

## 共分散構造分析の評価関数について

共分散構造分析で図1のような簡単なモデルを考えたとします。

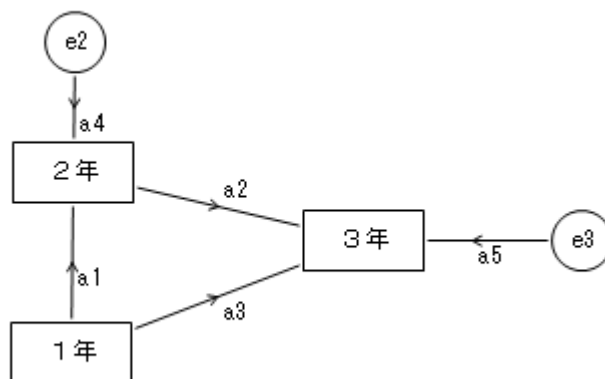


図1 モデル

このパラメータを推定するための評価関数を実際に見た方は少ないのではないのでしょうか。College Analysis にはこれを表示するための図1のような拡張メニューがあります。

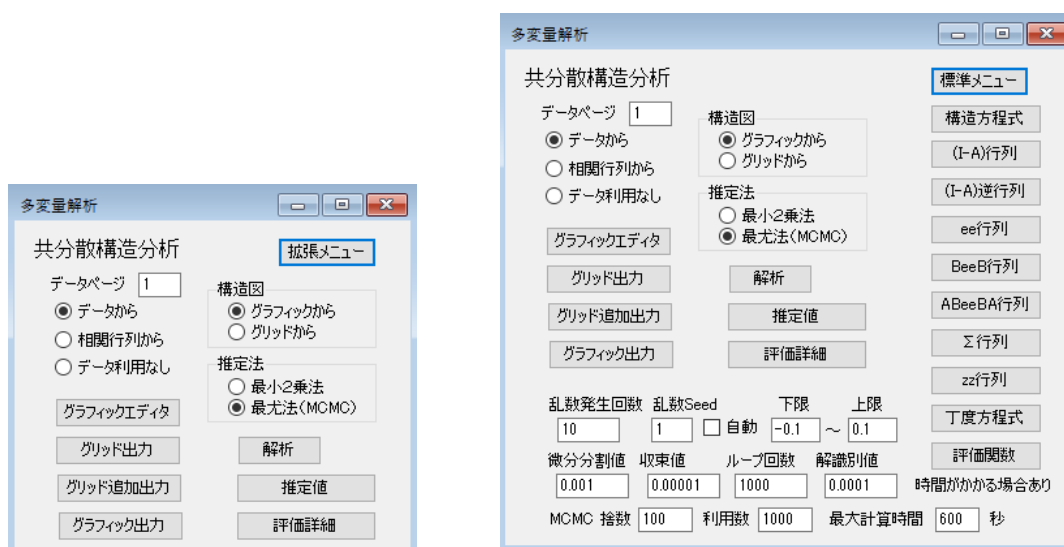


図2 標準メニューと拡張メニュー

拡張メニューは各種設定を変えるだけでなく、共分散構造分析の行列計算を式のままで順を追って示して行く機能があります。そのゴールが、丁度方程式と評価関数です。

上のモデルでの丁度方程式は以下ようになります。

$$\begin{aligned}
 a1 - 0.725047172894912 &= 0 \\
 a1 * a2 + a3 - 0.624818001444267 &= 0 \\
 a1 * a1 + a4 * a4 - 1 &= 0 \\
 a1 * a1 * a2 + a1 * a3 + a4 * a4 * a2 - 0.741173458719775 &= 0 \\
 a1 * a2 * a1 * a2 + a1 * a2 * a3 + a3 * a1 * a2 + a3 * a3 + a2 * a4 * a4 * a2 + a5 * a5 - 1 &= 0
 \end{aligned}$$

#パラメータ数 : 5  
#方程式数 : 5  
#自由度 : 0

これは、自由度 0 のモデルですので、パラメータの値が完全に決まります。

次に、この丁度方程式を使った 2 つの手法の評価関数を示してみます。長い式ですが、1 つの式で、この式の値を最小化するようにパラメータを選びます。まずは最小 2 乗法から。

