこれを最小化する。

$$f_{MS}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} (\Sigma_{ij} - s_{ij})^2$$

評価関数が複雑なため、パラメータの初期値の与え方が重要であるが、我々のプログラムでは、確実に値の求まる最小 2 乗法の結果を初期値として用いる。