最小 2 乗法

$$(a1-0.725047172894912)^2+(a1*a2+a3-0.624818001444267)^2+(a1*a1+a4*a4-1)^2+(a1*a1*a2+a1*a3+a4*a4*a2-0.741173458719775)^2+(a1*a2*a1*a2+a1*a2*a3+a3*a1*a2+a3*a3+a2*a4*a4*a2+a5*a5-1)^2$$

丁度方程式の各式を 2 乗して和を取っていることが分かります。次に、最尤法です。

最尤法

$$(a1*a1*a1*a2*a1*a2+a1*a1*a1*a2*a3+a1*a1*a3*a1*a2+a1*a1*a3*a3+a1*a1*a2*a4*a4*a2+a1*a1*a5*a5+a4*a4*a1*a2*a1*a2+a4*a4*a1*a2*a3+a4*a4*a3*a1*a2+a4*a4*a3*a3+a4*a4*a2*a4*a4*a2+a4*a4*a5*a5-a1*a1*a2*a1*a2*a1+a1*a1*a2*a3*a1+a1*a3*a3*a1+a1*a3*a2*a4*a4+a4*a4*a2*a1*a2*a1+a4*a4*a2*a3*a1+a4*a4*a2*a2*a4*a4-a1*a1*a2*a1*a2*0.725047172894912+a1*a1*a2*a3*0.725047172894912+a1*a3*a1*a2*0.725047172894912+a1*a3*a3*0.725047172894912+a1*a2*a4*a4*a2*0.725047172894912+a1*a5*a5*0.725047172894912-a1*a2*a1*a2*a1*0.725047172894912+a1*a2*a3*a1*0.725047172894912+a1*a2*a2*a4*a4*0.725047172894912+a3*a1*a2*a1*0.725047172894912+a3*a3*a1*0.725047172894912+a3*a2*a4*a4*0.725047172894912+a1*a1*a1*a2*0.624818001444267+a1*a1*a3*0.624818001444267+a1*a4*a4*a2*0.624818001444267-a1*a2*a1*a1*0.624818001444267+a1*a2*a4*a4*0.624818001444267+a3*a1*a1*0.624818001444267+a3*a4*a4*0.624818001444267-a1*a1*a2*a1*a2*0.725047172894912+a1*a1*a2*a3*0.725047172894912+a1*a3*a1*a2*0.725047172894912+a1*a3*a3*0.725047172894912+a1*a2*a4*a4*a2*0.725047172894912+a1*a5*a5*0.725047172894912-a1*a1*a2*a1*a2*0.725047172894912+a1*a1*a2*a3*0.725047172894912+a1*a3*a1*a2*0.725047172894912+a1*a3*a3*0.725047172894912+a4*a4*a2*a1*a2*0.725047172894912+a4*a4*a2*a3*0.725047172894912+a1*a2*a1*a2+a1*a2*a3+a3*a1*a2+a3*a3+a2*a4*a4*a2+a5*a5-a1*a2*a1*a2+a1*a2*a3+a3*a1*a2+a3*a3-a1*a1*a2*0.741173458719775+a1*a3*0.741173458719775+a4*a4*a2*0.741173458719775-a1*a2*a1*0.741173458719775+a3*a1*0.741173458719775+a1*a1*a2*a1*0.624818001444267+a1*a3*a1*0.624818001444267+a1*a2*a4*a4*0.624818001444267-a1*a1*a1*a2*0.624818001444267+a1*a1*a3*0.624818001444267+a4*a4*a1*a2*0.624818001444267+a4*a4*a3*0.624818001444267-a1*a2*a1*0.741173458719775+a3*a1*0.741173458719775-a1*a1*a2*0.741173458719775+a1*a3*0.741173458719775+a1*a1+a4*a4-a1*a1)*(1)/(a1*a1*a1*a2*a1*a2+a1*a1*a1*a2*a3+a1*a1*a3*a1*a2+a1*a1*a3*a3+a1*a1*a2*a4*a4*a2+a1*a1*a5*a5+a4*a4*a1*a2*a1*a2+a4*a4*a1*a2*a3+a4*a4*a3*a1*a2+a4*a4*a3*a3+a4*a4*a2*a4*a4*a2+a4*a4*a5*a5-a1*a1*a2*a1*a2*a1+a1*a1*a2*a3*a1+a1*a1*a2*a2*a4*a4+a1*a3*a1*a2*a1+a1*a3*a3*a1+a1*a3*a2*a4*a4+a4*a4*a2*a1*a2*a1+a4*a4*a2*a3*a1+a4*a4*a2*a2*a4*a4-a1*a1*a1*a2*a1*a2+a1*a1*a1*a2*a3+a1*a1*a3*a1*a2+a1*a1*a3*a3+a1*a1*a2*a4*a4*a2+a1*a1*a5*a5-a1*a1*a1*a2*a1*a2+a1*a1*a1*a2*a3+a1*a1*a3*a1*a2+a1*a1*a3*a3+a1*a4*a4*a2*a1*a2+a1*a4*a4*a2*a3+a1*a2*a1*a1*a2*a1+a1*a2*a1*a3*a1+a1*a2*a1*a2*a4*a4-a1*a2*a1*a1*a1*a2+a1*a2*a1*a1*a3+a1*a2*a4*a4*a1*a2+a1*a2*a4*a4*a3+a3*a1*a1*a2*a1+a3*a1*a3*a1+$$

$$\begin{aligned}
& a^3 a^1 a^2 a^4 a^4 - a^3 a^1 a^1 a^1 a^2 + a^3 a^1 a^1 a^3 + a^3 a^4 a^4 a^1 a^2 + a^3 a^4 a^4 a^3) + \log \\
& (a^1 a^1 a^1 a^2 a^1 a^2 + a^1 a^1 a^1 a^2 a^3 + a^1 a^1 a^3 a^1 a^2 + a^1 a^1 a^3 a^3 + a^1 a^1 a^2 \\
& * a^4 a^4 a^2 + a^1 a^1 a^5 a^5 + a^4 a^4 a^1 a^2 a^1 a^2 + a^4 a^4 a^1 a^2 a^3 + a^4 a^4 a^3 a^1 a^2 + \\
& a^4 a^4 a^3 a^3 + a^4 a^4 a^2 a^4 a^2 + a^4 a^4 a^5 a^5 - a^1 a^1 a^2 a^1 a^2 a^1 + a^1 a^1 a^2 a^3 \\
& * a^1 + a^1 a^1 a^2 a^2 a^4 a^4 + a^1 a^3 a^1 a^2 a^1 + a^1 a^3 a^3 a^1 + a^1 a^3 a^2 a^4 a^4 + a^4 a^4 a^2 \\
& a^2 a^1 a^2 a^1 + a^4 a^4 a^2 a^3 a^1 + a^4 a^4 a^2 a^2 a^4 a^4 - a^1 a^1 a^1 a^2 a^1 a^2 + a^1 a^1 a^1 \\
& * a^2 a^3 + a^1 a^1 a^3 a^1 a^2 + a^1 a^1 a^3 a^3 + a^1 a^1 a^2 a^4 a^4 a^2 + a^1 a^1 a^5 a^5 - a^1 a^1 a^1 \\
& a^2 a^1 a^2 + a^1 a^1 a^1 a^2 a^3 + a^1 a^1 a^3 a^1 a^2 + a^1 a^1 a^3 a^3 + a^1 a^4 a^4 a^2 a^1 a^2 \\
& + a^1 a^4 a^4 a^2 a^3 + a^1 a^2 a^1 a^1 a^2 a^1 + a^1 a^2 a^1 a^3 a^1 + a^1 a^2 a^1 a^2 a^4 a^4 - a^1 a^1 \\
& a^2 a^1 a^1 a^1 a^2 + a^1 a^2 a^1 a^1 a^3 + a^1 a^2 a^4 a^4 a^1 a^2 + a^1 a^2 a^4 a^4 a^3 + a^3 a^1 a^1 \\
& * a^2 a^1 + a^3 a^1 a^3 a^1 + a^3 a^1 a^2 a^4 a^4 - a^3 a^1 a^1 a^1 a^2 + a^3 a^1 a^1 a^3 + a^3 a^4 a^4 a^1 \\
& a^2 + a^3 a^4 a^4 a^3) - 2^3 \log(1) - \log(0.20610751047441) - 3
\end{aligned}$$

こんな簡単なモデルでも、これほど長くなります。計算機は大変ですね。